

会長就任講演

## 経済における時系列分析：概観と展望\*

山 本 拓†

### Time Series Analysis in Economics: A Brief Survey and Prospect

Taku Yamamoto

本講演では、私は経済分析における時系列分析についての概観と展望を行う。具体的には以下のトピックを扱う。定常 VAR モデルと因果性の問題、合理的期待仮説と時系列分析の関係、非定常な経済時系列の取り扱い、共和分モデルと関連の話題、経済における時系列分析についての展望。そして最後に、日本統計学会の現状ならびにこれからについての考えを述べる。

In this lecture, I give a brief account of time series analysis used in economic analysis. In particular, the following topics are covered: Stationary VAR model and the concept of causality, the rational expectation hypothesis and time series analysis, non-stationary economic time series, cointegration models and related issues, and prospect for the future development of economic time series analysis. Finally, I give a few comments on the present and the future status of the Japan Statistical Society.

*Key Words and Phrases:* 経済時系列の分析, VAR モデル, 単位根問題, 共和分モデル, 日本統計学会の活動

#### 1. はじめに

本講演では、私が長年携わってきた経済分析における時系列分析についての概観と展望を行う。これは英語では *Applied Time Series Econometrics* と呼ばれる分野である。我が国には、時系列分析の優れた理論家は大勢おられるが、本講演では経済分析への応用において時系列分析がどのような使われ方をしているか、あるいは計量経済学者はどのような観点で時系列分析を使おうとしているかの紹介を目的とするものである。

本格的に時系列分析を経済データに適用したのものとして、Granger=Hatanaka (1964) をあげることができる。しかし、同書はスペクトル解析を扱っており、それは多量のデータを必要とするため、必ずしも経済データの分析には適しておらず、それほど広まることにはならなかった。60年代は、伝統的な計量経済モデルの全盛期であり、モデルのサイズは拡大し、1000本の式を超えるモデルも誕生した。しかしそれらのケインズ型のモデルは、60年代の後半からの急速なインフレを説明することはできず、最終的には1973年に生じた石油ショックによる

\* 本稿は、2005年度の統計関連学会連合大会（広島、2005年9月）における日本統計学会会長就任講演を加筆・修正したものである。

† 一橋大学大学院経済学研究科（〒186-0004 東京都国立市中2-1）

大幅な経済構造の変化には対処できなかった。一方、Box=Jenkins (1970) の提唱した1変量ARIMAモデルのマニュアル化された作成手順に基づく予測の実用性は、大型計量経済モデルより頑健な予測ができ得るということで、時系列分析が経済学者の関心を惹くこととなった。本格的に時系列モデルが注目を浴びるのは、多変量時系列についてのGranger (1969) の因果性の概念がSims (1972) によって米国経済の分析に適用されてからである。それでも70年代は、計量モデル派と時系列モデル派が敵対関係のように捉えられることも多かった。これらの議論については、Sims (1980), 日本銀行特別研究室 (1981) 等を参照されたい。しかし、現在では両者は補完的なものと考えられ、時系列分析は計量経済学の主要な柱の一つとなっている。

経済分析への応用においては、通常の時系列モデルがそのまま使われる場合もあるが、モデルを経済理論に沿う形になるように制約を加えるという作業が加えられる場合もある。後者の場合には、経済分析での応用の特徴が顕著になる。本講演では、その中でもマクロ経済分析への応用との関わりについて、基本的な部分を歴史的に概観する。時間/紙数の関係で、基本的な考え方について紹介し、その後の最近までの発展等についての細かい議論は省略し、文献を紹介するにとどめる。

本講演の主たる内容は、以下の通りである。第2節では、経済分析への応用で最も広く用いられている定常VARモデルと因果関係の分析について述べる。第3節では、時系列分析が重要な役割を演じる合理的期待仮説と時系列分析の関連について述べる。第4節では、80年代以降重要な話題となっている単位根非定常時系列モデルの問題について考える。第5節では多変量の経済時系列モデルとして重要な、共和分モデルについて述べる。第6節では、経済分析における時系列分析についての展望を述べる。最後に第7節では、日本統計学会の現状ならびに今後の活動について、私の見解を述べる。

## 2. 定常VARモデルと因果関係

本節では、定常時系列モデルの標準的なモデルであるベクトル自己回帰モデルと、その代表的な応用である因果関係の検定の問題を概観する。

### 2.1 定常VARモデル

#### (a) ベクトル自己回帰モデル

以下のような  $m$  変量の  $p$  次のベクトル自己回帰モデル (vector autoregressive model, VAR(p) モデルと略す) を考える。

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t, \quad (1)$$

ここで、 $y_t = [y_{1t}, \dots, y_{mt}]'$  は観測値ベクトル、 $u_t = [u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{mt}]'$  は攪乱項で、 $u_t$  は *i. i. d.*  $(0, \Sigma_u)$  で  $\Sigma_u = E(u_t u_t')$  であるとする。  $A_k = [A_{k,ij}] (k=1, 2, \dots, p)$  は係数パラメータ一行列である。以下の特性方程式の根がすべて絶対値で1より大きいとき、確率過程  $\{y_t\}$  は定常性を満たす。

$$\det(I_m - A_1 z - \cdots - A_p z^p) = 0$$

本節と次節では、定常性を満たす時系列のみを対象とする。

### 2.2 VARモデルの推定と予測

#### (a) 推定

係数パラメータの推定は、各式の最小2乗推定 (OLS) によって漸近的に有効な推定量が得られることが知られている。その推定量は漸近的に正規分布に従うことが知られている。従って、係数パラメータの制約の検定は、きわめて簡単に行うことができる。たとえば、

Hamilton (1994, Ch. 11) を参照されたい。

(b) 予測

予測は、以下のような companion form に基づいて考える。

$$Y_t = \bar{A} Y_{t-1} + \Xi_t \quad (2)$$

ここで、 $Y_t' = [y_t', y_{t-1}', \dots, y_{t-p+1}']'$ ,  $\Xi_t = [u_t', 0, \dots, 0]'$  として

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$t$  期までのすべての情報の下での  $h$  期先の  $y_{t+h}$  の線形最適予測は以下で与えられる。

$$y_{t+h|t} = M' \bar{A}^h Y_t \quad (4)$$

ここで、 $M' = [I_m, 0, \dots, 0]$  である。

次に、推定されたパラメーターを用いて予測を行う時の信頼区間をどう評価するか、という問題を考える。これは後に紹介するインパルス応答関数の信頼区間導出の基礎となるものである。漸近理論に基づく導出は、私が研究者として最初に取り組んだトピックで、AR モデルについては Yamamoto (1976), Fuller=Hasza (1981), VAR モデルについては Baillie (1979), VARMA (vector autoregressive moving average) モデルについては Yamamoto (1981) に与えられている。攪乱項に自己相関を持つ計量経済モデルについては Yamamoto (1979), 動学的計量モデルについては Yamamoto (1980) に与えられている。

定式化の誤りを持つ AR モデルからの予測の評価は、Tanaka=Maekawa (1984), Kunitomo=Yamamoto (1985) に与えられている。また最近、定式化の誤りを持つ VAR モデルからの予測については、Schorfheide (2005) に与えられている。

### 2.3 因果関係

#### (a) Granger の因果関係

時系列分析の経済データへの応用で、その初期段階において重要な役割を演じたのは、Granger (1969) により提唱された因果関係の検定法である。Sims (1972) がこの手法をマクロ経済データの分析に適用し、その後広く用いられるようになった。その定義は以下で与えられる。

Granger の因果関係 (定義) :  $y_{1,t+h|\Omega_t}$  を、 $t$  期までのすべての情報 (それを  $\Omega_t$  と表す) を用いた  $h$  期先の  $y_{1,t+h}$  の最適予測とする。以下が成立する時、Granger の意味で  $y_2$  から  $y_1$  への因果関係がないと言う。

$$y_{1,t+h|\Omega_t} = y_{1,t+h|\Omega_t \setminus y_{2s} | s \leq t}$$

ここで、 $X \setminus W$  は集合  $X$  から集合  $W$  を除いた残りの集合を表す。

Granger の因果関係は、一般に 1 期先の最適予測を対象とする。すなわち、 $h=1$  である。簡単な例として 2 変量 VAR( $p$ ) モデルで、Granger の意味で  $z$  から  $x$  への因果関係がないこと

は、モデルが以下のように表されることを意味する。

$$\begin{aligned}x_t &= a_1 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p} + u_{1t} \\z_t &= c_1 x_{t-1} + \dots + c_p x_{t-p} + d_1 z_{t-1} + \dots + d_p z_{t-p} + u_{2t}\end{aligned}$$

Granger の因果関係は一般の  $m$  変量モデルに対して、単純な拡張が可能である。検定は係数パラメーターの 0 制約となり、Wald 検定統計量は、漸近的にカイ 2 乗分布に従う。ゆえに検定はきわめて簡単におこなうことができる。

