物性研究52－1(1989－4)

講義ノート

「神経回路網の数理」

講　師　甘利俊一（東大・工）
記録者　田森佳秀（東北大・工）

（1989年3月4日受理）

序

一般にニューロン（neuron）は図1．1に示すように，樹状突起（dendrite），軸索突起（axon），細胞体（cell body）からなっている．ニューロンとニューロンがつながり合って，軸索突起から樹状突起へ，あるいは細胞体へ信号を伝える接続部を作っており，これがシナプス（synapse）と呼ばれる構造である．一つのニューロンには数千～数万個の他のニューロンの軸索からのシナプス結合があり，これを通して，たくさんの他のニューロンからの信号が，そのニューロンに入力となって入ってくる．信号伝達は，他のニューロンの軸索を通して送られてくる電気的なパルスが，シナプスにおいて伝達物質の排出を促し，樹状突起において伝達物質を受けたニューロンは内部の電位が上昇し，全ての入力（全てのシナプス結合から受け取る伝達物質の効果）の総和による電位上昇が，ある閾電圧を越えたとき非線形にパルスをつくり出す，そしてこのパルスはまた次のニューロンの入力となる，といったプロセスが考えられている．[1] この神経回路網に対して，様々なモデルが作られ研究がなされている．[2,3,4,5] 本講では，まず始めに，神経網の信号伝達を，パルス頻度を用いたいくつかのモデルについて考え，それらのダイナミクスと平衡状態について議論し，その後で学習の問題について考える．特に最後に神経場のモデルを用いて，視覚系で起こると言われているブロック化現象の説明を試みる．以下に簡単な目次を掲げる．

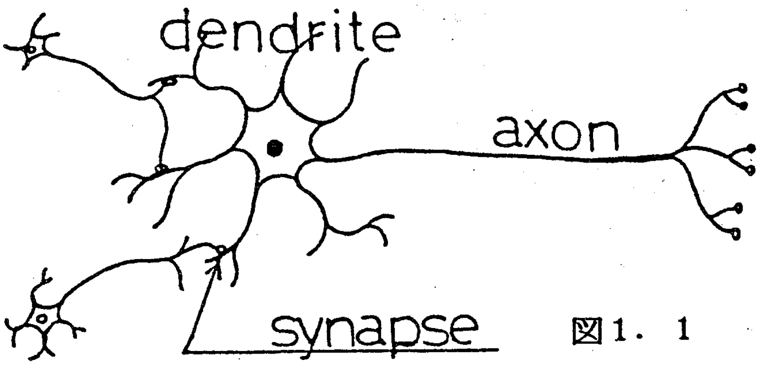

図1．1

甘利　俊一

I . ニューロン

II . ニューロンとその平均膜電位の状態方程式

III . 単純なネットワーク

1）巨視的な取扱

2）信号間の位相

IV . フィードバックのある系

1）巨視的な取扱いについて

2）状態遷移図

3）信号空間の構造

V . 対称結合型のネットワーク

1）ポテンシャル

2）ボルツマンマシン

3）アナログモデルでのポテンシャル関数

VI . 学習

1）単純ネットワーク

2）フィードバックを持つ系

重ね数　m

VII . カスケードネットワーク

VIII．情報処理機構の自動生成

1）神経場の学習

2） $w(\xi)=0$ の場合

3） $w(\xi)\neq 0$ の場合

4） 1-パラメーター族（1-パラメーターで表わされる信号パターン）

5）局在興奮解の安定性

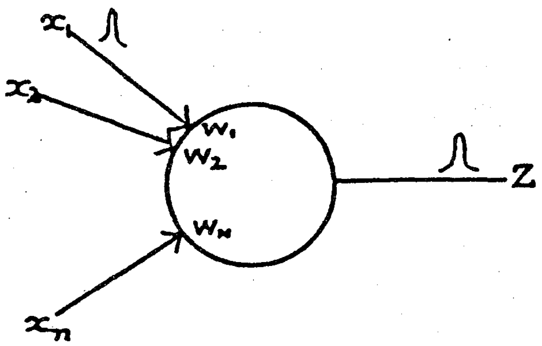

図1． 2

I．ニューロン

ニューロンをこの様な情報処理機能を持つ素子と考え，図1． 2の様にモデル化する．一つのシナプス結合から出される伝達物質の量は，軸索を通ってくるパルスの頻度に比例する．そこで多くのパルスを十分含むような時間スケール Δt で時間を離散化し，パルス頻度（時間 Δt に入ってくるパルスの数）に比例する信号の強さが，ニューロンへの入力の強さと考える．すなわち， Δt の間に受けた入力 x_i （パルス頻度）は，ニューロン内部の膜電位上昇に $w_i\,x_i$ の寄与をし，n個の細胞から入力を受けているときの膜電位上昇は $\sum_{i=1}^{n} w_i\,x_i$ である．ここで w_i はi番目のニューロンからの入力のシナプス結合強度を意味する．閾電圧を h とすると，パルス頻度の形で出力 $z=f(\sum_{i=1}^{n} w_i\,x_i-h)$ が出されると考える．すなわち，ある一定時間に入出力されるパルスを，その頻度というアナログ量の入出力が一定間隔毎に行なわれるとする（図1． 3）．出力関数 $f(x)$ は単調増加関数である（図1． 4）．実際の

ニューロンは，最小のパルス間隔 T を持ち，パルス頻度 ($\propto 1/T$) は最大値をもつ．この最大値が 1 になるようにパルス頻度を規格化しておき，

$$\begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq f(\,x\,) \leq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

とする．

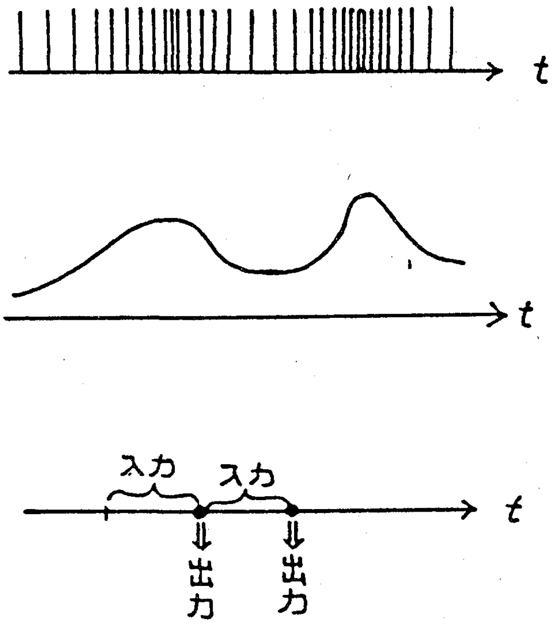

図1．3

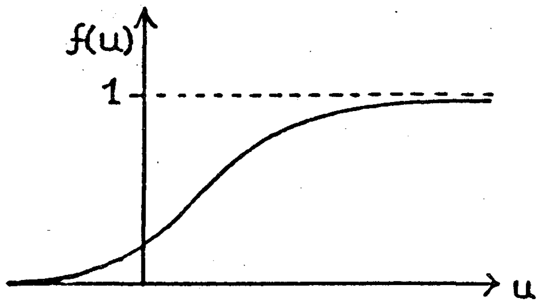

図1．4

II．ニューロンとその平均膜電位の状態方程式

定常的な n 個の入力 x_i があるときの膜電位の変化分 u ，即ち平衡状態での膜電位 u は，

$$u = \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i - h \tag{2.1}$$

と書ける．また膜電位 u は時定数 τ の減衰を持つとすると，その時間変化は，

$$\tau \frac{d\, u(\,t\,)}{dt} = -\, u(\,t\,) + \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i - h \tag{2.2}$$

と考えることができる．この定常解が (2.1) になっていることは明かである．また出力は，

$$z(t) = f[u(t)] \tag{2.3}$$

で決定される．

この様な仮定はもちろん定性的なもので，実際のニューロンでは閾電位 h は時間的に変動しているであろうし，樹状突起間の結合やシナプス前抑制の様な問題を無視している．（但し，これらの結合は哺乳類の中枢ではみられないと言う報告もある．）しかし，このモデルには，時間和作用，空間和作用，閾値作用，不応期の効果等が含まれている．

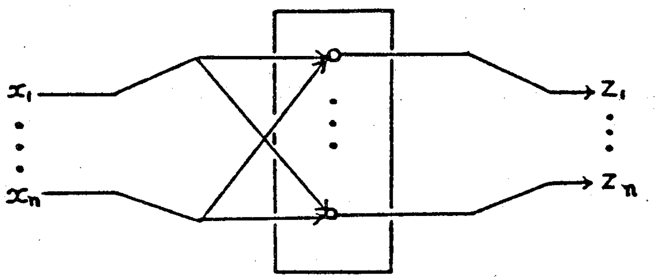

図3．1

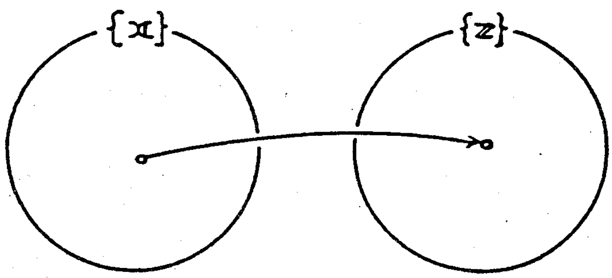

図3．2

III．単純なネットワーク

図3．1に示すような，n 個の入力と n 個の出力を持つ1層のネットワークについて考察する（一般には入力の数と出力の数は異なっていて良いが，これからの議論に差し支えないので，簡単のため，どちらも n 個で等しいとする）．n 個の入力の一つ一つは層内の n 個の細胞全てに投射している可能性がある．[1] これは i 番目の細胞が出す出力を z_i とし，j 番目の入力を x_j とすると，j から i へのシナプス結合強度 w_{ij} を用いて，

$$z_i = f\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j - h_i\right] \tag{3.1}$$

と書ける．z_i を成分に持つベクトル $\boldsymbol{z}$，x_i を成分に持つベクトル $\boldsymbol{x}$，w_{ij} を成分に持つ行列 W 等を用いて (3.1) は，

$$\boldsymbol{z} = f[\,W\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}\,] \tag{3.2}$$

とも書ける．ここで $f[\boldsymbol{x}]$ は，$f[x_i]$ を i 番目の成分とするようなベクトルを返す関数である．すなわち，この様なネットワークによる情報処理は，次のような W によって決定される非線形のオペレーター T_W による，情報空間 $\{\boldsymbol{x}\}$ から情報空間 $\{\boldsymbol{z}\}$ への写像とみなすこともできる（図3．2）．式で書くと，

$$\boldsymbol{z} = T_W\, \boldsymbol{x} \tag{3.3}$$

１）．巨視的な取扱い

議論の簡単化のために次のような仮定をしておく．

$$f[\boldsymbol{x}] \;\rightarrow\; sgn[\boldsymbol{x}] \tag{3.4}$$

x_i ： 1 または -1 のどちらかの値を取る． (3.5)

w_{ij} ： 平均 w，分散 σ_w^2 となるある確率分布に従って (3.6)

ランダムかつ独立に選ばれる．

即ち基本式は，

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j - h_i \\ z_i &= sgn(u_i) \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる．

このような回路網で w_{ij} をランダムに与えた場合にどのようなことが言えるだろうか．

ここで回路網のアンサンブルを考え，アンサンブルの中の圧倒的に多数のものに対して共通に成り立つ法則を調べよう．そのために，次の活動度とよぶ平均量を定義する．

$$X(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{（入力の活動度）} \tag{3.8}$$

$$Z(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \qquad \text{（出力の活動度）} \tag{3.9}$$

アンサンブル平均を意味するときに変数の上にバーをつけて表現すると，平均膜電位のアンサ

ンブル平均は，（但し閾値 $h_i = \overline{h}$ とする．）

$$\overline{u} = \sum_{j=1}^{n} \overline{w_{ij}}\ \overline{x_j} - \overline{h_i} = w\ n\ \overline{X} - \overline{h} \tag{3.10}$$

$$\sigma_u^2 = n\ \sigma_w^2 \tag{3.11}$$

u は非常に多くの独立な確率変数の和であるから，中心極限定理より正規分布するとしてよい．即ち u の分布 $P(u)$ は，

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left\{ -\frac{(u - \overline{u})}{2\sigma_u^2} \right\} \tag{3.12}$$

