書　評　　目　次

Econometrics

Fumio Hayashi, 2000
Princeton University Press,
Princeton, NJ, USA

大阪大学大学院経済学研究科　本多佑三

1. 特　　徴

本書は大学院生・研究者向けの待望の教科書であり，教科書としていくつかの優れた特徴をもっている．まず，第一に，計量経済学分野には L. Hansen (1982, Econometrica, Vol. 50) の提案した Generalized Method of Moments (本稿では GMM と呼ぶが，日本語では「一般化モーメント法」とでも呼べばよいと考える) という手法があるが，この GMM を利用して，計量経済学におけるさまざまな問題を包括的に説明している．ここに本書の高いオリジナリティーがある．この点は本書を評する上でも重要と考えられるし，また，読者の中には計量経済学以外を専門にしている人も多いと考えられるので，この第一の点については，後で再び詳しく説明することにしよう．

第二の特徴は，議論がよく整理されている点である．他の同レベルの教科書と比べると，本書のまとまりのよさは際立っている．しかも，議論は厳密に展開されており，また，パネルデータ分析，時系列分析などについても，ごく最近の議論までカバーされている．

第三に，各章の終わりに経済学の実際の推定・検定の例が挙げられている．これらの応用例は，(a) 電力供給における規模の経済，教育投資からの報酬，相互関連のある投入要素需要などのミクロ経済学，(b) 合理的期待形成，経済成長率の国際比較，貨幣需要関数の推定といったマクロ・金融経済学，(c) 購買力平価説，最適予測統計量としての先物為替レートなどの国際金融における諸問題を含む．いずれも経済学の各分野における本質的な問題を扱っており，経済学の本流を歩んできた著者の力量を反映したものとなっている．

第四に，議論が厳密に展開されているので，本書は計量経済学の方法論への橋渡しとなると同時に，応用計量経済学に対してはしっかりとした理論的バックグラウンドを提供している．

第五に，R. Hogg and A. Craig (Introduction to Mathematical Statistics, 5th Edition, 1995, Prentice Hall) 程度の確率および数理統計学の知識があれば読めるので，大学院1年生の後期4単位のテキストとして最適，また，研究者のレファレンスにも利用できよう．本書は以上のような特徴をもった，わかりやすい教科書である．しかし，議論は厳密に展開されているので，レベルはたとえば W. Greene (Econometric Analysis, 2000, 4th Edition, Prentice Hall) よりは少し高い．

2. GMM (一般化モーメント法)

本書の最も優れた点は，GMM と呼ばれる手法を通じて，計量経済学分野の大きな部分を説明している点である．このような説明の仕方は，これまでにもアメリカの大学院の教室ではなされてきたかもしれないが，少なくとも評者の知る限り，書物としては本書が最初の試みであり，この点に本書の高いオリジナリティがある．では，GMM とは何か．GMM はモーメント法 (Method of Moments) を一般化した推定方法であるので，モーメント法をまず例を用いて説明しよう．

2.1 モーメント法

たとえば T 個の観察値 (Y_1, Y_2, …, Y_T) が与えられたとして，この観察値は t 分布から生まれた無作為標本であることが知られているとする．この標本の実現値を利用して，t 分布にしたがう確率変数 Y_t の自由度 m を推測するという問題を考える．

ひとつの有力な推定方法は，自由度 m の t 分布にしたがうという情報を利用して，T 個の標本から対数尤度を書き，それを m について最大化するという最尤法 (Maximum Likelihood) である．最尤法は

この問題については有力な推定方法であるが，どの問題についてもいつも分布を特定できるとは限らず，分布が特定できない場合には用いることはできない．

分布がわからなくても推定できる手法で，最尤法とならんで昔から用いられてきた推定方法にモーメント法がある．t 分布は $m>2$ の時，期待値がゼロで，分散が $m/(m-2)$ であることが知られている．この情報を利用して自由度 m を推定するのがモーメント法である．