Granger の因果関係の概念は、その後いくつかの方向で拡張が行われている。例えば、2 期先以上の最適予測を対象としたものに Dufour et al. (2003) がある。また VAR モデルのラグの長さに関して  $p = \infty$  とした場合についての Granger の因果関係の検定は Leutkepohl = Poskitt (1996) に述べられている。また長期依存を含む共分散定常モデルに関する因果関係は Hidalgo (2000, 2005) で議論されている。共和分を含む非定常な時系列についての Granger の因果関係の検定については、5 節を参照されたい。

## 2.4 インパルス応答関数と分散分解

### (a) VMA 表現

Granger の因果関係といわば表裏一体の関係にあるインパルス応答関数による分析は、経済分析において極めて重要な役割を演じ、現在でも広く用いられている。それは、以下で述べる構造 VAR 表現によって、経済理論により即した分析が可能なためである。定常な VAR(p) モデルは、無限次のベクトル移動平均モデル (vector moving average model, VMA( $\infty$ ) モデル) として表現できる。

$$Y_t = \Psi_0 u_t + \Psi_1 u_{t-1} + \Psi_2 u_{t-2} + \dots + \Psi_k u_{t-k} + \dots \quad (5)$$

ここで、 $\Psi_k = [\psi_{k,ij}]$  は  $m$  次元の正方係数行列であり、以下の漸化式から求められる。

$$\Psi_s = \sum_{j=1}^s \Psi_{s-j} A_j \quad s=1, 2, \dots$$

ただし、 $\Psi_0 = I_m$  で  $A_j = 0$  ( $j > p$ )。

### (b) インパルス応答関数および構造 VAR 分析

上記の VMA( $\infty$ ) 表現を利用して、インパルス応答関数 (impulse response function) は以下で求められる。

$$\psi_{k,ij} \quad (k=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

これは、 $u_j$  が 1 単位変化したとき、 $y_i$  がその結果として、どのように変化していくかを時間を追って捉えるものである。実際のインパルス応答関数の分析においては、VAR モデルに“構造的意味付け”を与えて、構造 VAR 分析が行われる。それは次のような考えに基づく。一般に VAR モデルの攪乱項ベクトルは瞬時的に無相関ではない (すなわち  $\Sigma$  は対角行列ではない)。すると  $u_j$  は  $y_j$  の固有の原因とは見なしにくい。そこで、対角化された分散共分散行列を持つように、攪乱項を変換する。 $\Sigma$  を対角化することのできる行列を  $T$  とすると、

$$u_t^+ = T u_t \quad (6)$$

は、 $E[u_t^+ u_t^{+'}] = T \Sigma T' = \Sigma^+ = \text{diag}\{\sigma_{ii}^+\}$  となる。このとき、 $u_{ji}^+$  は  $y_j$  の固有の原因と見なされる。この変換行列  $T$  を用いて、VMA 表現を以下のように書き換える。

$$y_t = \Psi_0 T^{-1} T u_t + \Psi_1 T^{-1} T u_{t-1} + \Psi_2 T^{-1} T u_{t-2} + \dots \quad (7)$$

$$= \Psi_0^+ u_t^+ + \Psi_1^+ u_{t-1}^+ + \dots + \Psi_k^+ u_{t-k}^+ - \dots \quad (8)$$

ここで、 $\Psi_k^+ = [\psi_{k,ij}^+] = \Psi_k T^{-1}$  である。

このように、対角化された攪乱項を持つように加工された VAR モデルあるいは VMA モデルによる分析は“構造 VAR (structural VAR) 分析”と呼ばれる。構造 VAR モデルに基づく  $u_j^+$  から  $y_j$  へのインパルス応答関数は、(8) に基づいて以下で与えられる。

$$\psi_{k,ij}^+ \quad (k=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

変換行列  $T$  の識別のためには、 $m(m-1)/2$  個の制約をおく必要がある。具体的な  $T$  としては、Sims (1980) による  $T$  を下三角行列とする方法が最初の試みである。体系内の変数の順番は、研究者が先験的に想定した同時点間の因果序列に応じて決める。ただこの場合は、変数の順番によって結果が異なり、それが弱点となっている。

変換行列をより一般化したものとして、 $T$  の要素の統計的に有意なものを探す方法は、Swanson=Granger (1997) により提唱された。さらに Bernanke (1986) は  $T$  の構造（どこに  $m(m-1)/2$  個の制約をおくか）を経済理論からの先験的知識により決めることを提案した。現在は、この方法が最もよく用いられている。この方法は  $T u_t = u_t^+$  において、 $T = [t_{ij}]$  の対角成分はすべて 1 で、非対角要素のうち 0 とおく  $m(m-1)/2$  個は、経済理論に基づいて決めるものである。この方法のさらに一般化したものは、Amisano=Giannini (1997) に与えられている。

インパルス応答関数の信頼区間の導出は、伝統的には漸近理論により行われてきた。例えば、Leutkepohl (1990) 等を参照されたい。漸近理論による信頼区間は、小標本では必ずしも精度がよくないということが明らかとなり、最近では Bootstrap による導出が Killian (1999) 等により提案されている。また尤度に基づく考え方が、Sims=Zha (1999) により提案されている。この方法の応用例としては、Shioji (2000) を参照されたい。

### (c) 分散分解

$u_t$  の分散が対角行列になるように加工された VMA 表現 (8) に関して

$$\text{var}(y_{it}) = \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{k,ij}^+)^2 \sigma_{jj}^+ \right\}$$

のように、 $y_i$  の分散を  $m$  種類の無相関な影響に分解することが可能となる。そこで、 $RVC_{j \rightarrow i}$  (relative variance contribution: 相対的分散寄与率) は、以下のように定義される。

$$RVC_{j \rightarrow i} = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{k,ij}^+)^2 \sigma_{jj}^+ / \text{var}(y_{it}) \quad (9)$$

$RVC_{j \rightarrow i} = 0$  の時は、 $y_j$  から  $y_i$  への因果関係が全く無く、 $RVC_{j \rightarrow i}$  が 1 に近い時は、 $y_j$  から  $y_i$  への因果関係が強いと判断される。

## 2.5 まとめ

時系列モデルを用いた経済分析は、当初は従来の計量経済モデルの恣意的な先験的制約を排除したものと評価され、採用された。Granger の因果性の検定はそのような例である。しかし、インパルス応答関数は通常、構造 VAR モデルを用いて求められ、そこではやはり何らかの意味で恣意的なあるいは先験的な経済理論の情報を使っていることになり、完全に恣意性を排除したとは言えない。しかし、この構造 VAR による分析は現在でも広く用いられており、経済データ分析の方法として定着している。経済分析における VAR モデルについての最近の評価は、例えば Stock=Watson (2001) を参照されたい。

### 3. 合理的期待仮説と時系列分析

時系列モデルに基づく経済データの分析が、80年代以降広く用いられるようになった重要な理由の一つに、70年代以降の経済理論における合理的期待仮説の隆盛がある。それは以下で述べるように、合理的期待仮説を含む経済モデルは、その基礎に時系列モデルを前提とする必然性があるためである。

#### 3.1 合理的期待仮説と時系列モデル

##### (a) 経済学における合理的期待仮説

1970年代に入って、Lucas (1972), Barro (1974) 等によって(マクロ)合理的期待仮説が構築された。この仮説は、それまでの期待形成仮説の中心であった適応型期待仮説では、60年代後半からの超インフレを説明しきれない、という問題の解決策として生じてきた。マクロ経済分析における合理的期待仮説は、以下の2つの性質を満たすものとして与えられる。

合理的期待仮説 (rational expectation hypothesis) :

- (i) 期待は、変数の将来値についての条件付き期待値として与えられる。
- (ii) 個々の市場参加者が将来の変数に対して抱く主観的予測の確率分布は、市場のモデルから形成される(客観的)予測の確率分布と等しい。

変数の将来値について議論するには、変数に一定の生成過程を想定せざるをえない。決定的プロセスを想定することは制約が強すぎるので、経済データの生成過程として、通常は定常(場合によっては非定常)な確率過程を想定することになった。つまり、合理的期待仮説にとって時系列モデルは基本的な構成要素となった。以下では、合理的期待仮説を許容する簡単な時系列モデルの例を紹介する。

##### (b) 例：先物為替市場の効率性

今、 $y_{1t}$  を  $t$  期における直物為替レート、 $y_{2t}$  を  $t$  期において成約された  $h$  期先 ( $t+h$  期) に決裁される先物為替レートとする。ある条件の下に、先物為替市場が効率的 (efficient) であるとは、次の式が成立していることを意味する。

$$y_{2t} = E[y_{1,t+h} | \Omega_t]$$

ここで、 $E[y_{1,t+h} | \Omega_t]$  は  $t$  期迄の全ての情報に基づく  $y_{1,t+h}$  の合理的期待値である。ここで対象とする確率過程が VAR( $p$ ) モデル (1) または (4) に従っていると仮定する。すると、上式の右辺は以下のように書き換えられる。

$$E[y_{1,t+h} | \Omega_t] = e' \bar{A}^h Y_t$$

ここで、 $e = [1, 0, \dots, 0]'$  である。そこで推定された VAR モデルを用いて、右辺のモデルの係数パラメーターの非線型関数と  $y_{2t}$  が等しいか否かの検定 (Wald 検定) を行うことにより、市場の効率性のテストができる。このような応用例は、Baillie et al. (1983), Ito (1988), 竹内=山本 (1987) を参照されたい。他にも、利子率の期間構造の合理性の検定には、分散の境界の検定 (variance bounds test) と呼ばれる方法が良く知られている。