よって z_i の平均は，次のように書ける．

$$\begin{aligned} E[z_i] &= Prob\{u > 0\} - Prob\{u < 0\} \\ &= \Phi\left[\frac{u}{\sigma_u} \right] \\ &= \Phi\left[\frac{n\ \overline{w}\ \overline{X} - \overline{h}}{\sqrt{n}\ \sigma_w} \right] \equiv F(\overline{X}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

ここで，

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{u} \exp\left[-\frac{y^2}{2} \right] dy \tag{3.14}$$

である（図３．３）．大数の法則より，$E[z_i] = \overline{Z}$ としてよい．但し，$n \to \infty$ で発散しないように，$n\ w \sim$ 一定，$n\ \sigma_w^2 \sim$ 一定としてスケーリングする必要がある．こうしてマクロな活動度の間の関係式，

$$\overline{Z} = F(\overline{X}) \tag{3.15}$$

が求められる．

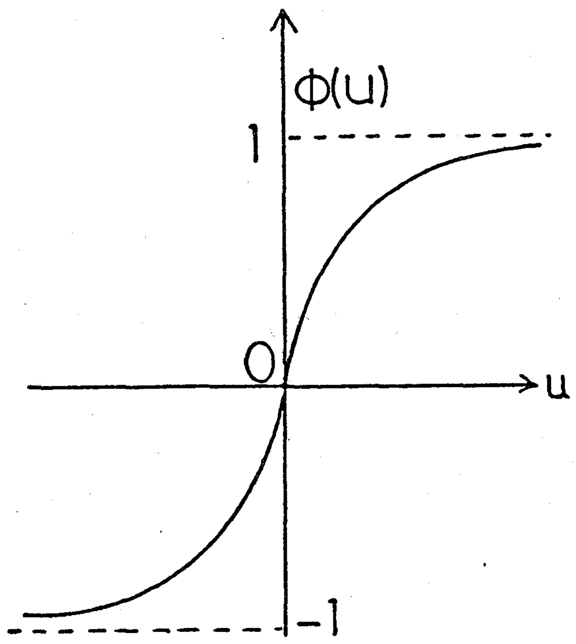

図3．3

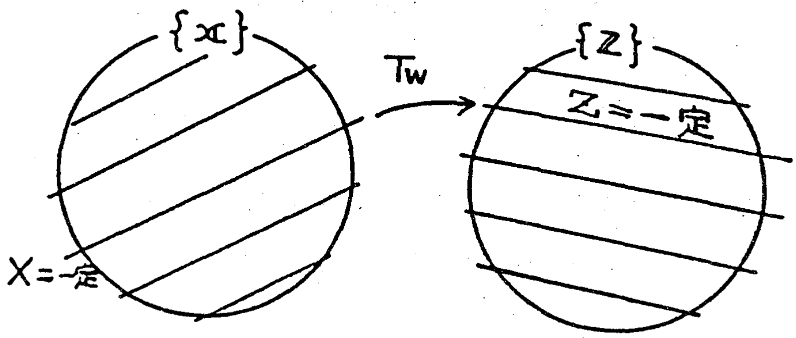

図3．4

2）．信号間の位相

今までの話は，マクロな量 X が一定となる $\{x\}$ の部分集合から，マクロな量 Z が一定となる $\{z\}$ の部分集合への写像を，求めるものであった（図3．4）．しかし，議論を詳細にするには，信号空間に位相を導入する必要がある．すなわち，元の像空間 $\{x\}$ で距離 D を持つ x と x' が，写像空間 $\{z\}$ では，どの様な距離を持つ2点 z，z' に写されるかということに興味がある（図3．5）．

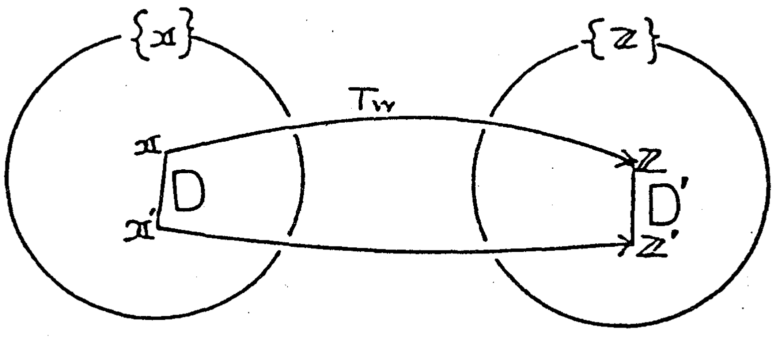

図3．5

そのためには，信号間の距離をなんらかの形で定義する必要がある．最も一般的には，ハミング距離（Hamming distance）

$$D(\, \boldsymbol{x} \,,\, \boldsymbol{x}' \,) \equiv \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - x_i' \mid = \frac{1}{n}\#(\, x_i \neq x_i' \,) \tag{3.16}$$

がある.

シナプス強度 w_{ij} は平均 0，分散 σ_w^2 の分布からランダムに選ばれるとし，入力 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}'$ による膜電位を u，v とすると，

$$u = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j \xrightarrow{sgn} z_i \tag{3.17}$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j' \xrightarrow{sgn} z_i' \tag{3.18}$$

なお，簡単のため $h_i = 0$ としている． z と z' との距離 D' は，

$$\begin{aligned} D'(\, z \,,\, z' \,) &\equiv \frac{1}{n}\#(\, z_i \neq z_i' \,) \\ &= \frac{1}{n}\#(\, u_i\, v_i < 0 \,) = Prob\{\, u\, v < 0 \,\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

である．この D' と，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ との距離 D とは，どういう関係にあるだろうか？ まともに計算しようとすると大変な気がするが，膜電位の空間の幾何学的な意味を考えると容易に求められて，

$$D' = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{D} \tag{3.20}$$

となる．以下に求め方の概要を示す．

膜電位 u，v は互いに相関を持つ正規分布に従うことに注意する．すなわち，

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{uu}^2 & \sigma_{uv}^2 \\ \sigma_{vu}^2 & \sigma_{vv}^2 \end{bmatrix} \right) \tag{3.21}$$

従って，確率分布の式は，

$$P(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma_{uu}\sigma_{vv}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{u^2}{\sigma_{uu}^2} + \frac{v^2}{\sigma_{vv}^2} - \frac{2\rho uv}{\sigma_{uu}\sigma_{vv}} \right) \right\} \tag{3.22}$$

ここで，$\rho = \dfrac{\sigma_{uv}^2}{\sigma_{uu}\,\sigma_{vv}}$ である．但し，

$$\sigma_{uu}^2 = \sigma_{vv}^2 = n\,\sigma_w^2 \tag{3.23}$$

u と v の相関（この場合 $E[\,u\,] = E[\,v\,] = 0$ なので共分散でもある）は，

$$\sigma_{uv}^2 = E[\,u\,v\,] = E[\,\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\,x_j \sum_{k=1}^{n} w_{ik}\,x_k{}'\,]$$

$$= E[\,\sum_{j=1}^{n} w_{ij}{}^2\,x_j\,x_j{}'\,]$$

$$= \sigma_w^2(\,\sum_{j=1}^{n} x_j\,x_j{}'\,)$$

$$= (\,1 - 2\,D\,)\,n\,\sigma_w^2$$

従って，

$$\sigma_{uv}^2 = \sigma_{vu}^2 = n\,\sigma_w^2\,(\,1 - 2\,D\,) \qquad (\,\gtrless 0\,) \tag{3.24}$$

となる．z と z' との距離 D' は，(3.19) 式に示したように，相関を持つ分布 (3.22) 式，すなわち，楕円の切口を持つような丘陵形の２次元正規分布の，２つの確率変数 u，v についての積分を，$u\,v < 0$ となる領域で求めれば良い．このままでは，解くのは困難であるが，２次元分布関数が回転体となるように確率変数を座標変換しておくと，定義域の立体角の比を求めるだけで，積分を求めたことになる（もちろん，２次元分布関数は１に規格化されているとする．）（図３．６）．　こうして求められたのが (3.20) 式の関係である．（以上）

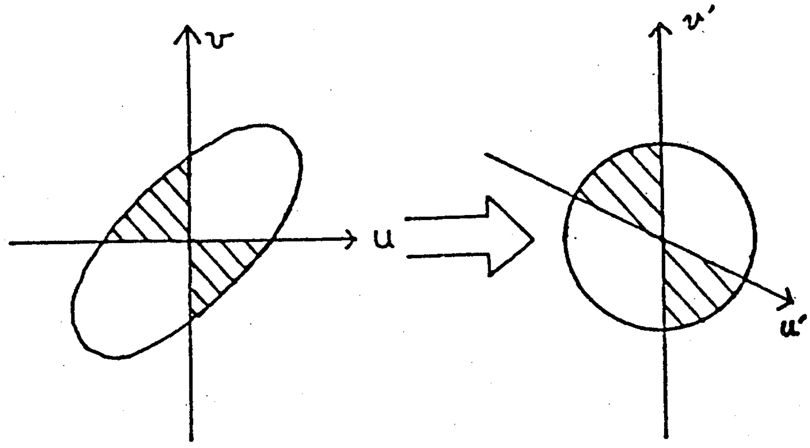

図３．６

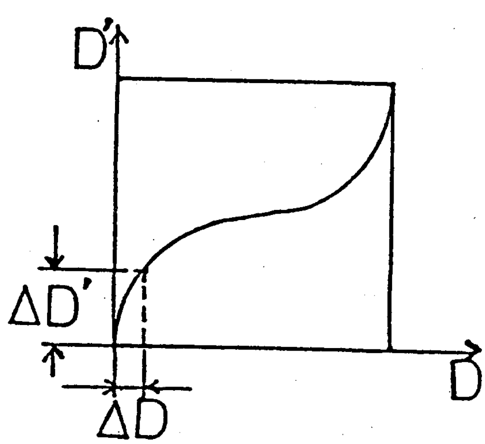

図３．７

結果について考えてみると，情報間の小さな距離 D は，このようなネットワークによって大きくなり，大きな D は小さな D' に変換されていることがわかる（図3．7）．すなわち，このネットワークは似ている情報を引き離し，違いすぎる情報を近づけて，情報を均一にする働きを持っているといえる．

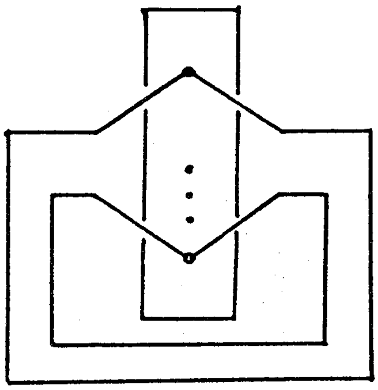

図4．1

IV．フィードバックのある系

次に，単純なネットワークの出力 z をそのまま，入力につないだ，フィードバックのある系について考えてみる　（図4．1）．一回ネットワークを通り抜ける度に一ずつ増加する離散的な時間 t とともに，単純ネットワークの考察のところで定義した，（3.3）式の非線形なオペレータ T_W を用いて書くと，次のようになる．

$$x(t+1) = T_W\, x(t) \tag{4.1}$$

1）．巨視的な取扱いについて

この系でも単純ネットワークの時と同じく活動度を用いた取扱いができるだろうか？すなわち，

$$X(t+1) = F[X(t)] \tag{4.2}$$

が成り立つかどうかに興味がある．少なくとも，

$$u_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j(t) - h_i \tag{4.3}$$

において, $x_j(t) = sgn(\sum_{k=1}^{n} w_{jk}\, x_k(t-1) - h_j$ であるから, x_j も w_{ij} の関数なので, 簡単に $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j$ と別々に平均化できないので, 事は複雑である. その証明については言及しないが, w_{ij} の和が無限分割可能分布のうちでポアソン形, またはその拡張のときには, 広い意味で (4.2) 式が成り立つ.

