

(昭和 22 年造船協會秋季講演會に於て講演)

直交異方性圓筒殼の挫屈について

正員 工學博士 林

毅*

Abstract.

On the Elastic Instability of Orthogonal Anisotropic Cylindrical Shells, especially the Buckling Load due to Compression, Bending and Torsion.

Tsuyoshi Hayashi, *Kogakuhakushi, Member.*

This problem has been studied by several authors, but as the formula for the buckling load it is merely derived the determinantal equation of conditions of buckling, and as the orthogonal anisotropy in its analysis it is contained only the differences of dimensions of outer skin in two perpendicular directions.

It is an urgent need in practice, to derive the explicit expression for the buckling load of orthogonal anisotropic shells, containing the general elastic constants, rigidities and dimensions. From this point of view, the author derived in general form the equation (21) (36)(37), and (57) (58) for compression-, bending- and torsion-buckling. Excepting the case of equation (21), these equations give a pretty good agreement with the experiments.

1. 緒 論

直交異方性外板をもつ圓筒の挫屈については、その弾性主方向が筒軸と周方向に平行な場合について既に山名 Dschou, Heck [1][2][3] 等の研究がある。山名博士は一般の荷重に對する挫屈條件式迄求めて居り、Dschou の壓縮挫屈の研究では、軸と周方向の寸法の相異のみが直交異方性として入つて居るに止まり、Heck の曲げ挫屈の研究も同様であつて、何れも外板のもつ獨立な弾性常數を含めた一般形にて實用公式が求められていない。

挫屈荷重の一般實用式が判れば直交異方性構造の異方性による挫屈強度を容易に知ることができ、従つて異方性による構造法の比較検討等が容易くなるわけである。各種木製構造の設計にも役立つことは申す迄もない。この點から著者は、外板の弾性主方向の一が筒軸に平行な場合について微小變位理論により、その壓縮、曲げ及び振りの挫屈荷重を直交異方性弾性を含む一般な表式にて求め、既に發表されている實驗結果 [1] [5] [6] と比較した。因に本論文は、既發表の論文 [7] [8] [9] をまとめたものである。

2. 基礎式

外板は一樣な板厚の場合か又はその表裏に對稱に密に補強された場合とし、對稱中央面を有し且つ一樣な直交異方性をもつとする。以下にはその弾性主方向の一が筒軸に平行な場合を考察する。

かゝる圓筒が一樣な軸方向の引張力と周方向に沿う一樣な剪斷力をうけて釣合う状態から、或微小附加變位 (φ, v, w) を起して他の釣合に入ると假定する。かゝる二つの状態が可能となる如き荷重が挫屈荷重として與えられる。次にこの場合の外板面の平衡方程式を導く。(第 1 圖)

記號: x, y = 圓筒中央斷面より母線方向に x 軸, 周方向に沿つて y 軸をとる。弾性主方向を 1, 2 で表すとこれは x, y 方向に一致する。

l, r, d = 圓筒の長さ, 平均半径, 平均直径

u, v, w = 外板の中央面上の點 $(x, y, 0)$ の x, y 方向及び外向半径方向の變位

$\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ = 中央面の伸歪と剪斷歪, 指標 1, 2 は外板の弾性主方向を表す。以下同じ

$\kappa_1, \kappa_2, \omega$ = 中央面の曲率と換率の變化

* 東大應用數學科教授

$\alpha_1, \alpha_2, \beta$ = 中央面内の内力に對する伸張剛性 α_1, α_2 と
剪斷剛性 β .

$\nu_1 (\nu_2) = 1$ (2) 方向の單位伸歪に應じて 2 (1) 方向
に生ずる縮歪

即ち平面内力に對するポアソン比

D_1, D_2 ; R = 外板の曲げ剛性 D_1, D_2 , と捩り剛性 R

$\mu_1 (\mu_2) = 1$ (2) 方向の單位の曲率變化に伴い, 2 (1)
方向に生ずる負曲率の變化, 即ち曲げに對
するポアソン比

一般に $\nu_1 \neq \mu_1, \nu_2 \neq \mu_2$

上の記號を用いると一般に

$$\alpha_1 \nu_2 = \alpha_2 \nu_1, \quad D_1 \mu_2 = D_2 \mu_1$$

なる Maxwell-Betti の相反關係がある。

扱て變形量と變位との關係は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} & \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} & \kappa_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \omega &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 κ_2 には更に $-\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r^2}$ が, ω には $-\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x}$ なる項が附加するのが普通であるがここでは,
變位の大きさに關する後述の吟味から初項にくらべて高次微小量になるから省略する。更に外板單位幅について
の内力及びモーメントの記號と正方向を第一圖の如くにとると, これらと變形量との間には次の關係がある。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \alpha_1 (\epsilon_1 + \nu_2 \epsilon_2) & M_1 &= D_1 (\kappa_1 + \mu_2 \kappa_2) \\ N_2 &= \alpha_2 (\epsilon_2 + \nu_1 \epsilon_1) & M_2 &= D_2 (\kappa_2 + \mu_1 \kappa_1) \\ N_{12} &= N_{21} = \beta \gamma & M_{12} &= M_{21} = \frac{R}{2} \omega \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

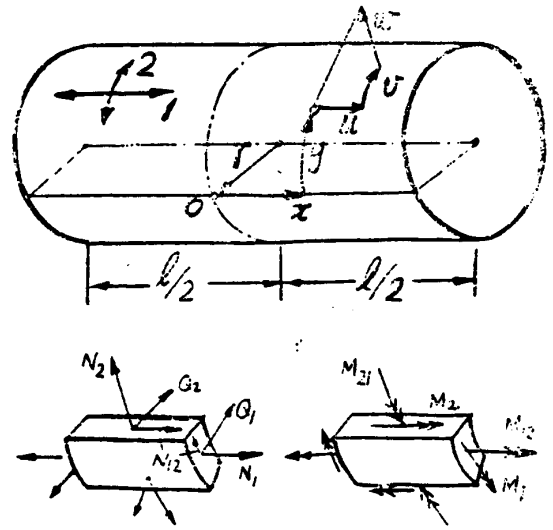
もしも同一材質及び板厚 (t) 一様な外板の場合には

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{E_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2} & D_1 &= \frac{E_1 t^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \\ \alpha_2 &= \frac{E_2 t}{1 - \nu_1 \nu_2} & D_2 &= \frac{E_2 t^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \\ \beta &= Gt & R &= \frac{1}{3} Gt^3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに E_1, E_2, G は弾性主方向 1, 2 の弾性率と剪斷弾性率,

一般に一樣引張力と周方向に一樣剪斷力を受けて釣合にある圓筒形状態から, 或微小附加變位 u, v, w を
なして新しい釣合に入る時の圓筒面の平衡方程式は, この附加變位の際に生ずる内力, モーメントの變化 ($N,$
 Q, M) に對して次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{N_2}{r} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



