

確率進化ゲームの理論とその展開

神取道宏

東京大学大学院経済学研究科

「進化ゲーム」や「ゲームにおける学習」の理論は、各プレーヤーが自らの利得を上げる方向に行動を調整する動学的過程を研究の対象とし、一定の条件の下でこれがゲームにおける安定な状態、すなわちナッシュ均衡¹に収束することを示してきた。しかし、通常ゲームには局所安定な均衡が多数あることが多く、伝統的な議論ではそのどれが実現しやすいかを議論することは出来なかった。確率進化ゲームは突然変異、利得の一時的ゆらぎ、学習過程での実験、過ちなど、さまざまな理由で起こると考えられる確率的なゆらぎをモデルに明示的に組み込むことで、こうした問題に解答を与えようとするものである。このような場合、一旦局所安定な均衡に到達しても、ゆらぎによってシステムは他の均衡へ移行する可能性がある。確率進化ゲームでは、こうしたシステムの長期的振る舞いを確率過程の定常分布としてとらえ、ゆらぎが小さいときには、多くのゲームにおいて、多数ある均衡のなかのただ一つのものの上でシステムがほとんどの時間を過ごすことを明らかにした。このような、ゆらぎに対して長期的に頑強な均衡を「長期確率安定的」と呼ぶ。

局所安定な均衡が多数ある系にゆらぎを導入してそのうち一つのもの達成するという類似の問題は、物理学での焼きなまし(annealing)現象の分析や、そのメカニクスを応用した確率的最適化アルゴリズムの simulated annealing 法として研究されてきた。これらにおいては、系の推移確率がいわゆる詳細釣り合い条件 (detailed balance condition) を満たす比較的単純な形をしており、長期にわたる系の振る舞いの分析は比較的容易である。これに対して、多くのゲーム理論的应用ではこのような条件が自然には満たされないケースが多い。したがって、より一般的な確率過程を分析する、より強力な手法が必要になる。確率進化ゲームの理論は、このために Freidlin, M.I. and Wentzell, A.D. (1984) のアイデアに基づく「遷移樹形図分析」というあらたな手法を導入し、さまざまな成果をあげてきた。

ゲーム理論における長期確率安定性の考え方を提唱したのは Foster, D. and P. Young (1990) “Stochastic Evolutionary Game Dynamics”, *Theoretical Population Biology*, 38:219-32.

であるが、連続状態・連続時間を使ったモデルに若干の数学的難点があることが指摘され²、

(3) にあげてある Kandori, Mailath, and Rob (1993) が遷移樹型図分析の手法を最初に導入し、一般理論への端緒を作った。この分析手法は、その後 (3) にある Young (1993) と Kandori and Rob (1995) によって一般化された。以下では、確率進化ゲームにおける代表的

¹ 各プレーヤーについて、自分ひとりだけが戦略を変えても得をしないということが成り立っている状態を、ナッシュ均衡という。現代的なゲーム理論の概要については、たとえば R.ギボンズ『経済学のためのゲーム理論入門』創文社、1995 を参照。

² Foster, D. and P. Young (1997) “A Correction to the Paper, ‘Stochastic Evolutionary Game Dynamics’”, *Theoretical Population Biology*, 51:77-78. を参照。

研究会報告

な文献をリストアップすることにする。興味をもたれた読者の研究の参考となれば幸いである。

(1) 全体の参考書

Kandori, M. (1997) "Evolutionary Game Theory in Economics" (Section 6) in Kreps and Wallis (eds.), *Advances in Economics and Econometrics*, Vol 1, Cambridge University Press.
確率進化を含む経済学での進化ゲーム理論一般のサーベイ。

Fudenberg, D. and D. Levine (1998) *Theory of Learning in Games* (Ch. 5), MIT press.
確率進化の基本事項が手際よく解説されている (次の本にも確率進化の解説がある)。

Vega-Redondo, F. (1996) *Evolution in Games: Theory and Economic Applications* (Ch. 5), Oxford University Press.