2）. 状態遷移図

ところで, (4.2) 式のような漸化式は, 1変数ならば, bistable, あるいは, monostableな解が存在するといえるが, 多変数の系の振舞いを, 活動度のような, 単純化したパラメーターだけから, 安定, 不安定を言うことは注意が必要である. このことを見るために, 状態遷移図というものを考えてみよう. 状態遷移図とは, 信号空間内の, 本来 n 次元の超格子の頂点であるべき点を, 平面に描いた丸の中にある点で表わし, ステップとともに, 系の状態が, 信号空間内を（超格子の頂点を）移り歩く様子を, 矢印を用いて表わすという大胆な概念図である. 平面に描いた点と点との距離が近い時はハミング距離も短いというすんぽうである.

状態遷移図は (w_{ij}) が決まると決定されることに注意する. 図4. 2に, その状態遷移図の一例を示す.

これによって, フィードバックの系でのアトラクターとして, リミットサイクルや, 平衡状態などがあり, それらのアトラクターがその中の点から出発すると, 必ずそのアトラクターに落ちつくといった, ある種の流域を持つ様子を概念的に表わすことができる.

3）. 信号空間の構造

信号空間の構造をもう少し詳しくみるために, ”ある子状態 $\boldsymbol{x}$ に遷移してくるような親状態の個数が i となる確率 q_i ”を定義する. q_i を式で書くと,

$$q_i = Prob\{\, |\, T_W^{-1}\, \boldsymbol{x}\, | = i\,\} \quad (\boldsymbol{x}\ \text{の親状態の個数を}\ |\, T_W^{-1}\, \boldsymbol{x}\, |\ \text{と書く}) \tag{4.4}$$

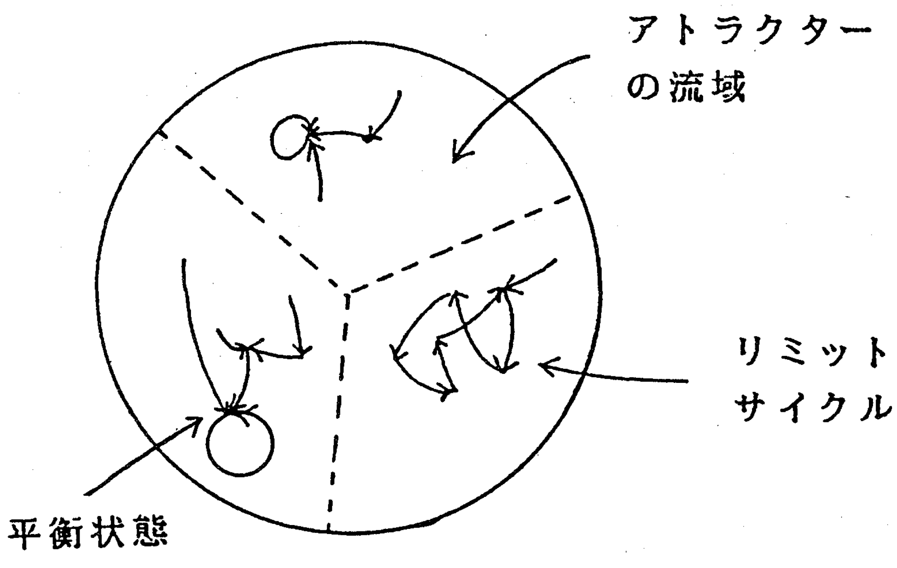

図4．2

規格化条件を，

$$\sum_{i=0}^{2^n} q_i = 1 \tag{4.5}$$

とすると，そのような親状態の個数の平均値と分散を求めてみると，

$$\sum_{i=0}^{2^n} i \cdot q_i = 1 \qquad (n \to \infty) \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=0}^{2^n} i^2 \cdot q_i = 1 \qquad (n \to \infty) \tag{4.7}$$

となっていることがわかった（参考文献(1)　p130　）．すなわち，親無し子がたくさんいて，親のたくさんいる子が少しいるということである．　i の分布状態を描いてみると図4．3のようになる．

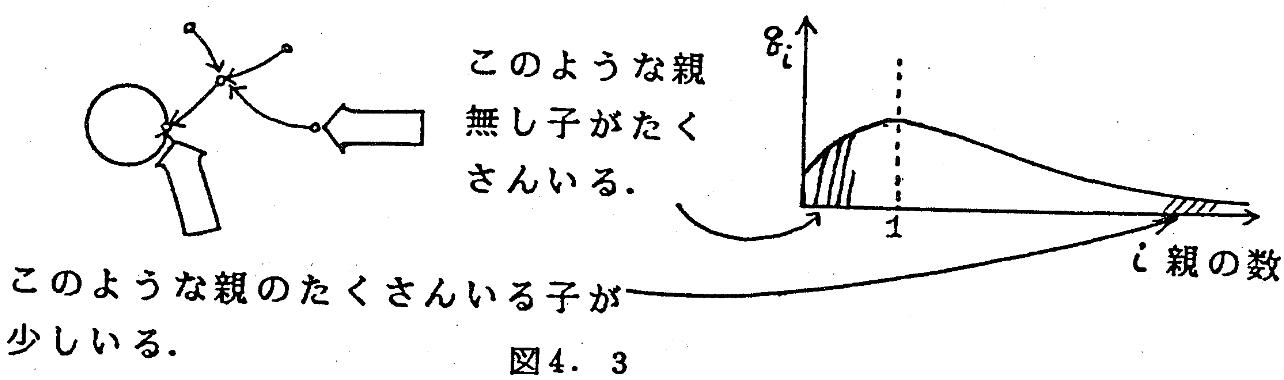

図4．3

V．対称結合型のネットワーク

今までは，w_{ij} はランダムに分布しているとして特に制限はつけなかったが，$w_{ij}=w_{ji}$ となるように対称分布している系は，平衡点が極小点となるような，ポテンシャルをつくることができるという点で興味深い系である．やはり，信号 x_i が ± 1 をとる２値モデルで考える．

１）．ポテンシャル

$$E=-\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}\,x_i\,x_j \tag{5.1}$$

このポテンシャルは，１番目の神経細胞が出す信号に注目すると，

$$\begin{aligned}\Delta E &= E[\,\boldsymbol{x}\,;\,x_1=1\,]-E[\,\boldsymbol{x}\,;\,x_1=-1\,]\\ &=-2\sum_{j=1}^{n} w_{1j}\,x_j\end{aligned} \tag{5.2}$$

であるから，前に定義した非線形な変換規則 T_W は，

$$\Delta E:\begin{cases} <0 & \text{ならば } x_1=1 \text{ にせよ，}\\ >0 & \text{ならば } x_1=-1 \text{ にせよ}\end{cases} \tag{5.3}$$

すなわち，ポテンシャル E の低い方へ系は動いていくと理解できる [6]（図５．１）．

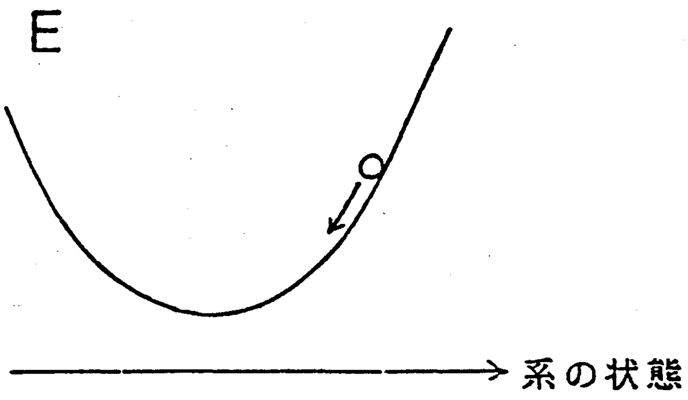

図５．１

２）．ボルツマンマシン[4]

ボルツマンマシンの考え方は，状態が遷移して行くときの確率のみがわかっているというものである．

$$u_i(\,\boldsymbol{x}\,) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\,x_j - h$$

で，現在の状態が $\boldsymbol{x}$ のとき，状態の第 i 成分が１となる確率は，

$$f(\,u_i\,) = \frac{1}{1 + \exp(\,-\,2\,u_i\,/\,T\,)} \tag{5.4}$$

であるという風に確率的に決まるとする．すると状態 $\boldsymbol{x}$ の遷移は数学的にはMarkov chainとなり，その定状確率は，

$$P(\,\boldsymbol{x}\,) = c\,\exp(\,-\,E(\,\boldsymbol{x}\,)\,/\,T\,) \tag{5.5}$$

と，求まる．これは統計力学でいうボルツマン因子に対応しているのでこの名がある．対称型のネットワークは，ポテンシャル E が複雑で多くの極小点を持つので，確率 $P(\,\boldsymbol{x}\,)$ も多くのピークを持っていることがわかる（図５．２）．

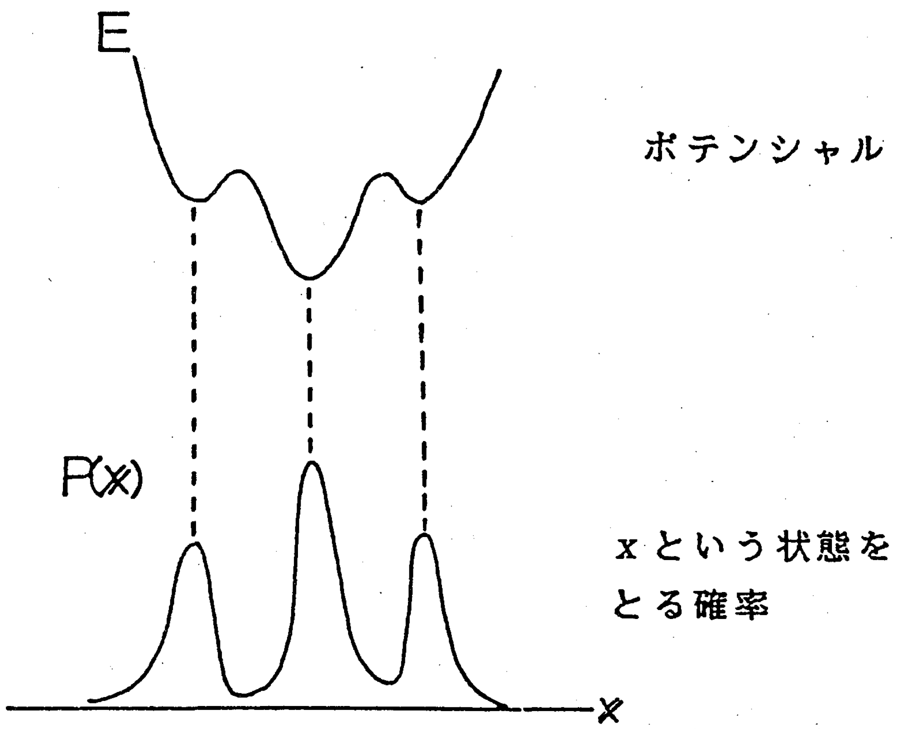

図５．２

3）．アナログモデルでのポテンシャル関数

対称モデルの場合，信号 $\boldsymbol{x}$ がアナログ値を取っていたとしても，ポテンシャル関数をかける．

$$U(\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}\, f(u_i)\, f(u_j) + \sum_{i=1}^{n} (u_i - a_i)\, f(u_i) - \sum_{i=1}^{n} \int_0^{u_i} f(s)\, ds \tag{5.6}$$

$U(\ u_i\ )$ の時間変化を見てみると，

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = -f'(\ u_i\ )\ [\ \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, f(\ u_j\ ) - u_i + a_i\ ] \tag{5.7}$$

だから，状態方程式，

$$\tau\, \dot{u}_i = -\ u_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, f(\ u_j\ ) + a_i \qquad \text{（要素表示）} \tag{5.8}$$

は，

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial u_i}\, \dot{u}_i = -\sum_{i=1}^{n} f'(\ u_i\ )\ \dot{u}_i^{\,2}\, \tau < 0 \tag{5.9}$$

を満たしており，系はポテンシャル U の低い方へ移って行く．

VI．学習

あるパターン $\boldsymbol{x}^{\mu}$ を入れたとき，　$\boldsymbol{z}^{\mu}$ という出力を返すようにネットワークの結合強度を決めることを，相関連想記憶という．但し μ はパターンを区別する番号である．

1）．単純ネットワーク

単純ネットワークにおいて，　m 個のパターンを相関記憶するには，結合強度を次のようにきめればよい．

$$w_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{m} z_i^{\mu}\, x_j^{\mu} \qquad \text{（要素表示）} \tag{6.1}$$

j 番目の入力から　i 番目のニューロンへの結合強度 w_{ij} は，　n 行 n 列の行列の形に書く

ことができる.