第 1 圖

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに P, S は周の単位幅に作用する引張力, 剪断力である。

(1) (2) (4) 式にて, 尚高次の項の影響も考えられるが, 外板の板厚が一樣 (t) な場合に於ては,

$x = \sqrt{rt} x', y = \sqrt{rt} y', u = \sqrt{\frac{t}{r}} u', v = \sqrt{\frac{t}{r}} v', w = w$ なる変換によつて整理すると, $u, v \sim \sqrt{\frac{t}{r}} w$ であり, 上式中に省略してある項は $\alpha_1 \alpha_2 \beta$ 或は $D_1 D_2 R$ に著しい大差がない時には高次微小項となるから, 通常の薄肉圓筒では上式は充分の確さをもつ。等方性圓筒について, 上の簡單化が合理的であることは既に Donnell [4] が明かにした。板厚一樣ならざる異方性圓筒でも外板の板厚方向の寸法が半径 r にくらべて小さい場合には, この簡單化が許されることが豫期される。

さて (4) の終りの三式より Q_1, Q_2 を消去すると

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \frac{N_2}{r} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

(3) の第一, 二式と (5) 式を變位の表式に直すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\alpha_1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\nu_2 + \frac{\beta}{\alpha_1} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu_2}{r} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\beta}{\alpha_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\nu_1 + \frac{\beta}{\alpha_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\alpha_2}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

ここに $2D_3 = 2D_1 \nu_2 + R$

この第一, 二式より夫々 u, v を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha_2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(1 - \nu_1 \nu_2 - 2 \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\beta}{\alpha_1} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} &= - \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1 r} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\beta}{\alpha_1 r} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\beta}{\alpha_2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \left(1 - \nu_1 \nu_2 - 2 \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\beta}{\alpha_1} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} &= - \left(1 - \nu_1 \nu_2 - \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\beta}{\alpha_1 r} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \right\} (7)$$

本式を用いて (6) の第三式より u, v を消去すると

$$D_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{\alpha_2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - P \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (8)$$

ここに $F(xy) \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\alpha_2}{\beta} \left(1 - \nu_1 \nu_2 - 2 \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$

(8) 式は w に対する 8 次偏微分方程式である。問題は與えられた境界条件の下で本式を解くことに歸せられる。

3. 壓縮挫屈

この挫屈形式には軸對稱變形と非對稱變形の二つがある。

(1) 軸對稱變形挫屈: —これは最も簡單な場合である。この場合には内力分布は x のみの函数となり, 附加變位に際して $N_{12} = Q_2 = M_{12} = 0$ なるを以て (4) 式より

$$N_1 = f_1(y) = \text{const.} = 0 \quad (i)$$

即ち N_1 の分布も軸對稱なるべき故 N_1 は y によらない const. で, これは或壓縮力 $-P$ をうけている状態からの内力變化が一定なることを表すが挫屈時にはこの變化はないわけであるからこれは 0 である。よつて (i) より

$$\epsilon_1 + \nu_2 \epsilon_2 = 0$$

従つて $\epsilon_2 = \frac{w}{r}, \quad \epsilon_1 = -\nu_2 \frac{w}{r}, \quad N_2 = \alpha_2 (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{w}{r}$.

よつて平衡方程式 (4) 第三式より

$$D_1 \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha_2 (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{w}{r^2} = 0 \quad (9)$$

一端に x の原點をとる時軸對稱波形として

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (10)$$

を考えると (これは兩端支持の條件を満す) 上式より

$$P = D_1 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{\alpha_2(1-\nu_1\nu_2)}{r^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2} \quad (11)$$

を得る。これを極小ならしめる如き挫屈波の半波長は

$$\frac{l}{m} = \pi \sqrt{\frac{D_1 r^2}{\alpha_2(1-\nu_1\nu_2)}} \quad (12)$$

にて、この時の挫屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{2}{r} \sqrt{D_1 \alpha_2 (1-\nu_1\nu_2)} \quad (13)$$

同一材質で一様板厚 t の外板では挫屈應力は

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{t} = \sqrt{\frac{E_1 E_2}{3(1-\nu_1\nu_2)}} \cdot \frac{t}{r} \quad (14)$$

この波形は (13) から判る様に $D_1 \alpha_2$ の小さい場合に起る可能性がある。又同一材質、一様板厚では E_1 , E_2 の方向をとりかえても挫屈應力は變らないことが注目される。

(2) 非對稱變形挫屈

一般に圓弧板を考慮することとし、兩端と、母線に平行な二邊とは、單純に支持され挫屈の際は後者は周方向に自由に變位が起り得るとする。

挫屈波形は長さと同方向に相當數の波が出来るとしその半波長を夫々 l , b とする。挫屈波形としては (7) 式を考慮して

$$\left. \begin{aligned} u &= U \cos \frac{mx}{r} \sin \frac{ny}{r}, \quad v = V \sin \frac{mx}{r} \cos \frac{ny}{r}, \quad w = W \sin \frac{mx}{r} \sin \frac{ny}{r} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

を考慮。ここに $m = \frac{\pi r}{l}$, $n = \frac{\pi r}{b}$.

一般式 (7) に於て $P = -P$, $S = 0$ とし (15) を代入して

$$P = \frac{\alpha_2(1-\nu_1\nu_2)m^2}{m^4 + \frac{\alpha_2}{\beta} \left(1-\nu_1\nu_2 - 2 \frac{\nu_1\beta}{\alpha_1} \right) m^2 n^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} n^4} + \frac{1}{r^2} \left(D_1 m^2 + 2 D_3 n^2 + D_2 \frac{n^2}{m^2} \right) \quad (16)$$

P は m^2 , n^2 の函数として表されているが

$$\frac{n}{m} = k \quad (17)$$

とおいて、 m , k にて表すと

$$P = \frac{1-\nu_1\nu_2}{m^2 \left(-\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta} \left(1-\nu_1\nu_2 - 2 \frac{\nu_1\beta}{\alpha_1} \right) k^2 + \frac{1}{\alpha_1} k^4 \right)} + \frac{m^2}{r^2} (D_1 + 2 D_3 k^2 + D_2 k^4) \quad (18)$$

P_{\min} は $\frac{\partial P}{\partial m^2} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial k^2} = 0$ より求められる。 $\frac{\partial P}{\partial m^2} = 0$ より

$$\frac{1}{m^4} = \frac{1}{r^2(1-\nu_1\nu_2)} \left(\alpha_2 + \frac{1}{\beta} \left(1-\nu_1\nu_2 - 2 \frac{\nu_1\beta}{\alpha_1} \right) k^2 + \frac{1}{\alpha_1} k^4 \right) (D_1 + 2 D_3 k^2 + D_2 k^4) \quad (19)$$