#### 3.2 合理的期待仮説モデルと GMM 推定

##### (a) GMM

より複雑なモデルにおける合理的期待仮説の実証分析には GMM (generalized method of

moments) が主たる推定方法として用いられる。合理的期待仮説を満たすモデルの攪乱項の構造は一般に複雑で、最尤法の適用が難しいことが、GMM が多用される理由だと思われる。そして GMM には、時系列分析が深く関わっている。以下ではその簡単な説明を行う。

GMM を行うための直交条件が、以下のように与えられたとする。

$$E\{\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{w}_t)\} = \mathbf{0} \quad (10)$$

(n×1)            (n×1)

ここで、 $\boldsymbol{\theta}_0$  は、真のパラメーターベクトル ( $q \times 1$ )、 $\mathbf{w}_t$  は、 $t$  期における定常な観測値ベクトル、 $\mathbf{y}_T = [\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_T]'$ 、 $\mathbf{h}(\cdot)$  は、 $t$  期における微分可能な  $n$  次元ベクトル関数 ( $n \geq q$ ) とする。上記の sample analog は、以下で与えられる。

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_T) \equiv (1/T) \sum_{t=1}^T \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}_t)$$

(n×1)                            (n×1)

GMM の適用には、以下のように  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_T)$  の分散共分散行列を求める必要がある。

$$\mathbf{S} = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{t=1}^T \sum_{v=-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{w}_t) [\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{w}_{t-v})]'\} \quad (11)$$

(n×n)                            (n×1)                            (1×n)

これより、GMM 推定量は

$$[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_T)]' \hat{\mathbf{S}}_T^{-1} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_T)]$$

(1×q)                            (q×q)                            (q×1)

を最小にする  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  として求められる。ここで、 $\hat{\mathbf{S}}_T$  は  $\mathbf{S}$  の一致推定量である。この  $\mathbf{S}$  の一致推定量を求める方法は、HAC (heteroscedasticity autoregressive consistent) 推定と呼ばれて、GMM 推定には欠かせないものである。この時  $\hat{\mathbf{S}}_T$  の推定のためには、 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}_t)$  についての定常性、エルゴード性などの時系列構造が前提となっている。

分散共分散行列  $\mathbf{S}$  の一致推定量を求める方法は、計量経済学の一つの重要なトピックとなっており、退化しない  $\hat{\mathbf{S}}_T$  を求める方法としては、Newey and West (1987) が有名である。その後、より有効な推定方法が各種提案されている。よく知られたものでは、Andrews (1991)、Hansen (1992)、Andrews=Monahan (1992) がある。最近では Kiefer=Vogelsang (2002) 等がある。なお HAC 推定は、GMM 推定ばかりでなく、4 節で言及される Phillips=Perron (1988) の単位根検定や、Kwiatkowski et al. (1992) の定常性の検定でも重要な役目を果たしている。

### 3.3 まとめ

マクロ経済理論で重要な役目を担ってきた合理的期待仮説は、2つの意味で時系列分析と関わっている。まず第一に、合理的期待を前提としてモデルを組み立てるためには、経済変数がある一定の構造をもった時系列、通常は定常時系列（非定常時系列）であると想定する必要がある。そして実際にある種の経済理論の検定には、簡単な時系列モデルが直接的に用いられる。第2に、一般的な合理的期待仮説モデルの推定は GMM によるが、そのためには直交条件の分散共分散行列の HAC 推定が必要となる。HAC 推定の精度の向上ための研究は、経済時系列分析の一つの重要なトピックとなっている。

## 4. 単位根非定常時系列モデル

1970年代後半に、Dickey=Fuller (1979) が時系列データにおける単位根の存在に関する実用性のある検定方法を提案した。1980年代に入って、経済データに単位根が存在するか否かの議論は、経済の実証分析における大きな話題となった。

#### 4.1 階差定常とトレンド定常

##### (a) モデル

単位根検定の基本的なモデルは、線形トレンドまわりのARモデルとして、以下のように表すことができる。

$$\begin{cases} y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \varepsilon_t & \text{線形トレンド} \\ \varepsilon_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \varepsilon_{t-i} + u_t & \text{AR}(p)\text{モデル} \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 $u_t$  は *i. i. d.*  $(0, \sigma^2)$  で  $\sigma^2 = E(u_t^2)$  である。 $\delta_0, \delta_1, \phi_i (i=1, 2, \dots, p)$  はパラメーターである。

固有方程式  $1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p = 0$  の根が全て単位根の外にある時、トレンド定常 (Trend Stationary) といわれ、 $I(0)$  系列とも呼ばれる。ここで、根の値が1より大きいものを“定常根”と呼ぶ。一方、 $1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p = 0$  の根の一つが1であり、他の根は単位円外にあるときは階差定常 (DS: Difference Stationary) といわれ、 $I(1)$  系列とも呼ばれる。ここで、根の値が1のものを“単位根”と呼ぶ。

確率過程が非定常となる原因は種々あり得るが、経済データの分析では非定常とは多くの場合、時系列に単位根が存在する場合を意味する。本講演でもその慣習を踏襲する。

##### (b) 経済時系列における単位根の意味

経済時系列が線形トレンドの周りの定常時系列過程であるか、あるいは線形トレンドの周りの非定常時系列 (すなわち単位根を持つ) 過程であるかは、経済学的にきわめて重要な意味がある。定常であれば、ショックの影響は一時的で、時と共に消えていくことになり、非定常 (単位根が存在) であれば、ショックの影響は持続的なものとなる。ショックが政策変化からもたらされるものと考え、政策の効果が一時的なものか、あるいは持続的なものかという大きな差をもたらす。あるいは経済の長期経路を考えると、定常であれば長期的に安定であり、非定常であれば長期的に不安定なものであり、大きな差をもたらす。

Nelson=Plosser (1982) の実証研究によって、米国経済の多くのマクロ経済のデータが非定常であることが示され、大きな波紋を呼んだ。その後、米国以外の多くの国で経済データの単位根の検定が行われた。日本経済については、例えば、Takeuchi (1989) を参照されたい。

##### (c) 長期要因と短期要因の分解

単位根を持つ時系列は、長期要因と短期要因に分解することができる。以下では Beveridge=Nelson (1981) による方法を紹介する。 $\Delta$  を階差オペレーターとし、 $\Delta y_t$  の MA( $\infty$ ) 表現をその出発点とする。

$$\Delta y_t = c(L) u_t \quad (13)$$

ここで、 $c(L) = c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + \dots$  ( $c_0 = 1$ )、 $L$  はラグ・オペレーターである。

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= c(1) u_t + [c(L) - c(1)] u_t \\ &= c(1) u_t + (1-L) c^*(L) u_t \end{aligned}$$

ここで、 $c(1) = c_0 + c_1 + c_2 + \dots$ 、 $c^*(L) = [c(L) - c(1)] / (1-L)$  である。ゆえに、レベルに関して表すと

$$y_t = c(1) \sum_{s=1}^t u_s + c^*(L) u_t \quad (14)$$

上記の右辺の第1項が長期要因、第2項が短期要因を表す。長期要因と短期要因の分解は経済分析にとって重要な課題である。状態空間表現モデルを用いても同様の分解が可能である。し



かしこれら2種の分解結果は必ずしも似ておらず、その比較や異なる理由の解釈が Morley et al. (2005) 等により行われている。

#### (c) 単位根がもたらす統計学的問題

統計学的には、単位根がもたらす問題（定常な時系列分析との違い）は様々あり、それを列挙すると以下の通りである。(i) OLS 推定量の漸近分布の非正規性、推定量の超一貫性、高次 AR モデルにおける多重共線性、(ii) 単位根の検定にまつわる特殊性（これは以下で触れる）、(iii) 定常な場合との予測の profile の違い、(iv) 見かけ上の回帰の問題、等である。これらについての丁寧な解説は、Hamilton (1994, Ch. 17) に与えられている。

### 4.2 単位根の検定とその拡張

ここでは、上記に述べた問題点の中で、(ii) の単位根の検定にまつわる問題を概観する。

#### (a) Dickey-Fuller 検定

ここでは、単位根検定の標準となっている Dickey=Fuller (1979) の検定を紹介する。上記の (12) を1つの式にまとめると、以下のように表せる。

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \rho y_{t-1} + \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t \quad (15)$$