全てのパターン $\boldsymbol{x}^1$, . . . , $\boldsymbol{x}^m$ が直交しているときは,

$$\boldsymbol{x}^\mu \cdot \boldsymbol{x}^\nu = \delta_{\mu\nu}\, n \tag{6.2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} T_W\, \boldsymbol{x}^\nu = sgn(\ \boldsymbol{W}\, \boldsymbol{x}^\nu\ ) &= sgn\{\ \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{m} z^\mu\ (\ \boldsymbol{x}^\mu \cdot \boldsymbol{x}^\nu\ )\ \} \\ &= sgn(\ z^\nu\ ) = z^\nu \end{aligned} \tag{6.3}$$

2）. フィードバックを持つ系

フィードバックを持つネットワークの場合は, J.A.Anderson,[7] K.Nakano,[8] T.Kohonen[9] (1972) が詳しい. ここでは, 信号 x_i , z_i は確率 $1/2$ で $+1$ か -1 のどちらかの値を取るものとする. 則ち, $\boldsymbol{x}^\mu \cdot \boldsymbol{x}^\nu$ の値が正規分布 $N(\ 0\ ,\ n\ )$ に従うので, 今までのように, w_{ij} が, 対称性 ($w_{ij} = w_{ji}$) を持つ以外は全て独立, ということができなくなる.

相関記憶の結合強度は, 次式のようになる.

$$w_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{m} x_i^\mu\, x_j^\mu \qquad \text{（要素表示）} \tag{6.4}$$

重ね数　　m

$$\frac{m}{n} \equiv r \tag{6.5}$$

この r は, 重ね度といって, どれだけ多くのパターンを, 1組の結合強度に重ねて記憶したかの度合を表わす量である. シミュレーションの結果はHopfield[6] によって $r = 0.15$ という値が求められているが, もっと簡単な計算により求めることができる. 結果は,

$$r \approx \frac{1}{2\ \ln(\ n\ )} \tag{6.6}$$

これを求めてみよう．まず，数ある系の状態の中で，全ての神経細胞が発火した状態，すなわち $\boldsymbol{x}^1 = (1, 1, ..., 1, 1)$ について調べることによって，一般性を失わずに議論できるから，これを用いて本質的なところだけを見て行こう．

二つの状態 $\boldsymbol{x}^1$，　$\boldsymbol{x}$ 間の距離はその内積ではかることもできる，則ち，

$$A(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\boldsymbol{x}^1 \cdot \boldsymbol{x} \qquad \text{（状態ベクトルの内積）} \tag{6.7}$$

この A は，ハミング距離 D とよく知られた関係，

$$\begin{aligned} A &= 1 - 2D \\ D &= \frac{1}{2n} | \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x} | \qquad \text{（ハミング距離）} \end{aligned} \tag{6.8}$$

の関係にある．

さて，入力 $\boldsymbol{x}$ があった時の出力 $\boldsymbol{x}'$ は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' = sgn(W\boldsymbol{x}) &= sgn\{ \frac{1}{n}\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{x}^1 \cdot \boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\sum_{\mu=2}^{m} \boldsymbol{x}^\mu(\boldsymbol{x}^\mu \cdot \boldsymbol{x}) \} \\ &= sgn(A\boldsymbol{x}^1 + N) \end{aligned} \tag{6.9}$$

$A > -N_i$ ならば，　x_i' は x_i^1 になり符号は変わらない．　N_i の分布を調べてみると，

$$\begin{aligned} N_i = \frac{1}{n}\sum_{\mu=2}^{m} x_i^\mu(\boldsymbol{x}^\mu \cdot \boldsymbol{x}) &\sim N(0, \frac{n(m-1)}{n^2}) \\ &\sim N(0, r) \qquad (\because (6.5)) \end{aligned} \tag{6.10}$$

よって $N_i < -A$ の確率は誤差関数，

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\,dt \tag{6.11}$$

を用いて，

$$Prob\{ x_i' \neq x_i^1 \} = erf\left[\frac{-A}{\sqrt{r}} \right] \tag{6.12}$$

となる．知りたいのは，

$$A' = \frac{1}{n} \boldsymbol{x}^1 \cdot \boldsymbol{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,1} x_i{}'$$

$$= erf\left(\frac{A}{\sqrt{r}}\right) - erf\left(\frac{-A}{\sqrt{r}}\right) = \Phi\left(\frac{A}{\sqrt{r}}\right) \tag{6.13}$$

この関数 $\Phi(x)$ は (3.13) 式ですでに定義された関数で，図３．３にあるように単調に増加してゆく関数である．はじめに記憶させたパターンの中の１つ $\boldsymbol{x}^1$ が入力されたとき，同じ $\boldsymbol{x}^1$ を出力するということは $A = A' = 1$ ということである．入力されたパターンが変わらずに出力されるのが，重ねて記憶できるパターンの数 m がいくつまでであるかが問題である．この m の限界値は当然 n に依存する．ある i 番目の成分が変わらない確率を q とすると，これは (6.12) 式以外のケースだから，

$$q = Prob\{\, x_i{}' = x_i^{\,1} \,\} = 1 - erf\left(\frac{-A}{\sqrt{r}}\right) = 1 - erf\left(\frac{-1}{\sqrt{r}}\right) \tag{6.14}$$

（Aのほうは入力であるから，１と等しくて良い．）

n 個の要素全てが変わらない確率 Q は，

$$Q = \prod_{i=1}^{n} Prob\{\, x_i{}' = x_i^1 \} = \left\{ 1 - erf\left(\frac{-1}{\sqrt{r}}\right) \right\}^n \tag{6.15}$$

これが，$n \to \infty$ としたとき $Q \to 1$ となればよい．こうして，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-u} e^{-\frac{x2}{2}} dx \sim \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{6.16}$$

などの近似を用いて，

$$m \approx \frac{n}{2 \ln(\, n \,)} \tag{6.17}$$

が求められる．すなわち神経細胞の全数 n に対する，入力を変化させないでおける重ね数の割合は，定数ではなく，n の増大とともにゆっくりと減って行く．

次に $\boldsymbol{x}(\,0\,)$ から出発して $\boldsymbol{x}(\,t\,)$ が $\boldsymbol{x}^1$ に近づく時間的な振舞いを見て行く．すなわち，

$$x(t+1) = sgn(Wx(t)) \tag{6.18}$$

を時間とともに追いかけてみる．すなわち，記憶させたパターンがどの程度安定かを見るために，いろいろな初期パターンから出発して，時間的にどの様にAが変わって行くかをプロットしてみる（図6．1）．図6．1に示すように，あるthresholdまでは，殆ど全てのパターンが目的のパターンのごく近くへ落ち着くのであるが，それよりも遠いパターンから出発すると，殆どのパターンが，一旦はthresholdを越えて近づくにもかかわらず，目的のパターンから離れて行くのである．これは，パターン間の距離だけで考えてはいけないことを示している．すなわち，信号空間は殆ど，ある領域内で一つのアトラクターに収束する構造をしているが，その流域にはひび割れのように吸い込み点が浸入していて，流域の外から出発した場合，一旦その吸い込み口に吸い込まれてから離れて行くと考えられる（図6．2）．[10]

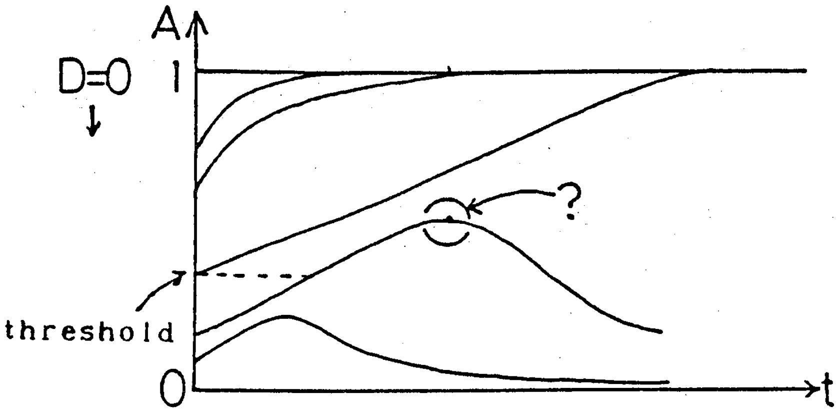

図6．1

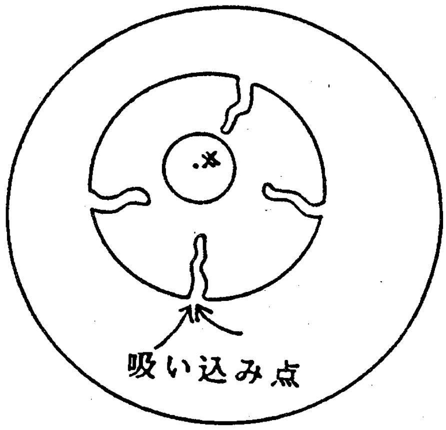

図6．2

VII．カスケードネットワーク[11]

図7．1に示すような，単純ネットワークを順につなげていったネットワークを考えると解析は楽である．[11] それぞれの単純ネットワークにも，添え字をつけて，そのようなネットワークの添え字は変数の真上につけることにする．図7．2に示すような，m個のデータのシーケンスを考え，そのシーケンスにも番号をふる．学習はそのシーケンスを再生できるように，シーケンスの相関を学習する事が目的である．相関の学習は次式で規定される．

$$\overset{t}{w}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{m} \overset{t+1}{x}{}_i^{\mu} \cdot \overset{t}{x}{}_j^{\mu} \qquad (\text{要素表示}) \tag{7.1}$$

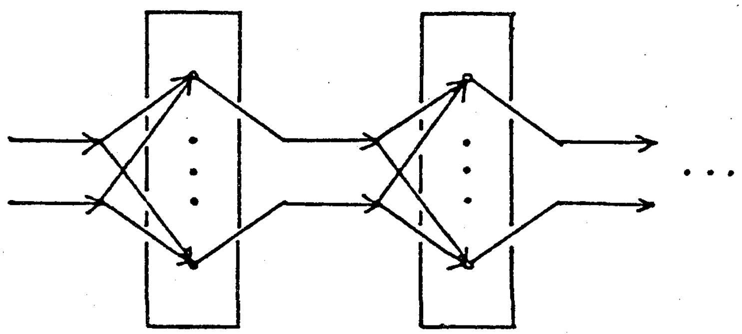

図7．1

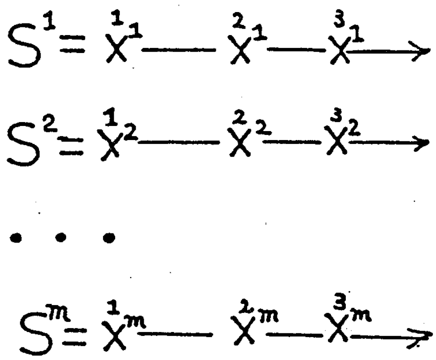

図7．2

t ステップ目から $t+1$ ステップ目への変換を求めてみる．

$$\boldsymbol{x}(\, t+1\,) = T_{\overset{t}{W}}\, \boldsymbol{x}(\, t\,) = sgn\{\, \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{m} \overset{t+1}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu}\, (\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,\}$$

$$= sgn\{\, \frac{1}{n} \overset{t+1}{\boldsymbol{x}}{}^{1}\, (\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{1} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,) + \frac{1}{n} \sum_{\mu=2}^{m} \overset{t+1}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu}\, (\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,\}$$

$$= sgn(\, A_t \overset{t+1}{\boldsymbol{x}}{}^{1} + \overset{t}{N}\,) \tag{7.2}$$

$$\overset{t}{N}_i = \frac{1}{n} \sum_{\mu=2}^{m} \overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i}\, (\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\mu=2}^{m} \overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i}\, [\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot sgn\{\, A_{t-1} \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{1} + \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^{m} \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\lambda} (\overset{t+1}{\boldsymbol{x}}{}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{x}(\, t-1\,)\,)\,\}\,] \tag{7.3}$$