$\frac{\partial P}{\partial k^2} = 0$ より

$$c_1 k^4 + c_2 k^2 - c_3 = 0$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 2 \frac{\beta D_3}{\alpha_1 D_2} - \left(1-\nu_1\nu_2 - 2 \frac{\nu_1\beta}{\alpha_1} \right) \\ c_2 &= 2 \frac{\beta D_1}{\alpha_1 D_2} \left(1 - \frac{\alpha_1 D_2}{\alpha_2 D_1} \right), \\ c_3 &= \left[2 \frac{\beta D_3}{\alpha_2 D_1} - \left(1-\nu_1\nu_2 - 2 \frac{\nu_1\beta}{\alpha_1} \right) \right] \frac{D_1}{D_2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(19) 及び $\frac{\partial P}{\partial k^2} = 0$ から得られる途中の関係を (18) に入れ

$$P_{cr} = \frac{2\sqrt{1-\nu_1\nu_2}}{r} \sqrt{\frac{\alpha_1(D_2k^2 + D_3)}{k^2 + \frac{\alpha_1}{2\beta}(1-\nu_1\nu_2 - 2\frac{\nu_1\beta}{\alpha_1})}} \quad (21)$$

本式は最も一般的な挫屈荷重表現式である。直交異方性を表す弾性量が與えられれば、(19)、(20) から m, k が定まり (21) より挫屈荷重が求められる。Dschou に於ける本式に相當する式中には寸法の相違のみが直交異方性を表す量として入っているのみであるから一般性がなく Dschou の式自身は極めて大膽な簡單化を行つてゐるから適用に際して注意を要する不便がある。

次に特別な二、三の場合を考える。

(1) 波板圓筒——山名博士⁽¹⁾により、波板外板については

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (22)$$

なる性質があるから、 $c_2 = 0, c_3/c_1 = D_1/D_2$ となり (20) より

$$k = \frac{l}{b} = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \quad (\text{半波長比}) \quad (23)$$

又、 $\alpha_1 > \beta, D_1 \geq D_2, D_3$ なる性質があるから

$$P_{cr} = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{D_2\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{2\beta} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}} \quad (24)$$

$D_2\alpha_1 = D_1\alpha_2$ であるから、本式と、先の軸對稱挫屈荷重 (13) と比較すると本式の方が低い荷重を與えることが判る。(24) と山名博士の波板圓筒の壓縮挫屈實驗と比較すると第 2 圖の如し。(24) は山名博士の計算された各曲線の包絡線を表わし殆んど同じ結果を與えるが式は非常に簡明であり實用に便利である。實驗との懸隔は以上の理論のみでは説明できない。

(2) 同一材質、一樣板厚 (t) の外板をもつ圓筒では、矢張り (23) が成立ち (記號は (3) による)

$$k = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$$

挫屈應力は

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{t} = c \cdot \sqrt{\frac{E_1 E_2}{3(1-\nu_1\nu_2)}} \cdot \frac{t}{r} \quad (25)$$

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{E_1 E_2} + 2G(1-\nu_1\nu_2) + E_1 t_2}{\sqrt{E_1 E_2} + (E_1 E_2 / 2G) - E_1 \nu_2}} \quad (26)$$

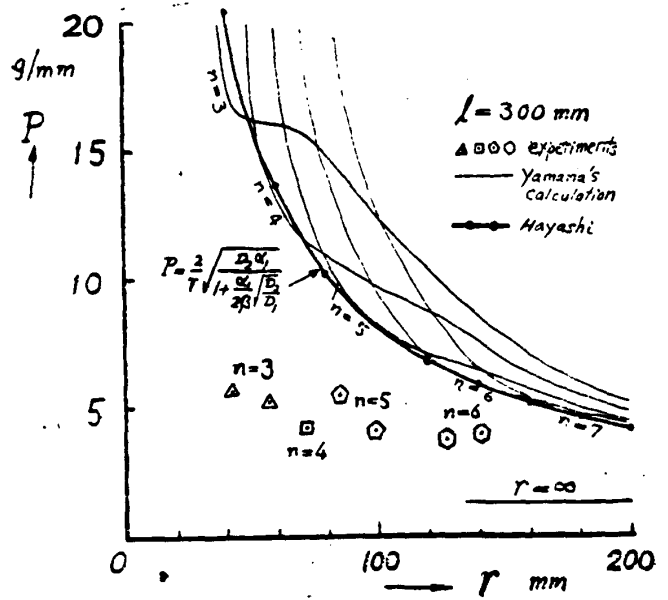
軸對稱挫屈の (14) とくらべて係數 c (一般に < 1) だけ異なる。又與えられた弾性に對しては、 E_1 と E_2 の方向 (主方向) をとりかえても挫屈應力は變らないことが判る。然し挫屈波長比は $\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$ から $\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}$ に變化する。

(3) 等方性圓筒の場合には

$$k = \frac{l}{b} = 1 \quad (27)$$

となり、挫屈應力は (14) も (26) も同じ値を與え既知の式

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t}{r} \quad (28)$$



第 2 圖 波板圓筒の挫屈荷重

となる。

等方性圓筒の場合に軸方向と周方向の半波長比 l/b が1になることは注目すべき結果である。これは従來の多くの壓縮試驗結果に見られる事實であつて、これが微小變位理論によつて導かれたことは興味あることである。Kármán の圓筒の壓縮挫屈理論⁽¹⁰⁾に於ては、これを實驗的事實として1と假定して數値計算を行つてゐるに止まり且可能性を考慮して2の場合の計算も行つてあるが $k=2$ についての理論的根據はまだないのである。

4. 曲げ挫屈

相當に長い圓筒が兩端に純曲げモーメント M を受ける場合、 M と、これによつて生ずる筒軸の曲率 κ との関係は第3圖の如くなり、斷面形は曲げ應力の爲に扁平化し遂に A 點で壓潰するに到る。この限界壓潰モーメント M_1 を求める。

扱つて純曲げモーメントをうける時の變形は圓筒の各斷面共同一であるから M_1 を求める目的には圓筒の單位長さをとつて考察すればよい。或曲率 κ に對して、斷面の取る形狀がその變形仕事 U を極小ならしめる状態の存在することが豫想される。

U は (1) 圓筒面の軸方向の伸縮による歪エネルギー U_1 と (2) 斷面形の扁平化に伴う曲げエネルギー U_2 より成り

$$U_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 \kappa_1^2 \oint d^2 \cdot dy, \quad U_2 = \frac{1}{2} D_2 \oint \kappa_2^2 dy \quad (29)$$