ここで、 $\mu_0 = (1-\rho)\delta_0 + p\delta_1$ 、 $\mu_1 = (1-\rho)\delta_1$ 、 $\gamma_i = -\sum_{j=i+1}^p \phi_j$  ( $i=1, \dots, p-1$ ) である。特性方程式に単位根が存在すると、 $\rho \equiv \sum_{i=1}^p \phi_i = 1$  となることが容易に分かる。したがって、検定のための帰無仮説と対立仮説は以下のように表される。

$$H_0: \rho = 1 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \rho < 1 \quad (16)$$

この時、もし  $\rho = 1$  であれば、 $\mu_0 = \delta_1$ 、 $\mu_1 = 0$  となり、定数項はトレンドの傾き  $\delta_1$  を表し、 $t$  の係数は定義的に 0 となる。このように、単位根を含むモデルはそうでないモデルと係数パラメータの持つ意味が違ってくるところに、この検定の一つの特徴がある。

単位根の検定は、上式を最小2乗法で推定し、上記の仮説検定を行えばよい。漸近分布は正規分布にはならないので、独自の臨界値の表が必要である。また定数項の存在、トレンド項  $t$  の存在等によって臨界値が異なるところにも特徴がある。臨界値は Fuller (1996) に与えられている。

単位根検定の検定は、その後様々な方向で拡張・改善された。以下ではその一部を述べる。Phillips (1987) や Phillips=Perron (1988) は、AR モデルのラグの長さや攪乱項の分布についての制約をゆるめた。Hall (1994) は Dickey=Fuller のラグの長さの選択について general to specific の原理による方法を示した。Elliott et al. (1996) は Dickey=Fuller と GLS を組み合わせることで、より検出力の高い方法を示した。最近 Ng=Perron (2001) は、それにさらにラグの効率的選択を AIC 基準で行う方法を示した。

#### (b) 構造変化

単位根の検定に関しての重要な問題は、時系列に構造変化があった時に、どのように対処すべきか、という問題である。Perron (1989) が、トレンド定常時系列のトレンドに構造変化がある時には、単位根検定は誤って単位根の存在を示唆しがちである、という指摘を行った。これは構造変化がある時は、単位根検定の信頼性が失われることを示すものである。経済データには構造変化の存在が疑われるものが多いので、構造変化を前提とした上での単位根検定の方法の開発が、その後の重要な課題となった。主要な結果を紹介すると、構造変化点未知の下での単位根検定として Perron=Vogelsang (1992)、Zivot=Andrews (1992) などがある。一方、構造変化点既知の下での単位根検定として、Leybourne et al. (1998)、Lanne et al. (2001) 等がある。単位根の検定問題に限らず、構造変化の検定に関する問題は、90年代以降の計量経

経済学の重要な課題である。構造変化の取り扱い全般についての簡潔なサーベイは Hansen (2001) にある。

### (c) 定常性の検定

単位根の検定は、上で示したように、帰無仮説を単位根、対立仮説を定常根とするものである。したがってこの検定で単位根の存在が示唆されるということは、単位根の仮説が棄却できなかった、ということにすぎない。そこで帰無仮説と対立仮説を入れ替え、帰無仮説を定常根、対立仮説を単位根とする検定が Kwiatowski et al. (1992) により開発された。これは通常、定常性の検定と呼ばれており、単位根の検定と併用されることも多い。構造変化の下での定常性の検定は、Kurozumi (2002) 等に与えられている。

### 4.3 経済理論の検証

単位根の検定は、時系列が定常か非定常かを判断するのに用いられるばかりでなく、直接的に経済理論の検定にもなるという、興味深い例もある。ここではそのような例を2つ紹介する。

#### (a) 例1：購買力平価

購買力平価説 (purchasing power parity: PPP) は、経済仮説の中でもきわめて歴史のある重要な仮説である。それは一物一価の法則に基づき、長期的に為替レートと二国の物価水準の間には以下の関係があると考えられるものである。

$$S_t = P_t / P_t^*$$

ここで、 $P_t$  は  $t$  期における自国の物価水準、 $P_t^*$  は  $t$  期における外国の物価水準、そして  $S_t$  は  $t$  期における自国建ての為替レートである。これらの対数をとると

$$s_t - p_t + p_t^* = z_t \quad (17)$$

と表される。ここで、 $p_t$ 、 $p_t^*$ 、および  $s_t$  はそれぞれ  $P_t$ 、 $P_t^*$ 、および  $S_t$  の対数をとったものである。購買力平価は“長期的な均衡”の概念であり、 $z_t$  は各時点におけるこの関係からの短期的なずれ具合を表す変数である。多くの場合、 $p_t$ 、 $p_t^*$ 、および  $s_t$  は、それぞれ単位根を持つ非定常な時系列であることが確かめられている。長期的に購買力平価説が成立するのであれば、 $z_t$  は定常となるはずであり、もし逆に  $z_t$  に単位根が存在すれば、購買力平価説は成立しないことになる。

単位根の検定を用いた購買力平価の検証は、膨大な蓄積がある。購買力平価についての代表的なサーベイとしては、Froot and Rogoff (1995) がある。日本の為替レートについての実証分析については、例えば Ito (1997) がある。また、最近の各国の為替レートについての実証結果としては Lopes et al. (2005) 等がある。

#### (b) 例2：恒常所得仮説

ここでは、Hall (1978) のマクロ消費関数についての恒常所得仮説を説明する。今、消費者が、消費の流列  $C_t, C_{t+1}, \dots, C_T$  から得る効用が次のような割引和

$$V_t = u(C_t) + \delta u(C_{t+1}) + \dots + \delta^{T-t} u(C_T)$$

として与えられると考える。ここで、 $u(C_t)$  は消費  $C_t$  の時の効用であり、 $\delta$  は  $0 < \delta < 1$  なる割引率である。消費者が生涯の予算制約のもとで、上のような目的関数を最大化している時の必要条件を考える。もし消費の流列  $C_t, C_{t+1}, \dots, C_T$  が最適であるとする  $C_t$  を僅かに減らし  $C_{t+1}$  を僅かに増やしても  $V_t$  は殆ど変化しないはずである。すなわち、以下が成立する。

$$u'(C_t) = (1+r)\delta u'(C_{t+1})$$

ここで、 $r$  は市場利子率、 $u'(C_t)$  は  $C_t$  で評価した限界効用である。これは最適な消費流れが満たさなくてはならないオイラー方程式である。さらに  $t$  時点においては、 $C_{t+1}$  は予見できず不確実性があるとすれば、

$$u'(C_t) = E_t[(1+r)\delta u'(C_{t+1})]$$

と書き直されなくてはならない。ここで、 $E_t[X]$  は  $t$  時点で形成した  $X$  の合理的期待値である。効用関数  $u(C_t)$  を  $C_t$  の 2 次関数であると仮定すると、限界効用は 1 次関数となる。さらに  $(1+r)\delta=1$  を仮定すると、 $C_t = E_t[C_{t+1}]$  を得る。ゆえに、消費の流れは以下のモデルに従う。

$$C_{t+1} = C_t + e_{t+1} \quad (18)$$

ここで、 $e_{t+1}$  は系列相関のない、平均が 0、分散が一定の攪乱項である。このモデルは係数が 1 である 1 変量の AR モデル (ランダム・ウォーク・モデル) となっており、確率的消費関数 (stochastic consumption function) と呼ばれる。上のように、この場合にはかなり制約的な仮定を課しているが、マクロ経済を記述する理論モデルとして、単位根を持つ時系列モデルが導出される、という興味深い例となっている。

#### 4.4 ま と め

経済時系列における単位根の存在は、経済データの特性自体の把握のみならず、経済政策の評価などに大きな意味を持つ。従って、その検定は重要な意味がある。また特殊な場合には、単位根の検定が、直接的に経済理論の検証となる場合もある。なお現在の研究状況からいえば、単位根検定の統計的方法に関する研究は、構造変化や対立仮説の構造の一般化など極めて技術的で精緻化の時代に入っていると考えられる。

### 5. 共和分モデル

本節では、非定常な多変量の時系列で、近年非常に重要となった共和分モデルとそれに基づく分析について概観する。

#### 5.1 共和分とそのモデル表現

##### (a) 共和分とは

共和分 (cointegration) は Engle=Granger (1987) が提案した多変量時系列についての新しい考え方である。従来の方法では、非定常な  $I(1)$  のデータ・ベクトル  $y_t$  については、階差をとったデータ  $\Delta y_t$  に対して、以下のような VAR モデルを当てはめることが一般的であった。

$$\Delta y_t = A_1 \Delta y_{t-1} + \dots + A_p \Delta y_{t-p} + u_t,$$

しかしこのモデルにおいては、個々の変数は単位根を持ち、バラバラに発散していくことを前提としていることになる。したがって、上記のような階差 VAR モデルでは、レベル変数についての合理的期待形成を取り込むことはできない。この点については、例えば、Kunitomo=Yamamoto (1991) を参照されたい。

経済理論は長期の均衡状態を表現している仮説が多い。それは、個々のデータは発散したとしても、変数間の関係は安定していることを意味する。すなわち、個々の変数は単位根を含んでいるが、変数間の特定の線形結合は定常、という関係を意味する。この関係が共和分である。例として、前節でも取り上げた購買力平価の問題を再び考えよう。