$\overset{t}{N}_i$ は多くの確率変数の和なので，正規分布 $N(\,0\,,\sigma_t^2\,)$ にしたがう．

$$E[\, \overset{t}{N}_i\,] = E[\overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i}\, (\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,] = E[\overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i}\,]\, E[\,(\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,] = 0 \tag{7.4}$$

ここで，$\overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i}$ と $\overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)$ は独立であることを使った．

$$\sigma_t^2 = E[\,(\, \overset{t}{N}_i\,)^2\,] = E[\, \frac{1}{n} \sum_{\mu=2}^{m} \overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i}\, (\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,) \cdot \frac{1}{n} \sum_{\nu=2}^{m} \overset{t+1}{x}{}^{\nu}_{i} (\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\nu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,]$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\mu,\nu}^{m} E[\overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i} \overset{t+1}{x}{}^{\nu}_{i}\,]\, E[\,(\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,(\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\nu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,] \tag{7.5}$$

この和の中の項 $E[\overset{t+1}{x}{}^{\mu}_{i} \overset{t+1}{x}{}^{\nu}_{i}\,]\, E[\,(\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,(\, \overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\nu} \cdot \boldsymbol{x}(\, t\,)\,)\,]$ は，

1） $\mu \neq \nu$ の場合.

$$E[\overset{t+1}{x}{}_i^{\mu}\overset{t+1}{x}{}_i^{\nu}]E[(\overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu}\cdot\boldsymbol{x}(t))(\overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\nu}\cdot\boldsymbol{x}(t))]=0 \tag{7.6}$$

2） $\mu = \nu$ の場合.

$$E[(\overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu}\cdot\boldsymbol{x}(t))(\overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\nu}\cdot\boldsymbol{x}(t))]=\sum_{j,k}E[(\overset{t}{x}{}_j^{\mu}\,x_j(t))(\overset{t}{x}{}_k^{\mu}\,x_k(t))] \tag{7.7}$$

ここで,

$$E[(\overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu}\cdot\boldsymbol{x}(t))(\overset{t}{\boldsymbol{x}}{}^{\nu}\cdot\boldsymbol{x}(t))]=\begin{cases}1 & j=k\text{のとき，}(m-1)n\text{個}\\ M & j\neq k\text{のとき，}(m-1)n(n-1)\text{個}\end{cases} \tag{7.8}$$

従って,

$$\sigma_t^2=\frac{1}{n^2}\{(m-1)n+(m-1)n(n-1)M\}\approx\frac{m}{n}+mM \tag{7.9}$$

ここで M の値は次のように求められる．簡単のために,

$$\overset{t}{x}{}_j^{\mu}=a\quad,\qquad \overset{t}{x}{}_k^{\mu}=b \tag{7.10}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}M&=E[\,a\,b\,x_j(t)\,x_k(t)\,]\quad\cdots\quad(m-1)\,n\,(n-1)\text{個}\approx m\,n^2\text{個}\\&=E[\,a\,b\,sgn(A+aX+Y_j)\,sgn(A+bX+Y_k)\,]\end{aligned} \tag{7.11}$$

ここで,

$$X\equiv\frac{1}{n}(\overset{t-1}{\boldsymbol{x}}{}^{\mu}\cdot\boldsymbol{x}(t-1)) \tag{7.12}$$

$$Y_k\equiv\frac{1}{n}\sum_{\substack{\lambda=2\\ \lambda\neq\mu}}\overset{t}{x}{}_k^{\lambda}(\overset{t-1}{\boldsymbol{x}}{}^{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}(t-1)) \tag{7.13}$$

$$A=A_{t-1} \tag{7.14}$$

である．また,

$$\overset{t}{x}{}_k^{1}=\overset{t}{x}{}_j^{1}=1 \tag{7.15}$$

を使った.

a, b と X, $Y(=Y_j)$, $Y'(=Y_k)$ は互いに独立な確率変数であり, X と Y, Y' もまた, 互いに独立な確率変数である. Y と Y' は分散 σ_{t-1}^2 の正規分布, X は分散 σ_{t-1}^2/m の正規分布に従い, 平均値はすべて 0 である. すなわち X の大きさの程度は Y, Y' に比べて非常に小さい.

ここで, $a\,b=+1$ の場合と, $a\,b=-1$ の場合にわけて考え, 正規分布が原点に関して対称であることを利用すると,

$$M=\frac{1}{2}E[\,sgn\{(A+X+Y)(A+X+Y')\}\,]$$
$$-\frac{1}{2}E[\,sgn\{(A+X+Y)(A-X+Y')\}\,] \tag{7.16}$$

更に定数 A と確率変数 Z (平均 0 で分散 σ^2 の正規分布に従う) についての補題,

$$E[\,sgn(A+Z)\,]=\Phi\left(\frac{A}{\sigma}\right) \qquad (図7.\ 3参照) \tag{7.17}$$

を利用し, Y, Y' についての平均をさきに取ると.

$$M=\frac{1}{2}E\left[\,\Phi\left(\frac{A+X}{\sigma_{t-1}}\right)^2-\Phi\left(\frac{A+X}{\sigma_{t-1}}\right)\Phi\left(\frac{A-X}{\sigma_{t-1}}\right)\right] \tag{7.18}$$

ここで X/σ_{t-1} は小さいので, X/σ_{t-1} について展開すると,

$$\Phi\left(\frac{A\pm X}{\sigma_{t-1}}\right)=\Phi\left(\frac{A}{\sigma_{t-1}}\right)\pm\Phi'\left(\frac{A}{\sigma_{t-1}}\right)\frac{X}{\sigma_{t-1}}+\frac{1}{2}\Phi''\left(\frac{A}{\sigma_{t-1}}\right)\left(\frac{X}{\sigma_{t-1}}\right)^2$$
$$\equiv p\pm q\,X+r\,X^2 \tag{7.19}$$

従って,

$$M=\frac{1}{2}E[\,2\,q^2\,X^2+4\,p\,q\,X+4\,q\,r\,X^3\,]+O\left(\frac{X^4}{\sigma^4{}_{t-1}}\right)$$

$$\approx\Phi'\left(\frac{A}{\sigma_{t-1}}\right)^2\frac{1}{{\sigma_{t-1}}^2}E[\,X^2\,]$$

$$=\frac{2}{m\,\pi}\exp\left(-\frac{A^2}{{\sigma_{t-1}}^2}\right) \tag{7.20}$$

結局 (7.10) に (7.25) を代入し，　A_{t+1} と σ^2_{t+1} に対する漸化式として，

$$A_{t+1} = \Phi\left(\frac{A_t}{\sigma_t} \right) \tag{7.21}$$

$$\sigma^2_{t+1} = r + \frac{2}{\pi}\exp\left(\frac{-A_t^2}{\sigma_t^2} \right) \tag{7.22}$$

が得られる．これらにより，重ね数 r とアトラクターの流域に関する相図が描ける（図7．4）．この相図で $A=1$ の水平線は，記憶させたパターンで，いわばアトラクターとなるべきものである．領域Aの上側の境界線は，最終的に系がおちついたときの，状態を表わしている．このように，必ずしも，系は教え込んだパターンに落ち着くわけではなく，教え込んだパターンから僅かにずれたものに落ち着く，このずれは，r が大きくなるにつれて少しずつ大きくなるが，　$r=0.27$ 辺りで，急に，どの様なパターンを初期値にして出発しても，教え込んだパターンから，はなれていってしまうようになる．領域 A はこのようなアトラクターの流域である．この領域の外を初期値にして出発し，状態を変化させて行くと，いったんは，アトラクターの流域に入り込んでも，大きな分散のために，また引き戻されてしまう．[10]

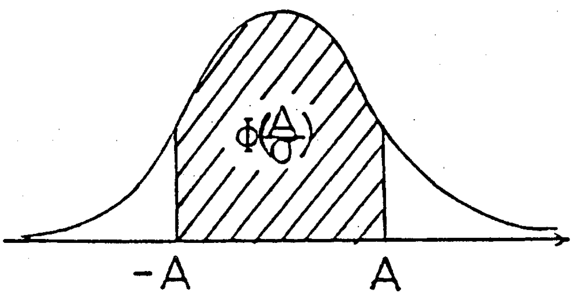

図7．3

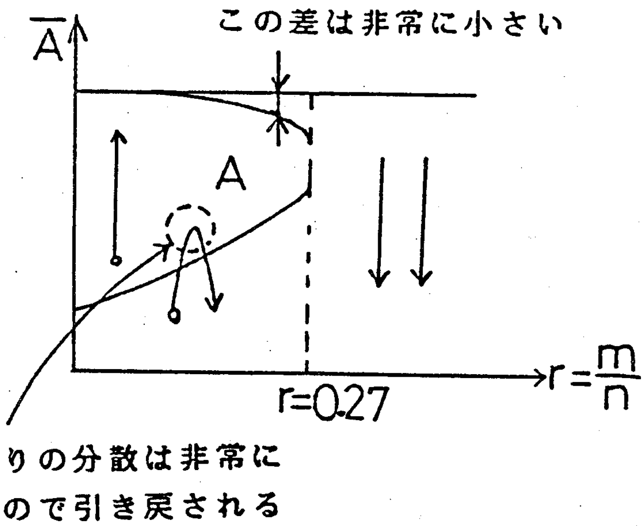

図7．4

これらの事に関係して，ＢＡＭ (Bidirectional Associative Memory) [11,12] に関する研究や，時系列の記憶に関する研究[13] がなされている．また連想記憶のスピングラス的手法を用いた解析がある．[14]

補足

連想記憶に関して，双対ベクトル $^*x$ を用いる方法がある（図７．５）．これは，互いに直交していない入力情報の集合から，出力情報の集合への連想記憶をするために，入力情報の集合の双対ベクトルの集合との直交性を利用するというものである．このような相関学習は次のようにして行なえば良いことが分かっている．[15]

$$\Delta w_{ij} = c\, x_j^{\mu} \left(-\sum_{k=1}^{n} w_{ik}\, x_k^{\mu} + z_i^{\mu} \right) \tag{7.23}$$

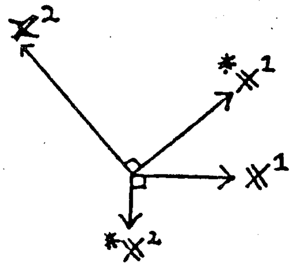

図７．５

VIII．情報処理機構の自動生成

これまでの話は，外界の情報をランダムにエンコードしたものを，神経集団全体にパターンとして記憶するという「記憶の分散表現」の問題であったが，これからの話は，外界の情報を部分に分けて記憶して行く「記憶の局在表現」を，自動的に生成して行くにはどうしたら良いかという問題である（図８．１）．たとえば，第一次視覚野には種々の特徴抽出細胞があり，ある角度の斜め線にだけ反応するような細胞が反応する角度の順に局在している．これらの機能による局在は，ある程度遺伝によって与えられてはいるが，後天的な学習により，その境界がはっきりしてくる　（図８．２）．