ここに d は周上の或點の、變位後の位置より中立軸迄の距離である。(第3圖)

ここで周方向には inextensional deformation をなすと假定する。この假定は板厚對半徑比が大きくなければ實際上許される。この條件は $\epsilon_2 = 0$ であり、これより

$$w = -r \frac{dv}{dy} \quad (30)$$

従つて

$$\left. \begin{aligned} d &= (r+w) \sin \theta + v \cos \theta = \left(1 - \frac{dv}{dy}\right) r \sin \theta + v \cos \theta \\ \kappa_2 &= \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dy} + \frac{w}{r^2} = -r \frac{d^3 v}{dy^3} - \frac{2}{r} \frac{dv}{dy} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

これにより U は與えられた κ_1 に對しては、 v のみの函數となるがその $v(y)$ は或外モーメント M に對し、 $U = \min.$ ならしめる如き變形でなければならない。

今所要の變位成分 v を次の様に假定する。

$$v = r \sum_{i=1}^n A_i \sin 2i\theta \quad (32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial A_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

より A_i を定めると

$$A_1 = -\frac{3}{32} \frac{\alpha_1 r^4}{D_2} \kappa_1^2, \quad v = A_1 r \sin 2\theta; \quad A_i = 0 \quad (i \geq 2) \quad (33)$$

よつて曲げモーメントは

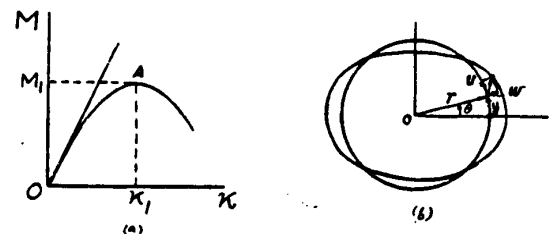
$$M = \frac{dU(\kappa_1)}{d\kappa_1} = \pi r^3 \alpha_1 \left(\kappa_1 - \frac{9}{32} \frac{\alpha_1 r^4}{D_2} \kappa_1^3 \right) \quad (34)$$

これは曲率

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{32}{27} \cdot \frac{D_2}{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (35)$$

にて max となり

$$M_{\max} \equiv M_1 = \frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} \pi r^3 \sqrt{D_2 \alpha_1} \quad (36)$$



第3圖

これが所要の壓潰曲げモーメントである。

この際中立軸より最遠點に於ける壓縮力は單位幅について

$$N_1 = d_1 \kappa_1 r = \sqrt{\frac{32}{27}} \cdot \frac{\sqrt{D_2 \alpha_1}}{r} \quad (37)$$

であり壓潰時の扁平量は

$$\delta = \left| w \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \right| = \frac{2}{9} r \quad (38)$$

同一材質、一様板厚の外板をもつ圓筒では最大曲げ應力は

$$\sigma_{cr} = \frac{N_1}{t} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{1 - \nu_1 \nu_2} \cdot \frac{t}{r} \approx 0.314 \sqrt{E_1 E_2} \cdot \frac{t}{r} \quad (39)$$

この場合にも弾性主方向を直角変えて、周方向に E_1 、軸方向に E_2 が向く様にしても挫屈應力は變らない。

上の結果を井上の合板圓筒の曲げ試験⁽⁵⁾と比較すると第4圖の如し。試験片はシナ合板圓筒で合板厚さ 1,

1.5, 2 耗, 直徑 22), 500 耗のものである。破壊應力は破壊時曲げモーメントから梁理論によつて計算した最大曲げ應力を表す。圖中 //, ⊥ は表面纖維方向が軸に平行なる圓筒か垂直なる圓筒か, の別を示す。シナ合板の曲げ試験から曲げに対する平均弾性率 $E_{10} = 731$,

$E_{20} = 118 \text{ kg/mm}^2$ (1, 2 は表面纖維方向及それに直角な方向の意) が得られている。これは引張, 壓縮即ち平面内力に対する弾性率とは勿論違ふのであつて, これを直ちに (39) へ用いることは出来ない。合板は一様板厚ではあつても同一材質ではないから寧ろ剛性による表式 (37) によつて理論計算をなすべきである。その爲には,

$$D_2 = \frac{E_{20} t^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}, \quad \alpha_1 = \frac{E_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2}$$

比の影響は小さくて省略できるから $D_2 = \frac{E_{20} t^3}{12}$, $\alpha_1 = E_1 t$ として差支えなく従つて (37) より曲げ最大應力

は $\sigma_{cr} = 0.314 \sqrt{E_{20} E_1} \cdot \frac{t}{r}$ となる。然るに α_1 従つて E_1 を知るには引張試験を要するわけであるが原論文には α_1 , E_1 の測定が報告されていない。井上の別の報告⁽⁶⁾から E_1 の實驗値をとると上の板厚に対しては $E_1 = 600 \text{ kg/mm}^2$, かくして $E_{20} = 118$, $E_1 = 600 \text{ kg/mm}^2$ として計算したものが上圖である。

實驗では挫屈荷重は // のものでは破壊荷重の最低 30% にて, 或ものでは 90% 以上に出ているものもあるから圖中破壊應力は // のものでは實驗の挫屈應力に近いわけであり, 従つて理論との一致は良好であることが判る。⊥ のものでは挫屈は破壊荷重の 30% 程度にて既に生じたと報告されているが⊥ のものは製作困難で初期變形が入り易い爲と考えられる。然し破壊荷重は大體 $\frac{r}{t}$ の同じ // のものと略同じに出ていることは興味がある。

5. 撓り挫屈

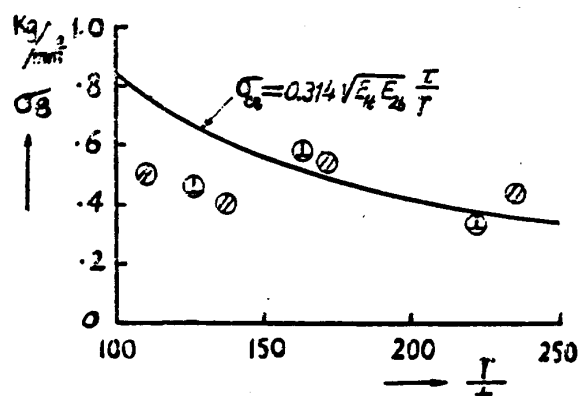
直交異方性圓筒が兩端に或撓りモーメント (周に沿う單位幅についての剪斷力 S) をうけて釣合にある状態から, 或附加變位 (uvw) をなして新しい釣合に入る時の圓筒面の平衡方程式は (4) 式, 撓み w の満足すべき式は (3) にて與えられる。