Samuelson, L. (1997) *Evolutionary Games and Equilibrium Selection*, MIT Press.
確率進化を含む著者自身の貢献を中心にした研究書。

Young, P. (1998) *Individual Strategy and Social Structure*, Princeton University Press.
確率進化にかんする著者自身の貢献を中心にした解説書。

(2) マルコフ連鎖の基礎事項

Hoel, P. G., S. C. Port and C. J. Stone (1972) *Introduction to Stochastic Processes* (Ch. 2, § 3), Waveland Press.

(3) 長期確率安定性と遷移樹型図分析

Freidlin, M.I. and Wentzell, A.D. (1984) *Random Perturbations of Dynamical Systems* (Ch. 6), New York: Springer-Verlag.

境界のないコンパクトな連続状態空間上の連続時間確率過程における長期確率安定性を研究したものであるが、その際に用いる有限状態空間上の離散時間マルコフ過程に関する結果が、確率進化ゲームの分析用具としてきわめて有用であることを示したのが次の論文である。

Kandori, M. and Mailath, G. and Rob, R. (1993) "Learning, Mutation, and Long Run Equilibria in Games", *Econometrica*, 61, 29-56.

Kandori, M. and Rob, R. (1995) "Evolution of Equilibria in the Long Run: A General Theory and Applications", *Journal of Economic Theory*, 65, 383-414.

Young, P. (1993) "The Evolution of Conventions", *Econometrica*, 61, 57-84.

(4) 長期確率安定性の基本性質

・ 局所安定性との関係

Nöldeke, G. and L. Samuelson (1993) "An Evolutionary Analysis of Backward and Forward Induction", *Games and Economic Behavior*, 5, 425-454.

Samuelson, L (1994) "Stochastically Stable Sets in Games with Alternative Best Replies", *Journal of Economic Theory*, 64, 35-65.

・ 十分条件と待ち時間：Radius, Coradius, and Modified Coradius

Ellison G. (2000) "Basins of Attraction, Long Run Stochastic Stability, and the Speed of Step-by-Step Evolution", *Review of Economic Studies*, 67, 17-45.

(5) さまざまなゲームへの応用

・ 1/2-dominance

Ellison G. (2000) "Basins of Attraction, Long Run Stochastic Stability, and the Speed of Step-by-Step Evolution", *Review of Economic Studies*, 67, 17-45.

Maruta, T (1997) "On the Relationship between Risk-Dominance and Stochastic Stability", *Games and Economic Behavior*, 19(2), 221-34.

・ ネットワーク外部性

Kandori, M. and Rob. R. (1998) "Bandwagon Effects and Long Run Technology Choice", *Games and Economic Behavior*, 22, 30-60.

・ ナッシュ交渉解

Young, P. (1993) "An Evolutionary Model of Bargaining", *Journal of Economic Theory*, 59, 145-168.

・ Kalai-Smorodinsky Solution

Young, P. (1998) "Conventional Contracts", *Review of Economic Studies* 65, 773-792

・ ポテンシャルゲーム

Monderer, D. and L. Shapley (1996) "Potential Games", *Games and Economic Behavior*, 14, 124-143.

Ui, Takashi (1997) "Quantal Responses, Potentials, and Stochastic Stability of Equilibria", mimeo 横浜国立大学.

・ シグナリングと Forward Induction

Nöldeke, G. and L. Samuelson (1997) "A Dynamic Model of Equilibrium Selection in Signaling Markets", *Journal of Economic Theory*, 73, 118-156.

Amaya, K. (1997) "An Evolutionary Analysis of Equilibrium Selection in Signaling Games", mimeo. MIT.

・ ホールドアップ問題

Troger, T. (2002) "Why Sunk Cost Matter for Bargaining Outcomes: An Evolutionary Approach",

研究会報告

Journal of Economic Theory, 102, 375-402.