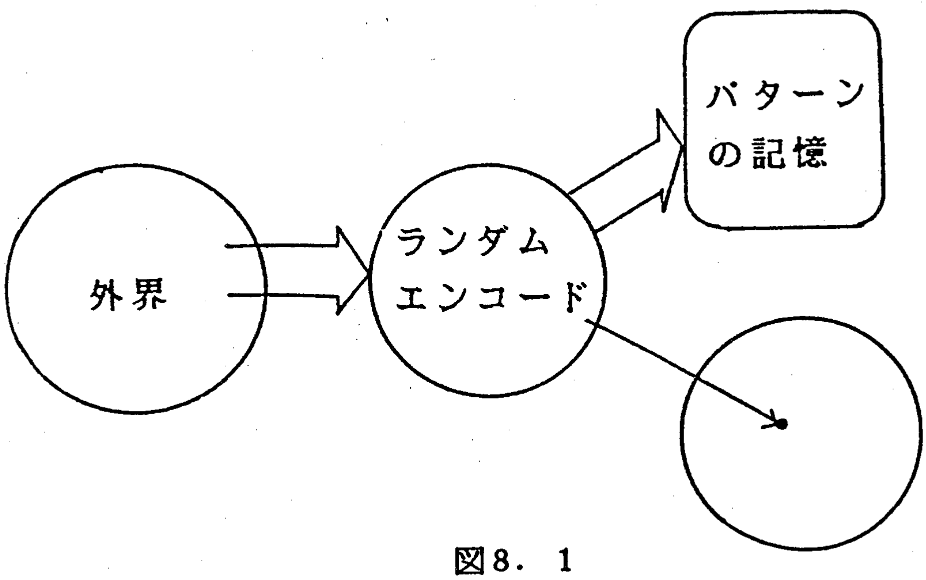

図8. 1

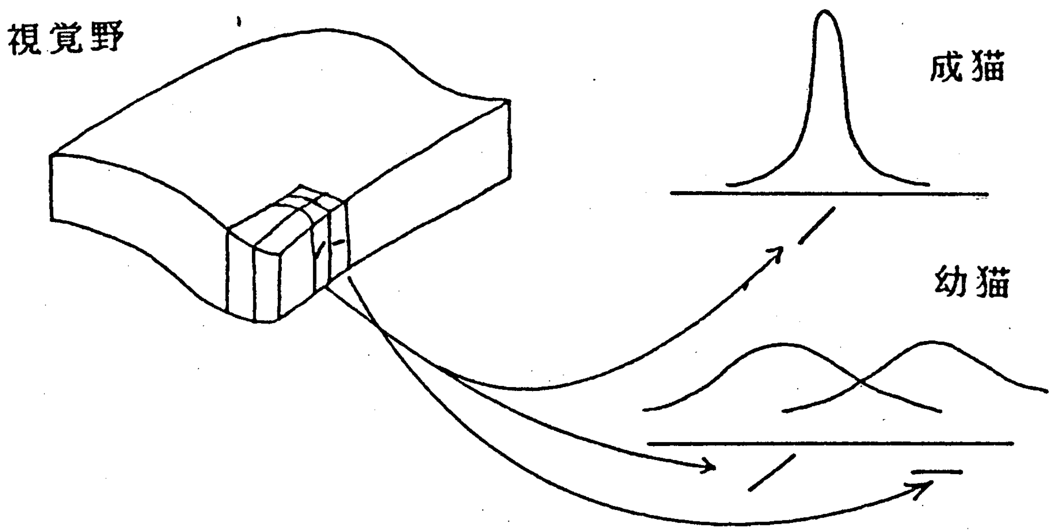

図8. 2

1）. 神経場の学習

神経細胞を連続的2次元に配列した神経場を考え，場の空間座標を，

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$ とする．神経場の興奮の方程式を，

$$\tau \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = -u(\xi, t) + a(\xi, t) + w \circ f[u] \tag{8.1}$$

と仮定する．ここで $a(\xi, t)$ は ξ 点に入る外界からの入力の和で，

$$a(\xi, t) = s(\xi, t)\cdot x - s_0(\xi, t)x_0 \tag{8.2}$$

とする．x は外界からの信号（刺激）であり，シナプス結合効率 $s(\xi, t)$ で，神経場の ξ に入力される．　x_0 は抑制信号を単純化して定数の入力としたものであり，$s_0(\xi, t)$ は ξ におけるその結合効率である．この抑制性入力 x_0 は閾値と考えても良い．また (8.1) 式の最後の項は，

$$w \circ f[u] = \int w(\xi, \xi')f[u(\xi', t)]\,d\xi' \tag{8.3}$$

であって，位置 ξ の神経場 $u(\xi, t)$ によって，　$z(\xi, t) = f[u(\xi, t)]$ が出力され，それが ξ と ξ' の結合　$w(\xi, \xi')$ によって，その位置にフィードバックされる効果を表わしている（図８．３）．

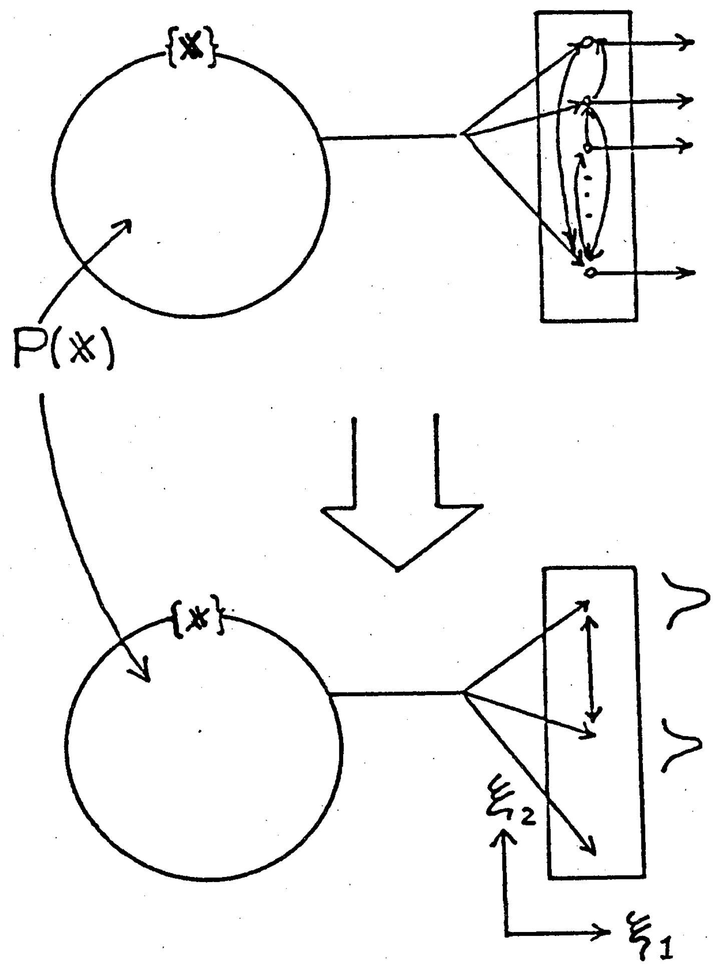

図８．３

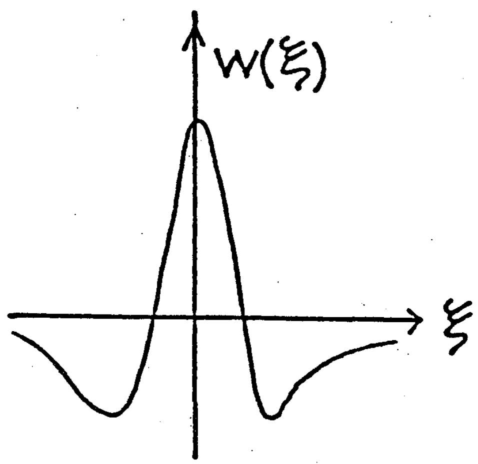

図８．４

結合荷重 w は図８．４の様に距離のみで決まる関数 $w(\xi, \xi') = w(|\xi - \xi'|)$ とする．

これは人間の視覚がマッハ効果を示すことから予想されるものである．またフィードバックはパルスで行なわれるから，タイムディレイは考えなくともよい．実際の学習は $s(\xi)$，$s_0(\xi)$ について行なわれ，学習方程式は次のようになる．

$$\tau' \frac{\partial s(\xi, t)}{\partial t} = -s(\xi, t) + c\,x \cdot f[u(\xi, t)] \tag{8.4}$$

$$\tau' \frac{\partial s_0(\xi, t)}{\partial t} = -s_0(\xi, t) + c'\,x_0 \cdot f[u(\xi, t)] \tag{8.5}$$

(8.4) 式の右辺の最後の項は，入力，出力が共に正の場合に結合効率 s が増加する効果を表わす．学習は非常にゆっくりおこるから（$\tau \ll \tau'$），右辺 f 内の u をその安定平衡値 $U(\xi, x)$ で置き換えて（断熱近似）議論して行く．このとき，外界の信号に応じた自己組織化がおこるかどうかが問題である．特徴としては f が非線型であり，これをどの様に取り扱うかがポイントである．ここで，実際計算の簡単化のために，

(1)　x_0 を出力の総和程度の量と考え，一定と仮定する．

(2)　$f[u] = 1[u]$ とする．$1[u]$ はステップ関数である．

(3)　(8.4) 式，(8.5) 式の学習は非常にゆっくりと行なわれるから（$\tau \ll \tau'$），学習は入力信号を見せ続けた最後の瞬間に行なわれると考え，(8.4) 式の右辺の f 内の u を (8.1) 式の安定平衡値 $U(\xi, x)$ で置き換える（断熱近似）．この U は，入力信号 x に対する場の反応を示す．この $U(\xi, x)$ がわかれば $U > 0$ に対応する信号空間の受容野（Receptive field）の領域Rを知ることもできる．また，神経場の影響野の中で U が正となっているような領域に対応している入力信号 x^{μ} を知ることもできる．図８．５に信号空間の受容野と神経場空間の影響野を，一次元で表現したポンチ絵を示す．

(4)　時間 τ' で学習が起こる間に，いろいろな信号 x が入ってくることが考えられる．従って (8.1) 式で，$a(x)$ を x の確率 $p(x)$ によるアンサンブル平均，

$$< a(x) > = \int a(x)\, p(x)\, dx \tag{8.6}$$

で置き換え，(8.4) 式，(8.5) 式でも x_0 について確率 $p(x)$ でアンサンブル平均をとる．その際 x と s，s_0 の平均を独立に行なうという近似をする事にする．

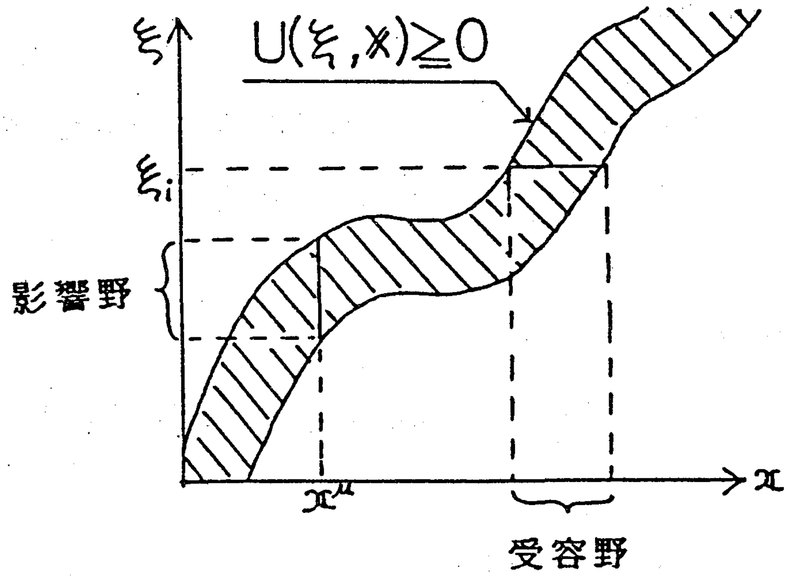

図8．5

以上の近似のもとに方程式を変形して行くことにする．ここで U は (8.1) 式の平衡状態の解であるから，

$$U(\xi, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} + w \circ 1[U(\xi, \boldsymbol{x})] \tag{8.7}$$

$$A = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{x} - S_0 x_0 \tag{8.8}$$

となる．ここでいろいろな入力信号についての　$\boldsymbol{s}$， s_0 のアンサンブル平均を $\boldsymbol{S}$，S_0 と書いた．　$\boldsymbol{S}$， S_0 の時間発展の方程式は (8.4) 式，　(8.5) 式より，

$$\tau' \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = -\boldsymbol{S} + c < \boldsymbol{x} \cdot 1[U(\xi, \boldsymbol{x})] > \tag{8.9}$$

$$\tau' \frac{\partial S_0}{\partial t} = -S_0 + c' x_0 < 1[U(\xi, \boldsymbol{x})] > \tag{8.10}$$

と得られる．信号空間 $\{\boldsymbol{x}\}$ に構造を与えたときに，神経場においては，そのダイナミックスに従って興奮が起こり，最終的にあるパターンが出力されるように自己組織化される．これらの式を解いて自己組織化について調べてゆきたいのであるが，まずは簡単なところからはじめる．

２）．$w(\xi)=0$ の場合

$w=0$ の場合，則ち神経場の異なる位置の間に相互結合が全く無い場合に何が起こるかを調べよう． ξ を固定して $U(\xi,\boldsymbol{x}) \to U(\boldsymbol{x})$ と書くことにする．(8.7) 式で $w=0$ とすると，

$$U(\boldsymbol{x}) = A = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} - S_0\, x_0 \tag{8.11}$$