境界條件としては次の二つの場合を考える。

兩端單純支持の場合: 一兩端 $x = \pm \frac{l}{2}$ にて

$$u = v = w = 0, \quad M_1 = D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (40)$$

兩端固定の場合: 一兩端 $x = \pm \frac{l}{2}$ にて



第4圖

シナ合板圓筒の曲げ曲げ破壊應力と $\frac{r}{t}$ の關係

$$u=v=w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{41}$$

さて、かゝる境界条件の下で實際に起る振り歪屈波をよく表わし且 (7) の関係を満足する様な可能な變位として

$$\begin{aligned} u &= \sum U_m \sin 2 \left(\frac{ny}{d} - \frac{\lambda_m x}{l} \right) \\ v &= \sum V_m \sin 2 \left(\frac{ny}{d} - \frac{\lambda_m x}{l} \right) \\ w &= \sum W_m \cos 2 \left(\frac{ny}{d} - \frac{\lambda_m x}{l} \right) \end{aligned} \tag{42}$$

但し $d=2r$, 直径

を假定する。ここに n は整数、 λ_m は一般に複素数を表すとす。この波形は一周に n 波長の波を表す振れ波であり、この波山の稜線と x 軸となす角を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{\lambda_m l}{nl} \equiv \frac{\lambda_m}{k}, \quad \text{但し} \quad k \equiv \frac{nl}{d} \tag{43}$$

なる関係がある。

さて (42) を (3) に代入すると

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^4 + \frac{\alpha_2}{\beta} \left(1 - \nu_1 \nu_2 - 2 \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] \left[D_1 \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^4 + 2 D_3 \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2 + D_2 \right] \\ & + \frac{\alpha_2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{r^2} \left(\frac{d}{2n} \right)^4 \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^4 - \left(\frac{d}{2n} \right)^2 \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2 \cdot 2 S \left[\left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^4 + \frac{\alpha_2}{\beta} \left(1 - \nu_1 \nu_2 - 2 \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

一方 (7) によれば U_m, V_m は共に W_m にて表され

$$\left. \begin{aligned} U_m &= -\frac{W_m}{n} \cdot \frac{\lambda_m}{k} \cdot \frac{1 - \nu_1 \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2}{1 + \left(1 - \nu_1 \nu_2 - 2 \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \frac{\alpha_1}{\beta} \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^4} \\ V_m &= -\frac{W_m}{n} \cdot \frac{1 + \left(1 - \nu_1 \nu_2 - \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \frac{\alpha_1}{\beta} \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2}{1 + \left(1 - \nu_1 \nu_2 - 2 \frac{\nu_1 \beta}{\alpha_1} \right) \frac{\alpha_1}{\beta} \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^4} \end{aligned} \right\} \tag{45}$$

(44) からは 8 箇の λ_m が定まるから、(45) を用いて結局 u, v, w は 8 箇の W_m によつて表わされることになる。一方その 8 箇の W_m は境界条件 (40) 又は (41) によつて、その中の一つを未知として他を決定することが出来る。8 箇の W_m がすべて、同時には 0 ならざる値を持つ爲には W_m の係数より成る行列式 Δ が 0 なるを要する。その条件は λ_m について 8 次方程式であり

$$\Delta = f \left\{ \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^8, \left(\frac{\lambda_m}{k} \right)^7, \dots, \left(\frac{\lambda_m}{k} \right) \right\} = 0 \tag{46}$$

かくして (44) (46) の兩式より $\left(\frac{\lambda_m}{k} \right)$ を消去して所要の歪屈荷重 S を求めることができるわけである。

然るにこの嚴密な解法は非常に複雑であつて、この方法によつては S の一般表現式を導くことは殆んど不可能である。従つて解法の簡單化を行う必要があるがこれに最も有力な根據を與えるものは實驗資料であり、この種の問題の特性をそれから得ることである。然るに L. H. Donnell⁽⁴⁾ の等方性圓筒の純粹振り實驗によれば通常 θ は相當に小さく

- | | | | |
|-----------------|---------------------------|---|-------|
| 1) 平板の場合 | 歪屈時 $\theta = 45^\circ$ | $\frac{\lambda_m}{k} = \tan \theta = 1$ | } (i) |
| 2) $l=d$ なる圓筒にて | $\dots \theta = 15^\circ$ | $\dots \tan 15^\circ = 0.268$ | |
| 3) $l=3d$ " " | $\dots \theta = 10^\circ$ | $\dots \tan 10^\circ = 0.176$ | |
| 4) $l=6d$ " " | $\dots \theta = 9^\circ$ | $\dots \tan 9^\circ = 0.158$ | |

又井上の合板圓筒の振り試験⁽⁵⁾ では

- | | | | |
|--------------------------------|---------------------|--|------|
| 5) $l=d$ なる樺 2mm 厚合板圓筒 (//) にて | $\theta = 15^\circ$ | | (ii) |
|--------------------------------|---------------------|--|------|

であり、一方合板圓筒等の直交異方性圓筒に於ては

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cong \frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \quad (iii)$$

なる程度であることが多いから、餘り短くない圓筒では通常

$$\left(\frac{\lambda_m}{k}\right)^2, \left(\frac{\lambda_m}{k}\right)^4 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (47)$$

なることが豫想される。

よつて以下には $\left(\frac{\lambda_m}{k}\right)^2, \left(\frac{\lambda_m}{k}\right)^4$ は 1 及び $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ に對して省略することにする。この簡單化によれば (44) は

$$\left(\frac{\lambda_m}{k}\right)^4 - \frac{2n^2S}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)} \left(\frac{\lambda_m}{k}\right) + \frac{4D_2n^4}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)d^2} = 0 \quad (48)$$

或は

$$\lambda_m^4 - \lambda_m \cdot \frac{2Sl^3}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)d^3}n^5 + \frac{4D_2l^4}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)d^6}n^8 = 0 \quad (49)$$

一方境界條件は、(45) が簡單に

$$U_m = -\frac{W_m}{n} \cdot \frac{\lambda_m}{k}, \quad V_m = -\frac{W_m}{n} \quad (50)$$

となるから (42) (50) を (40) 又は (41) に入れると共に $x = \pm \frac{l}{2}$ なる兩端での條件が同形となるを以て (42) の \sum_m は 4 箇の m について考えればよく、夫々次の結果を得る。

$$\left. \begin{array}{l} \sum_1^4 W_m \sin \lambda_m = 0 \\ \sum_1^4 W_m \cos \lambda_m = 0 \\ \sum_1^4 W_m \lambda_m \cos \lambda_m = 0 \\ \sum_1^4 W_m \lambda_m \sin \lambda_m = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{固定} \\ \text{端} \\ \text{條件} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sum_1^4 W_m \sin \lambda_m = 0 \\ \sum_1^4 W_m \cos \lambda_m = 0 \\ \sum_1^4 W_m \lambda_m^2 \cos \lambda_m = 0 \\ \sum_1^4 W_m \lambda_m^2 \sin \lambda_m = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{支持} \\ \text{端} \\ \text{條件} \end{array}$$