##### (b) 例：購買力平価

前節で考えたモデルに、さらにそれぞれの国に貿易財と非貿易財が存在すると考えると、

(17) における  $p_t$  と  $p_t^*$  の係数は  $-1$  と  $+1$  に固定される必要はなく、共和分関係は以下のよう一般化される。

$$s_t - \beta_1 p_t + \beta_2 p_t^* = z_t \quad (19)$$

ここで、 $\beta_1, \beta_2$  はパラメーター、そして  $z_t$  は定常な時系列を表す。

経済学には、長期的に安定した関係（あるいは仮説）が数多く存在する。Kosobud=Klein (1961) はそれらを *great ratios of economics* と呼んでいる。例えば、利子率の期間構造、確率的消費関数、貨幣の中立性、フィッシャー効果などの実証分析には、共和分モデルは欠かせないと考えられる。

### (c) 共和分 VAR モデルの表現

VAR( $p$ ) モデルが、(1) で与えられたとする。ただし、今回は定常ではなく、各変数は  $I(1)$  で、変数間に共和分が存在すると考える。このとき、VAR モデルの両辺から  $y_{t-1}$  を引いて整理すると、幾つかの仮定の下に「Granger の表現定理」によって、VEC (vector error correction) モデルと呼ばれる表現を得る。

$$\Delta y_t = \alpha \beta' y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (20)$$

ここで、 $\alpha$  と  $\beta$  はそれぞれ  $m \times r$  の行列 ( $r$ : 共和分のランク,  $0 < r < m$ )、 $\Gamma_j = -\sum_{i=j+1}^p A_i$  ( $j=1, \dots, p-1$ ) である。この時、 $y_t$  のそれぞれの要素は単位根を持ち、線形結合  $\beta' y_t$  は定常となる。この時、 $\beta$  は“共和分行列”と呼ばれる。このように、VEC 表現では共和分関係が明示的に示されている。

### (d) VMA (vector moving average) 表現

階差をとった変数  $\Delta y_t$  は定常なので、それは一般に VMA( $\infty$ ) モデルとして、以下で与えられる。

$$\Delta y_t = C(L) u_t \quad (21)$$

ここで、 $C(L) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i L^i$  である。前節でも取り上げた Beveridge=Nelson 分解の適用により、以下のように分解できる。

$$\Delta y_t = C u_t + \Delta C^*(L) u_t$$

ここで、 $C = [c_{ij}] = C(1)$ 、 $C^*(L) = (C(L) - C)/(1-L)$  であり、 $C^*(L) u_t$  は定常な時系列過程である。これを元のレベル変数で表現すると

$$y_t = C \sum_{i=1}^t u_i + C^*(L) u_t + Y_0 - s_0 \quad (22)$$

$$\text{長期要因} \quad \text{短期要因} \quad \text{初期値} \quad (23)$$

ここで、 $C$  は“長期インパクト行列”と呼ばれる。共和分が存在する時、 $C$  は退化することが知られている。すなわち、 $\beta' C = 0$  が常に成立する。

## 5.2 共和分モデルの推定について

### (a) 共和分モデルの推定

共和分モデルの推定に当たっては、まず共和分のランク（独立な共和分ベクトルの数）を求めることが重要である。2変数モデルについては、Engle and Granger (1987) を参照されたい。一方、多変数モデル ( $m \geq 3$ ) ( $0 < r < m$ ) に関しては、VEC 表現に関しての Johansen の方法 (1989, 1991) がよく知られている。これは攪乱項の正規性の仮定の下に、VEC モデルに

ついでに最尤法により、逐次的な検定により行う。ランクの検定は尤度関数の固有値に関して行われるが、その分布は標準的でなく、対象とするモデルにおける定数項の存在（およびその形態）、トレンド項の存在などにより異なる。それらの臨界値は Osterwald-Lenum (1992) に与えられている。共和分のランクが求められれば、他のパラメーターの推定は通常最尤法の適用で求めることができる。共和分行列  $\beta$  についての検定と推定は、Johansen=Juselius (1992), Johansen (1995), Pesaran=Shin (2002) などにより与えられている。

#### (b) 共和分ランク検定の一般化

共和分ランクの検定は、計量分析の主要なトピックとなり、様々な拡張が提案されている。攪乱項に正規性を仮定しない疑似最尤法は、Lucas (1997), Pesaran and Shin (2002) などに示されている。FM-VAR の拡張による接近は、Quintos (1998a) により検定統計量が  $\chi^2$  分布することが示されている。分散比検定による方法は Breitung (2002)、主成分分析による方法は Harris (1997), Snell (1999) 等々に示されている。

#### (c) 構造変化

単位根の検定の場合と同様に、構造変化があった場合の共和分ランクの検定にも多くの研究が行われている。Hansen (1992), Campos et al. (1996), Quintos (1998b), Inoue (1999), Johansen et al. (2000), Leutkepohl et al. (2003) などがある。

### 5.3 共和分体系における統計的推論

#### (a) インパルス応答関数

共和分を持つ多変量時系列のインパルス応答関数とその信頼区間の求め方は、Leutkepohl and Reimers (1992) 等によって示されている。このインパルス応答関数は、定常な場合と異なり、0 には収束せず、(22) における長期インパクト行列  $C$  に収束する。したがって、変数  $j$  から変数  $i$  への個別のインパルス応答は、 $C$  行列の  $i, j$  要素  $c_{ij}$  に収束する。

構造 VAR モデルへの変換に関しては、長期の効果を新たに変換行列  $T$  の識別条件に加えることができる。たとえば、Blanchard=Quah (1991), King et al. (1991) を参照されたい。

$$y_t = CTT^{-1} \sum_{i=1}^t u_i + C_1(L) TT^{-1} u_t + Y_0 - s_0 \quad (24)$$

$$= CT \sum_{i=1}^t u_i + C_1(L) T u_t + Y_0 - s_0 \quad (25)$$

たとえば、 $m=3$  で、第 1 成分が供給要因（持続的）、第 2, 3 成分が需要要因（短期的）とすると

$$CT = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

という先験的制約を  $T$  の識別に使うことができる。ここで、 $x$  は、0 に制約されていないことを意味する。

非定常な時系列モデルのインパルス応答関数の研究ならびに応用は現在も活発で、新しい接近法として、Koop et al. (1996) は非線形多変量モデルを提案した。Pesaran and Shin (1998) は一般化インパルス応答関数という概念を提案している。また Jorda (2005), Primiceri (2005) は時变的インパルス応答を提案している。

#### (b) 分散分解

分散分解も上記と同様に  $C$  行列について考えればよいことが分かる。すなわち、変数  $j$  から変数  $i$  への相対的分散寄与率は、以下で与えられる。

$$RVC_{j \rightarrow i} = c_{ij}^2 \sigma_{jj} / \sum_{k=1}^m c_{ik}^2 \sigma_{ik} \quad (26)$$

## (c) 因果関係の分析 (共和分モデルについての統計的推論)

この分野の先駆的研究としては, Sims et al. (1990) をあげることができる. 彼らは, 共和分を持つ VAR モデルの推論は, 標準的分布では扱えないことを示した. Toda=Phillips (1993) は Granger の因果関係の検定について, より厳密な形で同様の結果を示した.

一般に標準的分布に従わない場合の推論は実用性はないので, 標準的な分布に従う推定法として, Phillips (1993) は FM (fully modified) VAR 法を提案した. しかし, この方法は, 検定のサイズが, 著しく悪くなることが知られていて, 実用性に乏しい. Toda=Yamamoto (1995) の LA (lag augmented)-VAR 法は, 通常の VAR( $p$ ) モデル (1) に代えて, あえて1期余分なラグを持つ以下のような VAR モデル

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + A_{p+1} y_{t-p-1} + u_t$$

を推定することにより, パラメーターの一般的制約に関する Wald 統計量は, カイ2乗分布に従うことを示した. LA-VAR の弱点は, (i) 有限標本における検定のサイズに改善の余地がある, (ii) 検定のパワーが弱い, ことである. その後, サイズの改善は Kurozumi=Yamamoto (2000) のバイアス修正により行われた. また Chigira=Yamamoto (2003) は, Kurozumi (2005) の結果を用いて, 一般化最小2乗法を適宜用いることで, 検定のパワー向上がはかれることを示している. LA-VAR 法の動学的計量モデルへの応用は, Hsiao and Wang (2005) によって行われている.

通常の Granger の因果関係の概念は1期先の予測 ( $h=1$ ) に関して定義されるものであるが, 有限期間の中期 ( $h=2, \dots, K$ ) の場合は Dufor et al. (2003), 無限期間の長期 ( $h=\infty$ ) の場合は Yamamoto=Kurozumi (2003) に与えられている. これは

$$\bar{B} = [\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_p] \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} M' \bar{A}^h Y_t$$

における  $\bar{B}$  の係数行列に関して, パラメーターの制約の検定を行うことになる. ここで,  $\bar{A}$  は (3) で定義された行列である. さらに長期インパクト行列  $C$  に関して,  $c_{ij}=0$  は変数  $j$  が変数  $i$  に対して中立的であること意味する.  $C = \bar{B}_1$  となるので (例えば, Kurozumi et al. (2005) を参照), 中立性の検定も同様に行うことができる.