であるから，(8.9) 式と (8.10) 式の定常解 $\boldsymbol{S}$，S_0 を求めるには，ξ に依らない方程式，

$$\boldsymbol{S} = c < \boldsymbol{x}\cdot 1[\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} - S_0\, x_0\,] > \tag{8.12}$$

$$S_0 = c'\ x_0 < 1[\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} - S_0\, x_0\,] > \tag{8.13}$$

を連立させてiterativeに解けば良い．こうして平衡状態における $\boldsymbol{S}$，S_0 を (8.12) 式，(8.13) 式より求めた後 (8.11) 式から U が求められる． $U>0$ に対応する信号空間の受容野Rを，

$$R = \{\,\boldsymbol{x} \mid U(\boldsymbol{x}) > 0\,\} \tag{8.14}$$

と定義する．(8.12) 式，(8.13) 式で，離散的な有限個の信号 $\boldsymbol{x}^{\mu} \in R$ の入力アンサンブルにおける確率 p^{μ} を使うと，（$\boldsymbol{x}$ の右添え字はパターンベクトルの番号を表わす．）

$$\boldsymbol{S} = c < \boldsymbol{x}\cdot 1[\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} - S_0\, x_0\,] > = c \sum_{\mu} p^{\mu}\, \boldsymbol{x}^{\mu} = c\, p(R)\, X_R \tag{8.15}$$

$$S_0 = c'\ x_0 < 1[\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} - S_0\, x_0\,] > = c'\ x_0 \sum_{\mu} p^{\mu} = c'\ x_0\, p(R) \tag{8.16}$$

ここで X_R は領域Rの中にある信号 $\boldsymbol{x}^{\mu}$ の重心で，

$$X_R = \frac{\sum_{\mu} p^{\mu}\, \boldsymbol{x}^{\mu}}{p(R)}\ ,\quad (\,\boldsymbol{x}^{\mu} \in R\,) \tag{8.17}$$

$$p(R) = \sum_{\mu} p^{\mu}\ ,\quad (\,\boldsymbol{x}^{\mu} \in R\,) \tag{8.18}$$

である（図８．６）．これらを (8.11) 式に代入して $U(\boldsymbol{x})$ が求められる．

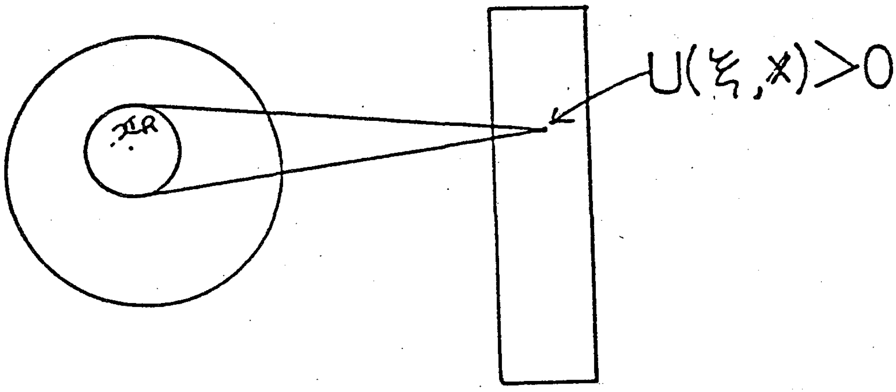

図8．6

さてどの様なRが (8.14) 式の解として資格があるだろうか？　Rに対する方程式を求めよう．　$x^{\mu} \in R$ ならば (8.11) 式から，

$$U = S \cdot x^{\mu} - S_0\, x_0 > 0 \tag{8.19}$$

でなければならない．　$x^{\mu} \notin R$ ならば，

$$U = S \cdot x^{\mu} - S_0\, x_0 < 0 \tag{8.20}$$

でなければならない．　$x^{\mu} \in R$ のとき条件 $U > 0$ は，　(8.15) 式，(8.16) 式を (8.19) 式に代入し，

$$X_R \cdot x^{\mu} > \frac{c'}{c}\, {x_0}^2 \tag{8.21}$$

$x^{\mu} \notin R$ のとき条件 $U < 0$ は同様にして，

$$X_R \cdot x^{\mu} < \frac{c'}{c}\, {x_0}^2 \tag{8.22}$$

となる．すなわち X_R を中心とした受容野の大きさが $(c' / c)\, {x_0}^2$ であることが導き出された．　(8.21) 式，(8.22) 式はRの必要十分条件であることも容易にわかる．

3）．$w(\xi) \neq 0$ の場合．

w を考慮したときの時間発展を見るために，入力信号の時間変化について考えてみる．このとき $A(\xi, x, t)$ に着目するともっと見やすい形が得られる．　A の式 (8.7) 式の時間微分をとると，(8.9) 式と (8.10) 式を使って．

$$\tau' \frac{\partial A}{\partial t} = \tau' \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} - S_0 x_0)$$

$$= [-\boldsymbol{S} + c < \boldsymbol{x}' f(U) >]\cdot\boldsymbol{x} - [-S_0 + c' x_0 < f(U) >] x_0$$

$$= -A + < (c\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x} - c' x_0^2) f(U) >$$

$$= -A + < k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') f(U(\xi, \boldsymbol{x}')) >_{\boldsymbol{x}'}$$

$$= -A + k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') * f(U) \tag{8.23}$$

ここで右辺第二項は外界の信号 $\boldsymbol{x}$ に関する，重み $p(\boldsymbol{x})$ 付きの畳み込み積分を表わしていて，

$$k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') * f(U) = \int k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') f[U(\xi, \boldsymbol{x}')] p(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{x}' \tag{8.24}$$

である．この $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = k(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|)$ は，図8．7に示すように，
$w(|\xi - \xi'|)$ に似ているが，　w が影響野の相互結合なのに対して，k は受容野の相互結合を表わす．　U と A は，(8.7) 式と (8.23) 式を連立させて解くことができる．

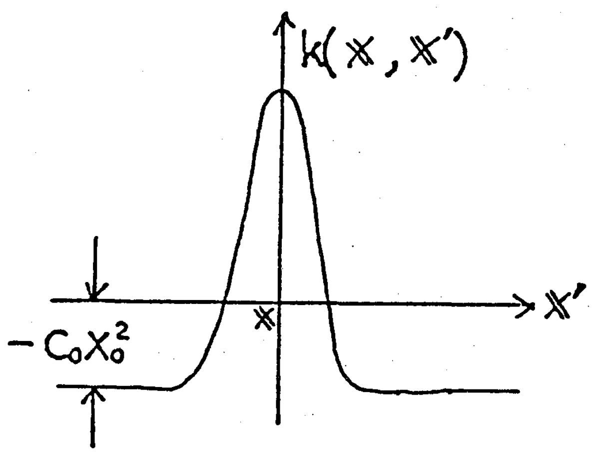

図8．7

4）1－パラメーター族（1－パラメーターで表わされる信号パターン）

外界から来るパターン $\boldsymbol{x}$ の集合が，一つのパラメーターで決定される曲線上にある場合を考える．例えば，２次元平面内で空間的に細長く並んだパターンが常に入力されて，それらのパターンは，鉛直方向に対する角度 θ だけに依っているとする．信号空間で見た場合は，$\boldsymbol{x}(\theta)$ が丁度この角度 θ に並んでいるような時に信号の現われる確率 $p(\boldsymbol{x}) = p(\theta)$ が 0 でない値を持ち，他のパターンの時は $p(\boldsymbol{x}) = 0$ であると考えることもできる．これは，視覚野に於ける特徴抽出細胞の形成を調べるのに適する（図8．8）．

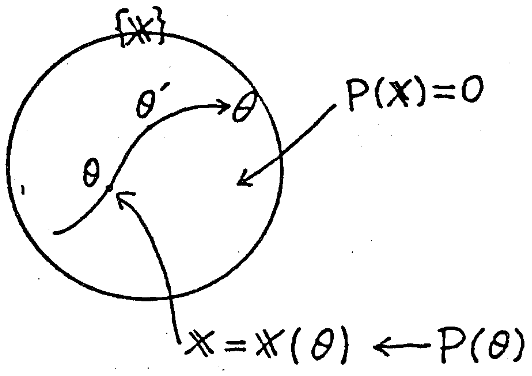

図8．8

これにともない，方程式 (8.7)，(8.23) は，次のように書きかえることができる．

$$U(\xi, \theta) \equiv U(\xi, \boldsymbol{x}(\theta))$$

$$A(\xi, \theta) \equiv S(\xi) \cdot \boldsymbol{x}(\theta) - S_0\, x_0 = A(\xi, \boldsymbol{x}(\theta))$$

$$k(\theta, \theta') \equiv k(\boldsymbol{x}(\theta), \boldsymbol{x}(\theta'))$$

を用いて，

$$U(\xi, \theta) = A(\xi, \theta) + w \circ f(U) \tag{8.25}$$

$$\tau' \frac{dA(\xi, \theta)}{dt} = -A(\xi, \theta) + k * f(U) \tag{8.26}$$

ここで，$k * f(U) = \int k(\theta, \theta')\, p(\theta')\, f[U(\xi, \theta')]\, d\theta'$ であり，θ 空間の均質性を仮定し，$k(\theta, \theta') = k(\theta - \theta')$ とする．（図8．9）．
$p(\theta) =$ 定数のとき，これらの方程式の解として図8．10のような，

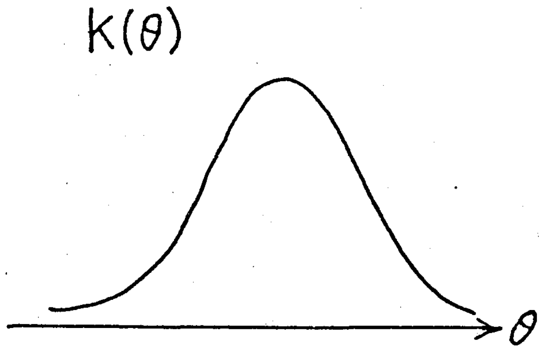

図8．９

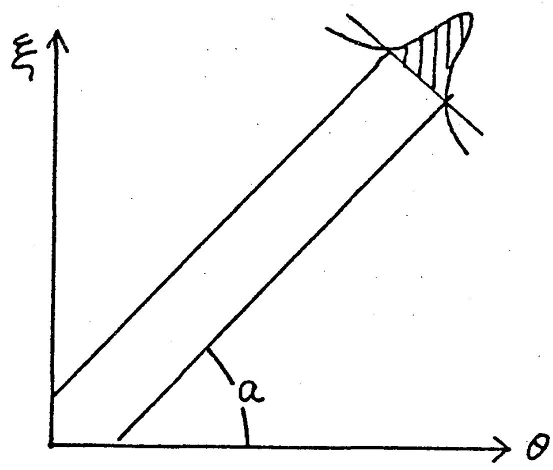

図8．１０

$$U(\xi,\theta)=g(\xi-a\theta) \tag{8.27}$$

を仮定する．g の形及び a の値が未定になっていることに注意する．(8.25) 式，(8.26) 式から平衡状態の方程式

$$U=k*f[U]+w\circ f[U] \tag{8.28}$$

が得られ，これに (8.27) 式を代入すると g に対する方程式が得られる．この方程式と，条件 $g(\xi-a\theta\pm c)=0$ から，g の形及び定数 a，g の幅 c を求めれば良い．θ に適当なスケール変換を行なえば $a=1$ としてよい．さらに，

$$k(\theta,\theta')\approx\delta(\theta-\theta')-c \tag{8.29}$$

という近似を使って (8.28) 式を解くと解は安定であるが，$k(\theta)$ に幅を持たせると不安定な解になる．$k(\theta)$ に幅を持たせてシミュレーションで解くと，図8．１１に示すように，信号空間の受容野とそれに対応する神経場の影響野がブロック化された解が安定になった．[16] 第一次視覚野に，線の角度に応じたブロック化が起こることと考え合わせると，これは非常に興味ある結果である．

５）．局在興奮解の安定性[1]

自己組織の場を論じるには，神経場の興奮パターンのダイナミックスを論じておく必要がある．外部からの入力がコンスタント c であるとして，１次元の ξ に対して，一様な構造を持った神経場（w が $\xi-\xi'$ だけの関数であるような）の興奮の方程式