・ 実証分析

Burke, M. and P. Young (2001) "Competition and Custom in Economic Contracts: A Case Study of Illinois Agriculture", *American Economic Review*, 91, 559-573.

(6) 局所的關係

Ellison, G. (1993) "Learning, Local Interaction, and Coordination", *Econometrica*, 61, 1047-1072.

Ely, J. (2002) "Local Conventions", *Advances in Theoretical Economics* (BR Journal in Theoretical Economics), VI 2, Issue 1.

Anderlini, L. and A. Ianni (1996) "Path Dependence and Learning from Neighbours", *Games and Economic Behavior*, 13, 141-177.

Anwar, A. (2001) "On the Co-Existence of Conventions", forthcoming in *Journal of Economic Theory*.

Araki, K. and H. Low (1997) "Long Run Equilibria: Expected Waiting Times with Noisy Selection and Local Interaction", mimeo 早稲田大学.

Matsushima, H. (1999) "The Role of Mobility among Regions in Coordination", CIRJE discussion paper F-53, 東京大学.

(7) **Mutation Rate** が一様でないケース

Bergin J. and B. L. Lipman (1996) "Evolution with State-Dependent Mutations", *Econometrica*, 64, 943-56.

Maruta, T (2002) "Binary Games with State Dependent Stochastic Choice", *Journal of Economic Theory*, 103, 351-376.

van Damme, E. and J. Weibull (2001) "Evolution in Games with endogenous Mistake Probabilities", forthcoming in *Journal of Economic Theory*.

・ Logit 型ノイズ

McKelvey, R. D. and T. R. Palfrey (1995) "Quantal Response Equilibria for Normal Form Games", *Games and Economic Behavior*, 10, 6-38.

Blume, L. (1993) "The Statistical Mechanics of Strategic Interaction", *Games and Economic Behavior*, 5, 387-424.

Blume, L. (1995) "The Statistical Mechanics of Best-Response Strategy Revision", *Games and Economic Behavior*, 11, 11-45.

Blume, L. (1999) "How Noise Matters", mimeo. Cornell University.

Ui, Takashi (1997) "Quantal Responses, Potentials, and Stochastic Stability of Equilibria", mimeo 横浜国立大学.

- ・ Probit 型ノイズ

Myatt, D. and Wallace (2002) "A Multinomial Probit Model of Stochastic Evolution",
mimeo. Oxford University.

(8) その他の分析手法

- ・ 出生死亡過程

Amir, M. and S. K. Berninghaus, (1996) "Another Approach to Mutation and Learning in Games",
Games and Economic Behavior, 14, 19-43

Binmore, K. and L. Samuelson (1993) "Muddling Though: Noisy Equilibrium Selection", *Journal of Economic Theory*, 74, 235-265.

- ・ 連続モデルと Fokker-Planck 方程式

Foster, D. and Young, P. (1990) "Stochastic Evolutionary Game Dynamics," *Theoretical Population Biology*, 38, 219-232.

Fudenberg, D. and Harris, C. (1991) "Evolutionary Dynamics with Aggregate Shocks", *Journal of Economic Theory*, 57, 420-441.

Binmore, K., L. Samuelson, and R. Vaughan (1995) "Musical Chairs: Modeling Noisy Evolution",
Games and Economic Behavior, 11, 1-35.

Vaughan, R. (1993) "Evolutive Equilibrium Selection I: Symmetric Two Player Binary Choice Game", Mimeo. University College London.

- ・ 非斉時過程 - 時間を通じたゆらぎの減少

Robles, J (1998) "Evolution with Changing Mutation Rates", *Journal of Economic Theory*, 98, 207-23.

Sandholm, W. H. and A. Pausner (1998) "Noisy Evolution with Population Growth Yields History Dependence", *Games and Economic Behavior*, 22, 84-120.

- ・ 利得の拡散による均衡選択

Burdzy, K., D. M. Frankel and A. Pauzner (2001) "Fast Equilibrium Selection by Rational Players Living in a Changing World", *Econometrica*, 69, 163-189.