Y_t の期待値はゼロなので，2次のモーメント $E[Y_t^2]$ は Y_t の分散を表す．既述のように，自由度 m の t 分布をもつ確率変数の分散は $m/(m-2)$ であるので，

$$E[Y_t^2]=m/(m-2) \tag{1}$$

が成り立つ．
この母集団の分散に対応する標本分散は，

$$\hat{\mu}_2=\sum_{t=1}^{T} Y_t^2/T \tag{2}$$

であり，大数の法則により，(2)式は母集団の分散 $E[Y_t^2]$ に確率収束する．そこで，左辺の母集団の分散を標本の分散に置き換えた式，

$$\hat{\mu}_2=m^*/(m^*-2) \tag{3}$$

を m^* について解いた値，

$$m^*=2\hat{\mu}_2/(\hat{\mu}_2-1) \tag{4}$$

を自由度 m の推定値とするのが，モーメント法である．

2.2 GMMの考え方

t 分布にしたがう確率変数の密度関数は左右対称なので，3次のモーメントはゼロである．4次のモーメントは，

$$\mu_4=E[Y_t^4]=3m^2/(m-2)(m-4)$$
$$(m>4 \text{ を仮定している})$$

であることが知られている．そこで，4次の標本モーメントを，

$$\hat{\mu}_4=\sum_{t=1}^{T} Y_t^4/T \tag{5}$$

と定義して，

$$\hat{\mu}_4=3m^2/(m-2)(m-4) \tag{6}$$

を m について解き，m の推定値 m^{**} を求めることができる．ここで得られる m の推定値 m^{**} が，2次のモーメントを利用して得られた推定値 m^* に等しくなる保証は全くない．

つまり，連立方程式(3)および(6)を同時に満たす m は一般的には存在しない．方程式が2本あるのに対し，未知数は1つなので過剰決定になっているのである．

そこで，(3)および(6)式を厳密に満足させることはできないが，(3)および(6)式をできるかぎり満足させるような m を選ぶことを考える．即ち，g を，

$$g=\begin{bmatrix} \hat{\mu}_2-m/(m-2) \\ \hat{\mu}_4-3m^2/(m-2)(m-4) \end{bmatrix} \tag{7}$$

と定義し，また，W をなんらかの固定された (2×2) の重みの行列（weight matrix）と定義し，

$$Q=g'Wg \tag{8}$$

を最小にするような m を求める．(8)式を最小にする m は，$g=0$ を満足することはできないが，g をできるだけ小さくさせるような m である．こうした推定量をGMM推定量と呼ぶ．以上の例はHamilton (1994, Time Series Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA) による．

3. GMMの回帰モデルへの適用

回帰モデル

$$y_t=x_t'b+u_t \quad (t=1, 2, \ldots, T) \tag{9}$$

において，x_t' は $(1\times k)$ の確率変数を，b は $(k\times1)$ の係数パラメータを，u_t は $(T\times1)$ の誤差項をそれぞれ表す．ただし，通常の仮定と異なり，確率変数 x_t' は誤差項 u_t と強い相関があるものとする．即ち，

$$E[x_t(y_t-x_t'b)]\neq0 \quad (t=1, 2, \ldots, T) \tag{10}$$

である．しかし，

$$E[z_t(y_t-x_t'b)]\neq0 \quad (t=1, 2, \ldots, T) \tag{11}$$

が成り立つような変数 z_t があることも知られているとする．このような設定が計量経済学では多くある．ここで，z_t は $(r\times1)$ のベクトルで，$r>k$ とする．

このような状況において，係数パラメータ b の一致推定量を求め，また，係数パラメータについて検定したい．どのように統計量を求めればよいか．

この問題にGMMを適用すると，次のようになる．まず第一ステップとして，(11)式の左辺に対応する標本平均を求めると，

$$\sum_{t=1}^{T} z_t(y_t-x_t'b)/T \tag{12}$$

となる．(12)式は（$r\times 1$）のベクトルであり，未知のパラメータ b の次元は（$k\times 1$）であり，$r>k$ と仮定されているので，(12)式をゼロと置くと過剰決定となる．

第二ステップとして，誤差項 u_t（$t=1, 2,\ldots, T$）の分散・共分散行列を Σ で表し，

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1T}\\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \sigma_{T1} & \cdots & \sigma_{TT}\end{bmatrix} \tag{13}$$