これより $W_1 \cdots W_4$ を消去し (46) に相當する式

$$\left. \begin{array}{l} \text{固定端: } (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \sin(\lambda_2 - \lambda_4) = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4) \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_4) \\ \text{支持端: } (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2) \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \sin(\lambda_2 - \lambda_4) = (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2) \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_4) \end{array} \right\} (54)$$

を得る。

かくして (49) (51) を同時に満足させる様な λ を求めることになる。それには (49) 式を

$$B = \frac{S}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)} \sqrt{\frac{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)l^3}{12D_2}}, \quad J = \sqrt{\frac{12D_2l^4}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)d^6}} \quad (52)$$

とおいて

$$\lambda_m^4 - 2BJn^5\lambda_m + \frac{1}{3}J^2n^8 = 0 \quad (53)$$

と表すと、 (n, J, B) の任意の一組の數値を與えて、(53) を解いて得られる 4 箇の λ が同時に (51) をも満足するを要す。この爲には (n, J, B) は勝手な數値の選擇は許されないこと換言すれば (n, J, B) の間に一つの關係のあることを示す。問題はその關係を見出しそれより、或 n, J に對して最低位にある S を見出すことにある。

さて (53) 式は λ_m^3 の項を含まないから $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ 、且つ一方 Southwell-Skan⁽¹¹⁾ の $l/d = 0$ なる等分性平板の剪斷撓屈の場合の検討によるとその方程式は 2 箇の實根と實部が負なる 2 箇の複素根とを持つことが知られている。この性質は、等方性平板の場合のみならず、等方性圓筒の振りの場合にも持つことが Donnell の研究によつて知られている。然るに直交異方性圓筒の場合にも、本式が等方性圓筒のものと同形式となつて居り且特別の場合として後者をも包含すべきことから現在の場合にも Southwell-Skan と同じく

$$\lambda_1 = a + b, \quad \lambda_2 = a - b, \quad \lambda_3 = -a + ic, \quad \lambda_4 = -a - ic \quad (54)$$

とおくことが出来る。ここに a, b, c は正の實數である。これらを4根にもつ方程式と (53) との係數の比較から

$$\left. \begin{aligned} 2a^2 + b^2 - c^2 &= 0 \\ a(b^2 + c^2) &= BJn^5 \\ 3(a^2 - b^2)(a^2 + c^2) &= J^2n^8 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

(54) を境界條件 (51) へ入れて

$$\left. \begin{aligned} \text{固定端の場合: } 4a^2 &= b^2 - c^2 + \frac{2bc}{N \tan 2b} \\ \text{支持端の場合: } 4a^2 &= \frac{(b^2 + c^2)^2}{b^2 - c^2 - \frac{2bc}{N \tan 2b}} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

ここに

$$N = \frac{\tanh 2c}{1 - \frac{\cos 4a}{\cos 2b \cosh 2c}}$$

これらは等方性圓筒の場合と同形になつている。かくして、例えば (55) 第1式と (56) から a^2 を消去して b, c の數值的關係を求め、その b, c の數値を (55) 第1式に入れて a を計算し、その a, b, c を用い (55) 第2, 3式より BJn^5, J^2n^8 を求める。この方法によつて BJn^5 對 J^2n^8 の曲線が判るが、これから n に或特定な値 ($n=2, 3, 4 \dots$) を與えた場合、この各 n に對する J と B とが計算出来る。 n を因數として $B-J$ 曲線を畫く時はその最低位に出る曲線部分が與えられた J に對して最も低い B の値従つて所要の挫屈荷重を與えることになる。

以下この計算は Donnell が等方性圓筒について行つたと全く同じになる。而も部分的な數値解析の結果は Donnell の結果とよく一致するので、ここでは後者の結果をそのまま用いることにする。只その際 Donnell の場合に (53) に相當する式が

$$B = \sqrt{1-\nu^2} \frac{Sl}{Et}, \quad J = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{t^3}{d^3}$$

E, ν = 等方性板の彈性率, ポアソン比, t = 外板厚さ

となつて居り且境界條件も全く同形であるので, B, J としては擴張された表式 (52) を用いればよいわけである。

かくして直交異方性外板圓筒に對しては

$$B = \frac{S}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)} \sqrt{\frac{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)l^2}{12D_2}}, \quad J = \sqrt{\frac{12D_2l^4}{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)d^6}} \quad (52)$$

なる時挫屈荷重 S は

(1) 短い圓筒に對しては

$$\left. \begin{aligned} \text{兩端支持の場合: } B &= 1.18\sqrt{J}, \quad n = 2.31J^{-\frac{1}{4}} (J < 5.5) \\ \text{兩端固定の場合: } B &= 1.29\sqrt{J}, \quad n = 2.62J^{-\frac{1}{4}} (J < 7.8) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

(2) 長い圓筒に對しては

$$\left. \begin{aligned} \text{兩端支持の場合} & \text{は } J > 5.5 \\ \text{兩端固定の場合} & \text{は } J > 7.8 \end{aligned} \right\} \text{に對し } \left. \begin{aligned} B &= 0.77\sqrt{J} \\ n &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