## (d) 予測

共和分の制約を入れた予測は, そうでないモデル (例えば, 通常の VAR モデル, あるいは1変量ごとの ARIMA モデル) からの予測に比べて予測の精度が向上するか否かという問題が, 多くの研究の対象となってきた. Engle=Yoo (1987) は, 共和分の制約を考慮することは, 長期予測において効果的であると主張した. 一方, Christoffersen=Diebold (1998) は目的関数の置き方により, 長期的に共和分制約の効果がない場合もあることを示した. Chigira=Yamamoto (2005a) は Kariya (1988) の MTV モデルの拡張により, 変数の数が多いとき, “短期” (すなわち, 有限期間の先の予測) において共和分の制約の効果があることを示した. この方法は, 従来の VEC モデルによる予測は, 大規模モデルではパラメーターの数が大きくなりすぎ, 推定が出来ない, あるいは推定結果が不安定である, という弱点を克服したものと考えることができる.

最後に, これまで述べてきた時系列の経済分析への応用を解説・サーベイした著作として, 山本 (1988), Hatanaka (1995), 最近のものとしては Leutkepohl (2005), Burk=Hunter (2005) を紹介しておく. 実証用のテキストとして, 独自のパッケージ・プログラムと対応し

ている Leutkepohl=Kratzig (2004) をあげておく。

## 6. 展 望

### 6.1 単位根と共和分

最近 10 年間の単位根ならびに共和分に関する研究は膨大である。一言で言えば、それらは統計的理論の精緻化といってよいと思われる。それまでの制約的な仮定に対して、より緩い仮定の下での結果の導出である。具体的には、長期記憶、なめらかな構造変化、そして threshold 自己回帰などを含む非線形モデルへの拡張である。今後もこの傾向は進むと思われる。統計理論的興味はまだ尽きることはない。しかしながら、経済の実証分析への時系列分析の実用性という観点からは重要であり、そういう観点からは、それらの精緻化の限界生産性は逓減の方向にあると言ってよいであろう。なぜなら、利用可能な経済データの長さは（一部の金融データを除けば）一般に限られており、信頼性のある結果を得るためには、かなり長期のデータが必要となる。上記の精緻化はその実用性において限界があると思われる。

本講演では時間の関係で触れなかったが、状態空間表現を使ったモデルによる単位根、共和分を含む時系列分析は、Gibbs sampling ならび MCMC 等に基づいたベイズ的接近が近年著しく発展しており、実証分析における有用性も高まってきたと考えられる。

### 6.2 動学的パネル・データ・モデル

時系列分析の延長として注目に値するのは、動学的パネル分析である。最後にこのモデルについて触れておく。

#### (a) 簡単な動学的パネル・データ・モデル

例示の意味で、以下のような簡単な（外生的説明変数を含まない）動学的パネル・データ・モデルを考える。

$$y_{it} = \alpha y_{i,t-1} + \gamma_i + u_{it} \quad (i=1, \dots, N) \quad (t=1, \dots, T) \quad (27)$$

ここで、 $u_{it}$  は攪乱項で  $i.i.d.(0, \sigma_u^2)$ ,  $u_{it}$  と  $u_{jt}$  は独立 ( $i \neq j$ ), 個別効果  $\gamma_i$  は  $i.i.d.(0, \sigma_\gamma^2)$ ,  $\gamma_i$  と  $\gamma_j$  は独立 ( $i \neq j$ ),  $u_{jt}$  と  $\gamma_i$  は独立 (すべての  $i, j, t$  に関して) である。さらに  $|\alpha| < 1$  と仮定する。

ここで、 $i$  は個体番号（例えば、企業、個人等）を表し、 $t$  は時刻を表す。多くの（マイクロ・）パネル・データでは  $N$  は大きい、 $T$  は小さいという状況を想定している。 $T$  が小さいので、個体毎の時系列データでは  $\alpha$  の意味のある推定ができず、 $N$  の個体を集めて、個体共通の  $\alpha$  を推定しようとするものである。

個別効果  $\gamma_i$  とラグ付き内生変数  $y_{i,t-1}$  の併存により、上記のモデルの OLS 推定量は一致性を持たない。また攪乱項に正規性を仮定して最尤法を適用することも可能であるが、初期条件の設定に依存し、実用性に限界がある。そこで、現在もっとも広く用いられているのは、GMM である。Arellano=Bond (1990) (階差 GMM), Arellano=Bover (1995) (レベル GMM), Blundell=Bond (1998) (システム GMM) が代表的な方法である。

#### (b) 今後の課題

上記の GMM における問題点は、 $\alpha$  の推定量が有限標本においてかなりのバイアスを持つことである。理論的には上記の GMM では  $N$  が十分大きい時、バイアスは消滅するはずであるが、実際はかなり  $N$  が大きくてもバイアスが残る。また多くのマクロ・パネル・データが最近利用可能となってきたが、これらは  $N$  が小さく、必然的に  $\alpha$  の推定量バイアスはきわめて大きい。この問題は、検定のサイズの歪みにつながり、バイアスを減少させる試みが、実証的にきわめて重要となっている。バイアス減少の試みとしては、Windmeijer (2005),

Chigira=Yamamoto (2005b) 等を参照されたい。さらに動学的パネル・データ・モデルに関して、パネル単位根、パネル共和分の問題は今後も改善の余地があると思われる。

また、 $\alpha$  が 1 に近づいた時、weak instruments の問題が生じる。標準的な Blundell=Bond (1998) のシステム GMM では、many instruments の問題がある。これらの問題はパネル・データ・モデルのみの問題ではなく、計量経済学にとって今後の重要な問題と考えられる。さらに cross sectional dependence (すなわち、異なった個体間の攪乱項の相関) をどのようにモデルに取り入れるかも、今後の大きな話題である。我が国におけるパネル・データ自体の収集・開発も最近は急速に進んでおり、実証分析への需要は高まっている。このように動学的パネル・データ・モデルに関する統計的分析手法の研究は、比較的限界生産性が高いと思われる。

## 7. 日本統計学会の活動について

最後に、会長として日本統計学会の活動の現在の問題、ならびに今後についての抱負を述べることにしたい。

### (a) 統計関連学会連合について

歴代の会長・理事長の多年の努力・調整の結果、2005年2月に統計関連学会連合(以下、連合と略す)が正式に発足した。連合は参加6学会から各2名の理事からなる連合理事会で運営され、私と竹村理事長は前任の藤越前会長、国友前理事長より引き継いで、2005年3月より連合理事会の理事となった。現在、統計学のおかれている立場は、日本学術会議での統計学の扱われ方その他の観点からも明らかなように、以前より厳しいものがあると思われる。このような時期には、統計学関連の学会が結束して、その存在意義を高めることはとても重要だと思う。夏の連合大会の開催は、その象徴的な活動である。しかし実際に連合理事会に参加してみると、各学会の主体性と、連合としての協調性の調整には、まだいろいろ難しい面があるように思われる。従って連合としての円滑な運営にはかなり時間がかかると思われ、連合独自の活動はこれから徐々に展開されていくことになると思う。また本学会としては、今後どのように学会独自の主体性を維持していくか、大いに議論・検討を重ねる必要があると考えている。

### (b) 春期大会について

本学会の恒例の夏の大会が、連合大会にいわば吸収されたのに伴い、日本統計学会独自の大会はなくなった。連合大会は、大規模な大会となり、それ自体は明らかな規模のメリットをあげているが、連合大会において本学会の独自性を出すことには、いろいろと制約がある。そこで春に独自の集会を持つ、という可能性を検討すべきであると考えている。夏の大会のミニ版のようなものを開くのはあまり賢明ではないと思われるので、若手限定の発表会、特定のテーマのシンポジウム等を考えていく必要を感じている。しかし実際に研究集会を開催するとなると、それなりの負担が関係理事等にかかることになり、安易に決められる問題ではない。私の任期中に結論を出す必要があるとは思わないが、今後の本学会の方向として、検討の価値がある重要課題であると考えている。なお以下に述べる75周年事業の一つとして、2006年5月には研究集会が開かれる予定であり、それが春の集会についての一つの試金石になると思われる。

### (c) 75周年記念事業について

2006年は、本学会の創設75周年を迎えるということで、杉山高一先生(元会長)に記念事業実行委員長を引き受けていただき、記念事業を進めていくことになった。「21世紀の知識創造社会に向けた統計の現状と展望」というテーマで、いくつかの研究集会・シンポジウム、記念特集号の発刊、統計学関連の優秀出版企画の表彰等を考えている。会員の皆様の物心両面での積極的なご支援を是非お願いする次第である。75周年記念事業についてのより詳しい紹介は、会報No.125(2005年10月号)の杉山実行委員長の巻頭言をご覧いただきたい。また会