は，当面，既値の数字であるとする．(12)式で求めた標本平均の漸近分布の分散・共分散行列を計算すると，

$$p\lim(Z'\Sigma Z)/T^2$$

となる．ただし，Z' は（$r\times T$）の行列で，$Z'=[z_1, z_2,\ldots, z_T]$ と定義している．

第三ステップとして，（9）式の係数ベクトル b の GMM 推定量は，

$$Q=\left[\sum_{t=1}^{T}z_t(y_t-x_t'b)/T\right]'(Z'\Sigma Z/T^2)^{-1}\cdot\left[\sum_{s=1}^{T}z_s(y_s-x_s'b)/T\right] \tag{14}$$

を最小にする b として求めることができる．(14)式をbについて偏微分し，その結果をゼロと置いて，b について解くと，

$$\hat{b}=[X'Z(Z'\Sigma Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'\Sigma Z)^{-1}Z'y \tag{15}$$

を得る．ここで，X および y は，それぞれ（$T\times k$）および（$T\times 1$）の行列で，$X'=[x_1, x_2,\ldots, x_T]$，$y'=[y_1, y_2,\ldots, y_T]$ と定義されている．

このようにして得られた GMM 推定量には，大標本のもとで多くの望ましい性質（一致性，漸近正規性など）があることが知られているので，推定や検定が可能となる．また，(15)式は，計量経済学で用いられる多くの推定量を含む．たとえば，(13)式について，

$$\Sigma=\sigma^2 I_T \tag{16}$$

と仮定すれば，(15)式は同時方程式モデルにおける2段階最小2乗推定量となる．ただし，I_T および σ^2 は，T 次元の単位行列およびスカラーの未知のパラメータをそれぞれ表す．さらに，

$$W=Z(Z'\Sigma Z)^{-1}Z'X \tag{17}$$

と定義すれば(15)式は，操作変数推定量(Instrumental Variable Estimator）と解釈することもできる．また，方程式を複数にした方程式体系に拡張することも，比較的容易にできる．したがって，計量経済学に登場する多くの推定量（たとえば同時方程式におけるさまざまな推定量，SUR (Seemingly Unrelated Regression)，操作変数推定量など）を特殊な場合として含むことになる．それは，ちょうど最尤法が，幅広い問題に適用できるのに似ている．

計量経済学で扱われてきた多くの問題を，GMM の視点から明快に整理した点が本書の最大の特徴であろう．本書は，計量経済学とは何か，あるいは，計量経済学で現在何が問題となっているのかを知る上で，現時点における最高の教科書である．

Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series (Springer series in statistics)

Masanobu Taniguchi and Yoshihide Kakizawa
Springer 2000, 661 頁

東北大学大学院経済学研究科　細 谷 雄 三

本書は，離散時間定常モデル，非定常モデルの大標本推定・検定，一次及び高次漸近理論，拡散過程モデルの統計的漸近理論，スペクトル判別分析，微分幾何の観点からの漸近理論，大偏差の視点から見た漸近的有効性など広範囲に及ぶテーマを扱った時系列漸近理論に関する大著である．ちなみに本書の構成を紹介すると：1章 確率過程の基本，2章 確率過程の局所漸近正規性，3章 確率過程推定•検定の漸近理論，4章 確率過程の高次漸近理論，5章 長期記憶過程の漸近理論，6章 スペクトル汎関数にもとづく統計的解析，7章 定常時系列の判別分析，8章 大偏差理論と確率過程の鞍点近似，となっている．

ワードプロセッサーによって，論文をまとめて本の形に編集することが容易になっている現在でも，本書が驚くほどの労力を費やした，水準の高い大作であることは間違いない．本書の随所に見られる，著者たちの解析能力には，眼をみはらせるものがある．時系列漸近理論に関心のある読者は，本書のなかに，自分で論文を書く際のさまざまな有用なヒントやテクニックを見つけるであろう．評者がこの短文で取り上げる論点は，個々の数式導出についての技術的側面ではなく，著作としての統一性の問題と本書が展開している漸近理論の時系列解析における位置付けの問題である．この意味で，この書評はあ