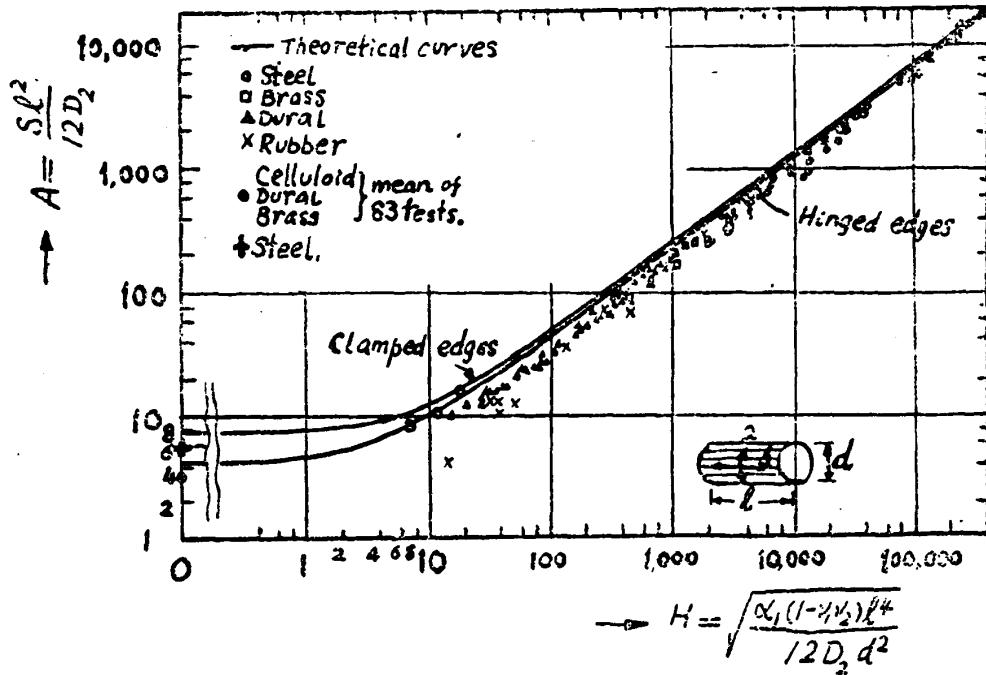
にて與えられる。

圓筒が相當に短くなつて、比較的短い圓筒及極短圓筒の範圍では上の (1) の公式から外れてくるので、この範圍では $A \sim H$ 曲線が求められている。即ち上の解と平板 ($d \rightarrow \infty$) の解とを滑かな曲線で結びつけたものであつて、第5圖の如くである。但し A, H としては擴張された次式

$$A = \frac{Bl^3}{Jd^3}, \quad H = \frac{l^4}{Jd^4} \quad (59)$$

即ち

$$A = \frac{Sl^2}{12D_2}, \quad H = \sqrt{\frac{\alpha_1(1-\nu_1\nu_2)l^4}{12D_2d^2}}$$



第 5 圖 A~H 曲線

を用うればよい。

同一材質、一様板厚 (t) の外板をもつ圓筒では $\frac{S}{t} = \tau_{cr}$ とおき

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\tau_{cr} l}{E_1 t} \sqrt{\frac{E_1(1-\nu_1\nu_2)}{E_2}}, & J &= \frac{l^2 t}{d^3} \sqrt{\frac{E_2}{E_1(1-\nu_1\nu_2)}} \\ A &= \frac{\tau_{cr} l^2}{E_1 t^2} \cdot \frac{E_1(1-\nu_1\nu_2)}{E_2}, & H &= \frac{l^2}{t d} \sqrt{\frac{E_1(1-\nu_1\nu_2)}{E_2}} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

と表わされる。例えば長い圓筒の捩り捩屈應力は

$$\tau_{cr} = 0.272 \sqrt{E_1 E_2}^3 \left(\frac{t}{r} \right)^2, \quad n=2 \quad \text{にて與えられる。}$$

以上の様にして、先に Donnell の求めた結果が一般直交異方性外板の圓筒に迄擴張され、而も B-J 関係が材料によらない全く一般的關係を表わしていることが明かにされたことは興味深い結果である。事實、鋼板、デュラルミン板、真鍮板、ゴム板の圓筒について従來行われて來た多くの實驗結果が材料の著しく異なるにも拘らず、Donnell の等方性圓筒に對する B-J 曲線に近く出ていたことはこの事實を裏書きするものであり、一方に於て本理論の有力な檢證を示しているものといふことができる。

實驗との比較： — 上の結果は等方性圓筒は勿論のこと一般直交異方性圓筒に對してもその捩り捩屈荷重を與える非常に廣汎な適用範圍をもつものである。等方性圓筒の場合には Donnell の求めた表式を表わすから本理論の檢證には等方性圓筒に關する實驗値も役立つわけである。等方性圓筒の場合には、捩屈波形は實驗とよく一致するが捩屈、荷重は理論値の平均 75%、最低 60% に出で居る。この懸隔は初形變形と境界條件の不完全さに歸するといわれている。

直交異方性圓筒に關する實驗には山名博士⁽¹⁾の波板圓筒に關するものと井上眞六氏等⁽⁵⁾の合板圓筒に關するものがあるが以下にその結果との比較を行う。

(1) 山名博士の波板圓筒の實驗—板厚 $t=0.29$ 、一波長 22.2、全波高 4.25 mm なる亜鉛引鐵板を平均半徑 $r=84.9$ mm に巻いて半田付けし、24 箇の完全波長をもつ波板圓筒を長さ 516 mm の兩端より 8 mm 内側の圓周にて、強い框にねぢ止めしたものについて捩り試験を行つて次の結果を得た。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 5.90 \times 10^6 \text{ kg/mm} & D_1 &= 1.28 \times 10^4 \text{ mm kg} & \nu_1 &= \frac{1}{3} \\ \alpha_2 &= 16.2 & D_2 &= 35 & \nu_2 &= 0 \\ \beta &= 690 & R &= 74 & & \end{aligned} \right\}$$

$$l=500 \text{ mm}, \quad d=169.8 \text{ mm}$$

挫屈時の振りモーメントを $2\pi r$ にて除して

$$\text{挫屈荷重 } S=11.7 \text{ kg/mm}, \quad \text{挫屈波長数 } n=5$$

であつた。一方本理論によれば両端支持として (52) (57) より

$$J=0.0136, \quad B=0.403$$

$$S=12.7 \text{ kg/mm}, \quad n=5$$

を得る。山名博士の挫屈条件式の数値計算結果は

$$S=13.1 \text{ kg/mm} \quad n=5$$

となつて居り、 n は共に實驗と一致するが挫屈荷重 S は實驗値は上理論値の 92.1%、山名博士の 89.4% に出ていて前者の方が少し近いが大差はない。然し本理論は一般表現式にて與えられているから實用には遙かに便利である。

(2) 井上眞六氏等の合板圓筒の振り試験との比較

井上等はしな及びかば合板にて作つた圓筒の振り試験を行い次表の如き結果を得た。試験圓筒の寸法は何れも

$$t=1 \text{ mm}, \quad l=440 \text{ mm}, \quad d=220 \text{ mm}$$

井上等の實驗結果との比較表

材質	表面の 木理方向	No.	含水率 %	G kg/mm ²	τ_B kg/mm ²	τ_{cr} 實驗	τ_{cr} 理論	60% τ_{cr} 理論
し な 合 板 圓 筒	//	1	8.2	60	0.14	0.112	両端条件 支 0.216 固 0.234	0.129 0.140
		2	8.2	70	0.14	0.112		
		3	7.9	95	0.13	0.143		
		平均	8.1	75	0.15	0.123		
	⊥	1	8.1	50	0.31	0.31	支 0.625 固 0.633	0.375 0.410
		2	9.0	60	0.39	0.39		
		3	7.7	80	0.39	0.39		
		平均	8.3	65	0.36	0.36		
	順 45°	1	9.0	200	0.18	0.162		
		2	9.0	240	0.21	0.189		
		平均	9.0	220	0.20	0.176		
	逆 45°	1	8.7	190	0.39	0.351		
2		8.1	210	0.36	0.324			
平均		8.4	200	0.38	0.338			
か ば 合 板 圓 筒	//	1	7.5	120	0.26	0.208	支 0.323 固 0.355	0.194 0.213
		2	8.0	90	0.29	0.232		
		3	7.8	80	0.24	0.192		
		4	7.7	100	0.23	0.184		
		平均	7.7	100	0.25	0.204		
	⊥	1	7.7	120	0.73	0.73	支 0.833 固 0.911	0.500 0.547
		2	8.0	120	0.71	0.71		
		平均	7.9	120	0.72	0.72		
	順 45°	1	8.0	330	0.50	0.450		
		2	8.1	260	0.43	0.387		
		平均	8.0	320	0.47	0.419		
	逆 45°	1	7.5	240	0.48	0.702		