報各号の関連記事，75周年記念事業ホームページもご参照下さい。

(d) 夏期大学院構想について

2005年の春に開かれた統計関連学会連合の理事会で，統計数理研究所（以下，統数研）からの連合理事会への種々の協力要請（主に教育・講習関連について）と共に，彼らの方でも学会サイドの要望に応える準備がある，との書面が紹介された。

その呼びかけに応じ，もし統数研（具体的には総合研究大学院大学，以下，総研大）が修士レベルの夏期大学院を開講して，単位互換で日本中の大学院生が受講できる可能性があれば素晴らしいと考え，私はそれを提案した。なおこの問題意識自体は，会員の皆様の多くと共有できるものと考えているが，私自身は会報 No. 121（2004年10月号）の巻頭言において伴金美教授（大阪大学）が示されていたアイディアにも触発された。日本には独立した統計学部がないことから，日本の統計教育（特に大学院レベル）が弱体であり，その充実のための良い方法ではないかと考えている。大都会の大学ではすでに，近隣大学との単位互換によって，統計学関連科目の充実は行われていると思うが，地方大学の学生にとっては不可能であり，彼らには夏期休暇中に開講して貰うことに大きな意義があると言えよう。また単なる講習ではなく，単位として修得できることが重要であると思う。この制度は，希望する個々の大学が総研大と単位互換の協定を結ぶことになるであろう。

夏期大学院構想自体はどこの大学が行ってもよいことであるが，講師となりうる統計学者が数多く在籍することと，単位互換に伴う煩瑣な学務事務を引き受けること，適当な宿泊施設を持っていることなどを考慮すると，通常の大学ではなかなか引き受けにくいものがあると考え，統数研（総研大）に提案した次第である。幸いこの構想は現在，統数研（総研大）にも前向きで取り組んでいただいております，実現の可能性は高いと思われ，統計学の大学院教育の一助になれば大変ありがたいと思っている。

参 考 文 献

- Amisano, G. and C. Giannini (1992). *Topics in Structural VAR Econometrics*, Springer, Berlin.
- Andrews, D. W. K. (1991). "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation," *Econometrica*, 59, 817-858.
- Andrews, D. W. K. and J. C. Monahan (1992). "An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimator," *Econometrica*, 60, 953-066.
- Arellano, M. and S. R. Bond (1991). "Some Tests of Specification for Panel Data: Monte Carlo Evidence and an Application to Employment Equations," *Review of Economic Studies*, 58, 277-297.
- Arellano, M. and O. Bover (1995). "Another Look at the Instrumental Variable Estimation of Error-Component Models," *Journal of Econometrics*, 68, 29-45.
- Baillie, R. T. (1979). "Asymptotic Prediction Mean Square Error for Vector Autoregressive Models," *Biometrika*, 66, 675-678.
- Baillie, R. T., R. E. Lippens, and P. C. McMahon (1983). "Testing Rational Expectations and Efficiency in the Foreign Exchange Market," *Econometrica*, 51, 553-563.
- Barro, R. J. (1974). "Are Government Bonds Net Wealth," *Journal of Political Economy*, 82, 1095-1117.
- Bernanke, B. (1986). "Alternative Explanations of the Money-Income Correlation," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 25, 49-99.
- Beveridge, S. and C. R. Nelson (1981). "A New Approach of Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle," *Journal of Monetary Economics*, 7, 151-174.
- Blanchard, O. J. and D. Quah (1989). "The Dynamic Effects of Aggregate Supply and Demand Disturbances," *American Economic Review*, 79, 655-673.
- Blundell, R. and S. Bond (1998). "Initial Conditions and Moment Restrictions in Dynamic Panel Data Models," *Journal of Econometrics*, 87, 115-43.

- Box, G. E. P. and G. M. Jenkins (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco.
- Breitung, J. (2002). "Nonparametric Tests for Unit Roots and Cointegration," *Journal of Econometrics*, 108, 343-363.
- Burke, S. P. and J. Hunter (2005) *Modelling Non-Stationary Economic Time Series*, Palgrave, Houndmills.
- Campos, J., N. R. Ericsson, and D. R. Hendry (1996). "Cointegration Tests in the Presence of Structural Breaks," *Journal of Econometrics*, 70, 187-220.
- Chigira, H. and T. Yamamoto (2003). "The Granger Non-Causality Test in Cointegrated Vector Autoregressions," Discussion Paper 2003-13, Department of Economics, Hitotsubashi University.
- Chigira, H. and T. Yamamoto (2005a). "Forecasting in Large Cointegrated Systems," Mimeo., Department of Economics, Hitotsubashi University.
- Chigira, H. and T. Yamamoto (2005b). "A New Approach to Estimation of Dynamic Panel Models in Small Samples," Mimeo., Department of Economics, Hitotsubashi University.
- Christoffersen, P. F. and F. X. Diebold (1998). "Cointegration and Long-horizon Forecasting," *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 450-458.
- Dickey, D. A., and W. A. Fuller (1979). "Distribution of Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root," *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- Dufour, J.-M., D. Pelletier and E. Renault (2003). "Short Run and Long Run Causality in Time Series: Inference," *Journal of Econometrics*, forthcoming.
- Dufour, J.-M. and E. Renault (1998). "Short Run and Long Run Causality in Time Series: Theory," *Econometrica*, 66, 1099-1125.
- Elliot, G., T. Rothenberg and J. H. Stock (1996). "Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root," *Econometrica*, 64, 813-836.
- Engle, R. F., and C. W. J. Granger (1987). "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing," *Econometrica*, 55, 251-276.
- Engle, R. F. and S. Yoo (1987). "Forecasting and Testing in Cointegrated Systems," *Journal of Econometrics*, 35, 143-159.
- Froot, K. A., and Rogoff, K. (1995). "Perspectives on PPP and Long-Run Real Exchange Rate," in G. Grossman and K. Rogoff eds. *Handbook of International Economics*, North-Holland.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons, New York.
- Fuller, W. A., and D. P. Hasza (1981). "Properties of Predictors for Autoregressive Time Series," *Journal of the American Statistical Association*, 76, 155-161.
- Granger, C. W. J. (1969). "Investigating Causal Relationship by Econometric Models and Cross-Spectral Methods," *Econometrica*, 37, 424-438.
- Granger, C. W. J. and M. Hatanaka (1964). *Spectral Analysis of Time Series*, Princeton University Press.
- Hall, A. (1994). "Testing for a Unit Root in Time Series with Pretest Data-Based Model Selection," *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 461-470.
- Hall, R. E. (1978). "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence," *Journal of Political Economy*, 86, 971-987.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Models*, Princeton Univ. Press.
- Hansen, B. E. (1992). "Tests for Parameter Instability in Regressions With  $I(1)$  Processes," *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 321-335.
- Hansen, B. E. (2001). "The New Econometrics of Structural Change: Dating Breaks in U.S. Labor Productivity," *Journal of Economic Perspectives*, 15, 117-128.
- Harris, D. (1997). "Principal Components Analysis of Cointegrated Time Series," *Econometric Theory*, 13, 529-557.
- Hatanaka, M. (1996). *Time-Series-Based Econometrics*, Oxford University Press.
- Hidalgo, J. (2000). "Nonparametric Test for Causality with Long-Range Dependence," *Econometrica*, 68, 1465-1490.
- Hidalgo, J. (2005). "A Bootstrap Causality Test for Covariance Stationary Processes," *Journal of Econometrics*, 126, 115-143.
- Hsiao, C. and S. Wang (2005). "Modified Two Stage Least Squares Estimators for the Estimation of a Structural Vector Autoregressive Integrated Processes," *Journal of Econometrics*, forthcoming.
- Inoue, A. (1999). "Tests of Cointegrating Rank with a Trend-Break," *Journal of Econometrics*, 90, 215-237.
- Ito, T. (1988). "Use of (Time-Domain) Vector Autoregressions to Test Uncovered Interest Parity," *Review of Economics and Statistics*, 70, 296-305.
- Ito, T. (1997). "The Long-run Purchasing Parity for the Yen: Historical Overview," *Journal of Japanese and*