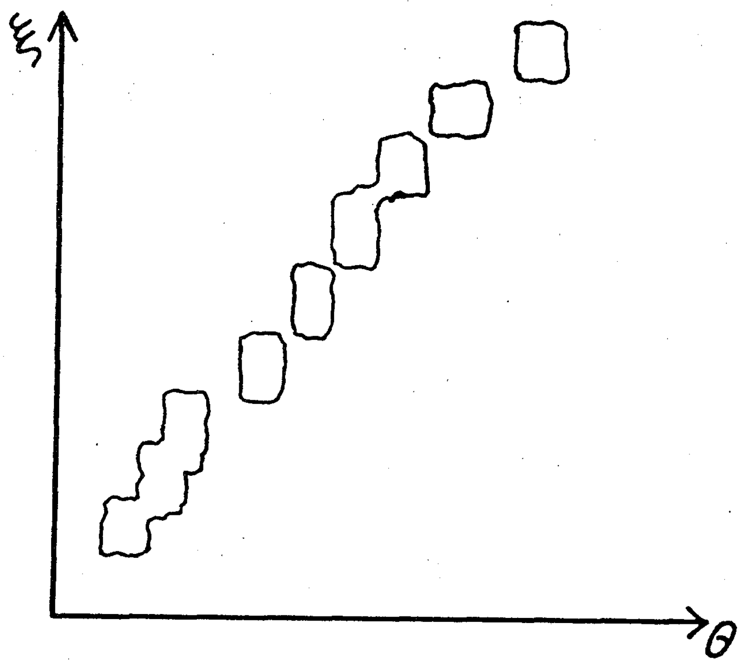

図8．１１

$$\tau\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}=-u(\xi,t)+c+\int w(\xi-\xi')\,1[\,u(\xi',t)\,]d\xi' \tag{8.30}$$

を考える．

はじめに，興奮がどこにも起こっていない状態を考える．興奮していないとき（$u<0$ のとき）$1[\,u\,]=0$ だから，平衡状態では，

$$u(\xi)=c<0 \tag{8.31}$$

これは無興奮の必要十分条件であり，安定であることも自明である．（c をちょっと変えても $u<0$ である）．

次に局在興奮解とその安定性を調べたい．これはなかなか難しい問題であるが，簡単のために単純な局在興奮解の形を仮定し，それに対して図8．１２のようなパラメーターを考える．１次元的な神経場の上である興奮解 $u(\xi,t)$ があったとして，この解が時間と共に不変なら局在興奮解である．　$u(\xi,t)$ のエッヂ x_1，x_2 が時間的に変化すると，その幅 $a=x_2-x_1$ も変化するが，それが 0 であるかどうかを調べて安定性を見る．計算は次のとおりである．

$u(\xi,t)$ の時間変化は，

$$u(\xi,t+\delta t)=u(\xi,t)+\dot{u}\,\delta t$$

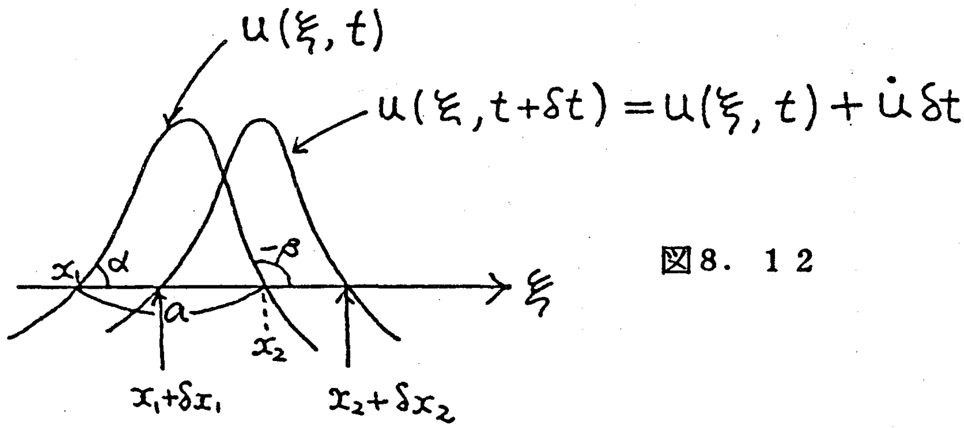

図8．１２

$$= u(\xi, t) + \frac{1}{\tau}[-u(\xi, t) + c$$

$$+ \int w(\xi - \xi')\, 1(u(\xi', t))\, d\xi']\, \delta t \tag{8.32}$$

時刻 t でのエッヂ x_1， x_2 及び，時刻 $t+\delta t$ でのエッヂ $x_1+\delta x_1$， $x_2+\delta x_2$ に対して，

$$u(x_i, t) = u(x_i + \delta x_i, t + \delta t) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

従って，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t = 0 \tag{8.33}$$

x_i を t の関数と考えると陰関数定理から，

$$\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)_{x=x_i} = -\frac{\partial u}{\partial t} \Big/ \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_{x=x_i} \tag{8.34}$$

よって，

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\tau\alpha}[c + W(x_2 - x_1)] \tag{8.35}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau\beta}[c + W(x_2 - x_1)] \tag{8.36}$$

但し，

$$W(x) = \int_0^x w(x')\, dx' \tag{3.37}$$

ここで α， β はエッヂ x_1， x_2 での u の勾配で，

$$\alpha = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=x_1} \qquad -\beta = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=x_2}$$

である．よって，局在興奮解の幅 $a = x_2 - x_1$ の時間変化は，

$$\dot{a} = \dot{x_2} - \dot{x_1} = \tau^{-1} (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) [c + W(a)] \tag{8.38}$$

図8．１３に示すように相互抑制性の神経場では，β，$\alpha > 0$ の範囲で，ある幅 a_2 を持つ局在興奮解が存在する．

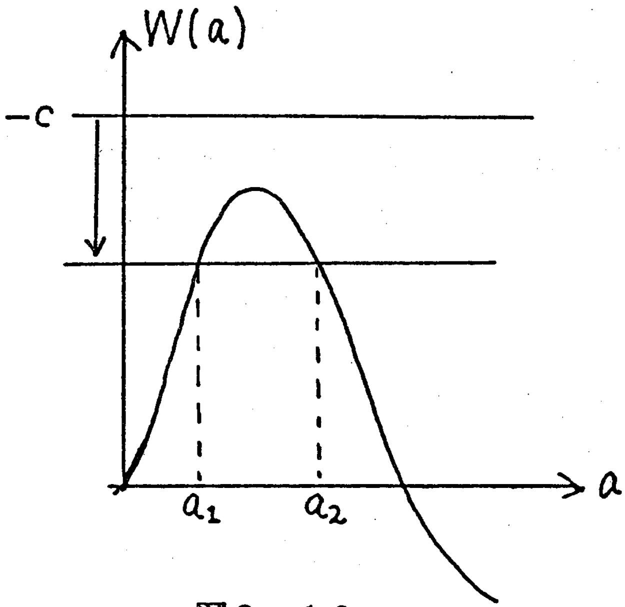

図8．１３

以上は単純な形の局在興奮解に対する議論であったが，もっと複雑な形の局在興奮解とか，複数個の局在解が同時に存在する場合とか，いろいろ拡張した場合も部分的に調べられている．また２次元の場合は，１次元のエッジの代わりに２次元の図形，例えば円の形の変形に対する安定性等を，フーリエ係数等で議論することも考えられている．

生物における視覚野のブロック構造の自己組織化による形成に関しては，生後４週間位が自己組織化の時期ともいわれている．ブロック構造も，はじめから大まかな結合として弱くはあるが存在し，生後幾日かで，外界からの刺激による学習で，より正確な自己組織化が起こると考えられる．このような問題に対して，この神経回路網モデルの自己組織化はその突破口として，今後，非常に興味のある問題であろう．

ⅠX．記録者　註

この講義ノートは甘利俊一先生が，東北大・理学部大学院講義室で行なわれた集中講義（１９８８年７月１１日～１４日）をもとにして作成したものです．

ややもすると数式の洪水になりそうな問題を，ダイレクトに結論に結びつく図を用いて納得させてしまう甘利節が伝わるようにと，図を多く用いて順序もなるべく講義の順に沿うように書いたつもりです．数学記号などについては，なるべく物理分野になじみが深い形に書き換えるように心がけました．豊富な図を使用した甘利先生の明解な講義を文章化してまとめるにあたって，記録者の独断で修正補足を行なってこのノートとなってしまいましたが，もっと舌足らずでない方法が合ったかも知れません．

神経回路網に関する研究は生物学，医学，情報科学，数学，物理学，工学，認知科学等多くの学問分野にまたがるものであり，それだけに非常に興味深い分野だと思います．本稿が，この神経回路網の研究が，物理学の分野で更に強い関心をもたれるための一助となることを希望しています．御多忙にも拘らず原稿に目をとうして頂いた甘利先生に心から感謝申し上げます．

最後に意味不明瞭な点等を御指摘下さった応用物理学科の猪苗代教授，浜中君，その他，この講義ノートの研究室ゼミで誤記の訂正等でお世話になった松原助教授はじめ研究室の皆様に感謝致します．応用物理学科に属する私に，甘利先生の講義を聴講する機会を与えてくださり，また甘利先生の監修をとりはからって下さった物理学科の都築教授に心から感謝致します．（田森佳秀）

（補記）甘利先生は超御多忙にもかかわらず東北大学理学研究科で，すばらしい，そして挑発的な講義をして下さり，心から感謝いたしております．講義ノートを物性研究にに出させていただくことに御同意下さいましたので，昨年京大でなされた講義のノート（物性研究　47－6(1987－3)　）のことも考えて，”神経場の自己組織”を中心に今回はノートを作り，先のものと合わせてひとまとまりのものとしようと計画しました．ところが田森佳秀氏（東北大・工・応物・猪苗代研院生）がすばらしい講義ノートを作ってくれましたので，全コースの記録を提供することにしました．甘利先生の監修付きです．篠本滋氏によるノートと合わせて活用下さい．田森佳秀氏に感謝いたします．あまりにすばらしい出来なので，甘利先生御自身の著書「神経回路網の数理」（産業図書，

１９７８）が売れなくならないかと心配です．（都築）

References

1. 甘利俊一，神経回路網の数理 -脳の情報処理様式-，産業図書, 東京, 1978.

2. 甘利俊一, "脳の情報処理機構," 電子通信学会論文誌, vol. J69-D, no. 8, pp. 1133-1144, 1986.

3. 甘利俊一, "神経回路網の数理," 物性研究, vol. 47-6, pp. 571-587, 1987-3.

4. 麻生英樹, ニューラルネットワーク情報処理, 産業図書, 東京, 1988.

5. 合原一幸, ニューラルコンピュータ，東京電機大学出版局, 東京, 1988.

6. J. J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.

7. J. A. Anderson, "A simple neural network generating an interactive memory," *Math. Biosciences*, vol. 14, pp. 197-220, 1972.

8. K. Nakano, "Associatron - A model of associative momory," *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-2, no. 3, pp. 381-388, 1972.

9. T. Kohonen, "Correlation matrix memories," *IEEE Trans. on Computers*, vol. C-21, pp. 353-359, 1972.

10. S. Amari and K. Maginu, "Statistical neurodynamics of associative memory," *Neural Networks*, vol. 1, pp. 63-73, 1988.

11. R. Meir and E. Domany, "Layered feed-forward neural network with exactly soluble dynamics," *Phys. Rev. A*, vol. 37, no. 2, pp. 608-618, 1988.

12. B. Kosko, "Adaptive Bidirectional Associative Memories," *Appl. Opt.*, vol. 26, pp. 4947-4960, 1987.

13. S. Amari, "Learning patterns and patten sequences by self-organizing nets of threshold elements," *IEEE Trans. on Computers*, vol. C-21, no. 11, pp. 1197-1206, 1972.

14. D. J. Amit, H. Gutfreund, and H. Sompolinsky, "Spin-glass models of neural networks," *Phys. Rev. A*, vol. 32, no. 2, pp. 1007-1018, 1985.

15. T. Kohonen, *Associative memory (A system-theorical approach),* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1977.

16. A. Takeuchi and S. Amari, "Formation of topographic maps and columnar microstructures," *Biol. Cybernetics*, vol. 35, pp. 63-72, 1979.