(支、固は夫々両端支持、両端固定の意味)

のものであつて、合板の曲げ試験から平均曲げ弾性率 E_{1b} , E_{2b} を求めているが同じ合板について引張試験が行つてないので引張剛性 α_1, α_2 に必要な平面内力に対する弾性率 E_{1t} , E_{2t} が出ていない。よつてここでは井上の別の報告⁽⁶⁾から、この値を取つて次の如くであるとする。

	引張 壓縮 弾性率		曲げ 弾性率 kg/mm ²	
	E_{1t}	E_{2t}	E_{1b}	E_{2b}
しな合板	600	500	731	118
かば合板	1100	550	1093	159

ここで 1, 2 は合板の表面の繊維方向及びそれと直角の方向を表す指標である。しな合板で $E_{1t} \approx E_{2t}$ となつてゐるのは中板が相當に厚いことを意味している。尙精しくはポアソン比が要るがその積は $\nu_1 \nu_2 < 1$ であるから、ここではその影響を省略する。実験でもそれは求めていない。

表中の振りによる破壊時の剪断應力 τ_B としては、破壊振りモーメント M_t より Bredt の公式 $\tau_B = 2 M_t / (\pi d^2 t)$ によつて計算した値を示してある。本実験に於ては挫屈時の振りモーメントは //, \perp 及び 45° 張りのものについて夫々破壊モーメントの平均 80, 100, 及び 90% に出ている事實からここでは挫屈時の剪断應力 τ_{cr} の実験値として

$$\tau_{cr}(//) = 0.80 \tau_B(//), \quad \tau_{cr}(\perp) = \tau_B(\perp), \quad \tau_{cr}(45^\circ \text{張}) = 0.90 \tau_B(45^\circ \text{張})$$

を取つた。

又表中の G は剪断弾性係数であつて、何れも Bredt の式 $G = M_t / (2 \pi r^3 t \theta)$, (θ = 単位長さの換れ角) より求めたもので //, \perp のもの、順逆 45° 張外板のものもすべて本式より計算した値である。// と \perp のものの G は理論的には一致すべきであるが、これらの資料から試験片の精度を知ることができる。

本表より (57) 式の 60% をとつた理論値はしな合板圓筒にはよく一致する。かば合板圓筒では // のものは良好であるが \perp のものはよく一致せず実験値は元々の理論値の 87% に出ている。

以上によつて直交異方性圓筒についても、等方性圓筒に於けると同じ程度の懸隔が見られる。懸隔の理由は前述の他、直交異方性圓筒時に合板圓筒では、一樣な直交異方性を得ることが六ヶしく従つて理論との相違も更に大きくなるのが豫想されたが以上の比較では実験値は平均 60% に出で等方性圓筒の場合にくらべて大差がない。

6. 結 論

以上直交異方性圓筒の壓縮曲げ及び振りによる挫屈荷重について研究し壓縮挫屈荷重 (21) 式、曲げ挫屈モーメント (36)、それによる最大内力 (37)、振り挫屈荷重 (57) (58) 式を何れも一般表現式として導くことができた。

以上の解析は對稱中央面をもつ外板の場合を取扱つたものであるが對稱中央面をもたない場合でも、その非對稱性が甚だしくない限り、以上の結果を用いて差支えない。例えば内側だけに縦横に密に補強した張殻圓筒では“外板”はその面に對して非對稱構造をなし對稱中央面をもたないが近似的に上の結果を適用することができよう。

実験との比較は壓縮挫屈の場合には r が小さい範圍で特に大きい懸隔を示すがこれは有限變位理論によつて説明できると思う。この問題については追つて發表の豫定である。曲げ及び振りの場合についても可成りの懸隔がある。曲げの場合に、扁平化による壓潰挫屈の起る前に、壓縮側に局部挫屈を起す可能性は薄肉外板の場合に濃厚であり事實壓潰挫屈形式よりも實際には局部挫屈形式が多い。これは將來に残された問題である。

以上は一般表現式として導いた點に重點があり、實用には充分と思われる。(以上) 昭和 22 年 9 月 28 日

文 獻

- (1) M. Yamana, On the Elastic Stability of Aeroplane Structures. Jour, Fac. Engng. Tokyo Imp. Univ. Vol. XX, No. 8, 1933.
- (2) D. D. Dschou, Die Druckfestigkeit versteifter zylindrischer Schalen, Luftfahrtforschung. Bd 12, 8 (1935). S. 223-234.
- (3) O. S. Heck, Über die Stabilität orthotroper elliptischer Zylinderschalen bei reiner Biegu-

- ng. Luftfahrtforschung, Bd. 14, 3 (1937). S. 137-147.
- (4) L. H. Donnell, Stability of Thin-walled Tubes under Torsion. N. A. C. A. Tech. Rep. No. 479 (1933).
- (5) 井上眞六氏他, 合板圓筒の強さに就て, 日本航空學會誌 9 卷 91 號 (昭 17.11)
- (6) 井上眞六氏他, 合板の壓縮強さに就て, 日本航空學會誌 9 卷 89 號 (昭 17.9)
- (7) 林 毅, 合板圓筒の捩り挫屈, (昭 19.2.14) 積層木材研究會に發表, (昭 19.6.20) 日本航空學會講演會に發表。
- (8) 林 毅, 木製飛行機構造に於ける挫屈理論, 日本航空學會機體專門講座擔當發表 (昭 19.11.21)
- (9) 林 毅, 直交異方性圓筒の曲げ挫屈, “木製飛行機計畫參考資料書” に掲載發表 (昭 20.3)
- (10) Th. v. Kármán & H.S. Tsien, The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression, Jour. Aero. Sci. Vol. 8. No. 8 (1941-6). pp. 303-312.
- (11) R. v. Southwell & S. W. Skan, On the Stability under Shearing Forces of a Flat Elastic Strip, Proc. Roy. Soc. A. 105 (1924) pp. 582-607.