- International Economies*, 11, 502-511.
- Johansen, S. (1988). "Statistical Analysis of Cointegration Vectors," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254.
- Johansen, S. (1991). "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models," *Econometrica*, 59, 1551-1580.
- Johansen, S. (1995): *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, Oxford.
- Johansen, S. and K. Juselius (1990): "Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration - with Applications to the Demand for Money," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, 169-210.
- Johansen, S., R. Mosconi and B. Nielsen (2000). "Cointegration Analysis in the Presence of Structural Breaks in the Deterministic Trend," *Econometrics Journal*, 3, 216-249.
- Jorda, O. (2005). "Estimation and Inference of Impulse Responses by Local Projections," *American Economic Review*, 95, 161-162.
- Kariya, T. (1988). "MTV Model and its Application to the Prediction of Stock Price," *The Proceedings of the Second International Tampere Conference in Statistics*, 161-176.
- Kiefer, N. M. and T. J. Vogelsang (2002). "Heteroskedasticity-Autocorrelation Robust Standard Errors Using the Bartlett Kernel without Truncation," *Econometrica*, 70, 2093-2095.
- Kilian L. (1999). "Finite-Sample Properties of Percentile and Percentile-t Bootstrap Confidence Intervals for Impulse Responses," *Review of Economics and Statistics*, 81, 652-660.
- King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock and M. W. Watson (1991). "Stochastic Trends and Economic Fluctuations," *American Economic Review*, 81, 819-840.
- Koop, G., M. H. Pesaran and S. M. Potter (1996). "Impulse Response Analysis in Nonlinear Multivariate Models," *Journal of Econometrics*, 74, 119-147.
- Kosobud, R. and L. R. Klein (1961). "Some Econometrics of Growth: Great Ratios of Economics," *Quarterly Journal of Economics*, 25, 173-198.
- Kunitomo, N. and T. Yamamoto (1985). "Properties of Predictors in Misspecified Autoregressive Time Series Models," *Journal of the American Statistical Association*, 80, pp. 941-950.
- Kunitomo, N. and T. Yamamoto (1990). "Conditions on Consistency for Testing Hypotheses under Rational Expectation by Vector Autoregressive Models and Cointegration," *Economic Studies Quarterly*, 41, 15-33.
- Kurozumi, E. (2002). "Testing for Stationarity with a Break," *Journal of Econometrics*, 108, 1551-1580.
- Kurozumi, E. (2005): "The Rank of a Sub-Matrix of Cointegration," *Econometric Theory*, 21, 299-325.
- Kurozumi, E., H. Chigira, and T. Yamamoto (2005). "Equivalence of Two Expressions of the Impact Matrix," *Econometric Theory*, 21, 870-875.
- Kurozumi, E. and T. Yamamoto (2000). "Modified Lag Augmented Vector Autoregressions," *Econometric Reviews*, 19, 207-231.
- Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt and Y. Shin (1992). "Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root," *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.
- Lanne M., H. Leutkepohl and P. Saikkonen (2002). "Comparison of Unit Root Tests for Time Series with Level Shifts," *Journal of Time Series Analysis*, 23, 667-685.
- Leutkepohl, H. (1990). "Asymptotic Distributions of Impulse Response Functions and Forecast Error Variance Decompositions of Vector Autoregressive Models," *Review of Economics and Statistics*, 72, 116-125.
- Leutkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer, Berlin.
- Leutkepohl, H. and M. Kratzig eds. (2004). *Applied Time Series Econometrics* Cambridge University Press.
- Leutkepohl, H. and D. S. Poskitt (1996). "Testing for Causation Using Infinite Order Vector Autoregressive Processes," *Econometric Theory*, 12, 61-87.
- Leutkepohl, H. and H. E. Reimers (1992). "Impulse Response Analysis of Cointegrated Systems," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 16, 53-78.
- Leutkepohl, H., P. Saikkonen and C. Trenkler (2003). "Comparison of Tests for the Cointegrating Rank of a VAR Process with a Structural Shift," *Journal of Econometrics*, 113, 201-229.
- Leybourne, S. J., P. Newbold and D. Vougas (1998). "Unit Roots and Smooth Transitions," *Journal of Time Series Analysis*, 19, 83-97.
- Lopes, C., C. J. Murray and D. H. Papell (2005). "State of Art Unit Root Tests and Purchasing Power Parity," *Journal*

- of Money, Credit and Banking*, 37, 361-370.
- Lucas, A. (1997). "Cointegration Testing Using Pseudo Likelihood Ratio Tests," *Econometric Theory*, 13, 149-169.
- Lucas, R. E. (1972). "Expectation and the Neutrality of Money," *Journal of Economic Theory*, 4, 103-124.
- Nelson, C.R. and C. I. Plosser (1982). "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications," *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.
- Newey, W. K. and K. D. West (1987). "A Simple, Positive Semidefinite, Heteroskedasticity and Autocorrelated Consistent Covariance Matrix," *Econometrica*, 55, 93-115.
- Ng, S. and P. Perron (2001). "Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power," *Econometrica*, 69, 1519-1554.
- 日本銀行特別研究室 (1981). 「時系列分析について：パネル・ディスカッション」日本銀行『金融研究資料』, 6.
- Osterwald-Lenum, M. (1992). "A Note with Quantiles of the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Cointegration Rank Test Statistics," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 461-472.
- Pesaran, M. H. and Y. Shin (1998). "Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models," *Economic Letters*, 58, 17-29.
- Pesaran, M. H. and Y. Shin (2002). "Long-Run Structural Modelling," *Econometric Reviews*, 21, 49-87.
- Perron, P. (1989). "The Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis," *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- Perron, P. and T. J. Vogelsang (1992). "Nonstationarity and Level Shifts with an Application to Purchasing Power Parity," *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 301-320.
- Phillips, P. C. B. (1987). "Time Series Regression with a Unit Root," *Econometrica*, 55, 277-301.
- Phillips, P. C. B. (1995). "Fully Modified Least Squares and Vector Autoregression," *Econometrica*, 63, 1023-1078.
- Phillips, P. C. B. and P. Perron (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression," *Biometrika*, 75, 335-346.
- Phillips, P. C. B. and Y. Sun and S. Jin (2003). "Consistent HAC Estimation and Robust Regression Using Sharp Origin Kernels with No Truncation," mimeo.
- Primiceri, G. E. (2005). "Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy," *Review of Economic Studies*, 72, 821-852.
- Quintos, C. E. (1998a). "Fully Modified Vector Autoregressive Inference in Partially Nonstationary Models," *Journal of the American Statistical Association*, 93, 783-785.
- Quintos, C. E. (1998b). "Stability Tests in Error Correction Models," *Journal of Econometrics*, 82, 289-315.
- Schorfheide, F. (2005). "VAR Forecasting under Misspecification," *Journal of Econometrics*, 128, 99-136.
- Shioji E. (2000). "Identifying Monetary Policy Shocks in Japan," *Journal of the Japanese and International Economies*, 14, 22-42.
- Sims, C. A. (1972). "Money, Income, and Causality," *American Economic Review*, 62, 540-552.
- Sims, C. A. (1980). "Macroeconomics and Reality," *Econometrica*, 48, 1-48.
- Sims, C. A., J. H. Stock, and M. W. Watson (1990). "Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots," *Econometrica*, 58, 113-144.
- Sims, C. A. and T. Zha (1999). "Error Bounds for Impulse Responses," *Econometrica*, 67, 1113-1155.
- Snell, A. (1999). "Testing for  $r$  versus  $r-1$  cointegrating vectors," *Journal of Econometrics*, 88, 151-191.
- Stock, J. H. and M. W. Watson (1989). "Vector Autoregressions," *Journal of Economic Perspectives*, 15, 101-115.
- Swanson, N. R. and C. W. J. Granger (1997). "Impulse Response Functions Based on a Causal Approach to Residual Orthogonalization on Vector Autoregressions," *Journal of the American Statistical Association*, 92, 357-367.
- Takeuchi, Y. (1989). "Trends and Structural Changes in Macroeconomic Time Series," *Journal of the Japan Statistical Society*, 21, 13-25.
- 竹内恵行・山本拓 (1987). 「外国為替市場における効率性について—時系列解析によるアプローチ」『経済研究』, 38, 97-109.
- Tanaka, K. and K. Maekawa (1984). "Sampling Distributions of the Predictor for an Autoregressive Model under Misspecifications," *Journal of Econometrics*, 25, 327-351.
- Toda, H. Y. and P. C. B. Phillips (1993). "Vector Autoregression and Causality," *Econometrica*, 59, 229-255.
- Toda, H. Y. and T. Yamamoto (1995). "Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes," *Journal of Econometrics*, 66, 225-250.
- Windmeijer, F. (2005). "Finite Sample Correction for the Variance of Linear Two-step GMM Estimators," *Journal of Econometrics*, 126, 25-51.
- Yamamoto, T. (1976). "Asymptotic Mean Square Prediction Error for an Autoregressive Model with Estimated

- Coefficients," *Journal of the Royal Statistical Society, Series C (Applied Statistics)*, Vol. 25, 123-127.
- Yamamoto, T. (1979). "On the Prediction Efficiency of the Generalized Least Squares Model with an Estimated Variance Covariance Matrix," *International Economic Review*, 20, 693-705.
- Yamamoto, T. (1980). "On the Treatment of Autocorrelated Errors in the Multiperiod Prediction of Dynamic Simultaneous Equation Models," *International Economic Review*, 21, 735-748.
- Yamamoto, T. (1981). "Predictions of Multivariate Autoregressive Moving Average Models," *Biometrika*, 68, 485-492.
- 山本拓 (1988). 『経済の時系列分析』, 創文社.
- Yamamoto, T. and E. Kurozumi (2003). "Tests for Long-Run Granger Non-Causality in Cointegrated Systems," *Journal of Time Series Analysis*, forthcoming.
- Zivot, E. and D. W. K. Andrews (1992). "Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis," *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 251-270.