≪展望・解説≫

# 線形計画法の現状

今野　浩*

## はじめに

今年は，1947年にジョージ・ダンツィクが単体法の原型を発表してから満四十周年という節目の年である．線形計画法のアルゴリズムは，50年代には改訂単体法や有界変数法，60年代には分解原理，積行列法，一般化有界変数法，そして70年代にはLU分解法，ネットワーク単体法，楕円体法などと10年ごとに装いを新たにしてきた（これらについては線形計画法の基本的教科書[5,6,23]を参照されたい）が，80年代半ばにKarmarkarの射影変換法[17]が登場したのをきっかけに，専門家の間に線形計画法の新たな飛躍を期待するムードが高まっている．

単体法が凸多面集合のヘリをたどる方法であるのに対して，Karmarkar法（以下ではK法という）はその（相対的）内部を進んでゆく方法である．このような「内点法」は，実は1954年にFrisch[8]によって提案されていたが，線形計画問題の解法としては誰も本格的に取り上げないまま歴史の中に埋もれていた．それが30年後に突然噴火して，40年間不動であった“線形計画法イコール単体法”のパラダイムを揺がしはじめたというわけである．

K法によって新らしい可能性が拓かれて以来，筆者が知る限りでもすでに1ダースを越える内点法が発表されており，若い優秀な世代が続々とこの分野に参入している．これがクーンがいうところの本格的なパラダイム変革につながるかどうかを現時点で見極めることは難かしいが，ともかくこれが一時の流行で終るものでないことだけは確かなようである．

一方，追われる立場に立たされた単体法（組合わせ的算法）の側にも，80年代に入っていくつかの新らしい展開がみられる．確率モデルを用いた単体法の平均反復回数の分析，精密なインプリメンテーション技術による分解原理の復活，単体法の組合せ論的側面を抽象した有向マトロイド理論の発展，ネットワーク問題に対する強多項式算法などがその代表的なものである．

そこで本稿では，ここ数年の線形計画法の計算法における新らしい動きの中から，筆者の知る範囲で重要と思われるものをいくつか紹介することにしよう．

## 1.　線形計画問題と内点法

内点法の出発点となったK法そのものについては，すでにあちこちで解説〔例えば 23),34),35)〕が出ているので詳細はそれらに譲り，以下ではその概略を述べたあと，K法以後の内点法の中から代表的なもの3つを紹介する．

### 1.1　K法の概略

K法は次の形に書かれた線形計画問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & z=c^t x\\ \text{条　件} & Ax=0,\ \ e^t x=1,\ \ x\geqq 0\end{array}\right. \qquad (1.1)$$

を解くための方法である．ここでは $A\epsilon R^{m\times n}$ $(\mathrm{rank}A=m)$, $e^t=(1,1,\cdots\cdots,1)\,\epsilon R^n$ であるものと約束する．

一般の線形計画問題を（係数行列の疎大性(sparsity)を損わずに）(1.1) の形に変換する方法については，31),32) などを参照して頂きたい．以下では(1.1) の実行可能領域を

$$X=\{x\epsilon R^n\,|\,Ax=0,\ \ e^t x=1,\ \ x\geqq 0\} \qquad (1.2)$$

と書いておこう．

K法では次の2つの条件を仮定する：

(i)　すべての成分が正であるXの点 $x^0$ が与えられている．　(1.3)

(ii)　$\min\{c^t x\,|\,x\epsilon X\}=0$　(1.4)

前者は単なる技術的な仮定にすぎないが，後者は（実質的に問題(1.1) が解けていることを仮定するわけだから）当初はかなりきつい条件とみられていた．もちろん(1.1)をその双対問題と組合わせれば，条件(ii)をみたすように問題を書き直すことができるが，そうすると問題のサイズが大幅に拡大されるため，大規模問題の解法としては現実的でなくなってしまうのである．

Recent Advances in Linear Programming. By *Hiroshi Konno* (Tokyo Institute of Technology, Faculty of Engineering)

* 東京工業大学工学部

（この難点を取り除く方法については後述する）

K法では$X$の点 $x^0=(x_1^0, \cdots\cdots, x_n^0)>0$ が与えられているものとして，

$$D=\begin{pmatrix} x_1^0 & & & 0 \\ & x_2^0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_n^0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

を用いて変数$x$に射影変換：

$$y=\frac{D^{-1}x}{e^tD^{-1}x} \tag{1.6}$$

を施す．すると問題（1.1）は

$$\left|\begin{array}{ll} 最小化 & \dfrac{c^tDy}{e^tDy} \\ 条\quad件 & ADy=0,\ \ e^ty=1,\ \ y\geqq 0 \end{array}\right. \tag{1.7}$$

と変形される．$D$の定義から明らかなとおり，$x$空間の点 $x^0$ は$y$空間の点 $e/n$ に射影される．

ここで，目的関数の分子 $(Dc)^ty$ を最小化する方向ベクトル $-Dc$ を超平面

$$Y=\{y\,|\,ADy=0,\ \ e^ty=1\} \tag{1.8}$$

の上に正射影して，長さ $1/\sqrt{n(n-1)}$ のベクトル$p$を生成する．そして適当なステップサイズ$\alpha>0$を用いて

$$y^1=(1/n)e+\alpha\cdot p \tag{1.9}$$

とおき，これを$x$空間に逆射影して$X$の点

$$x^1=Dy^1/e^tDy^1 \tag{1.10}$$

を生成する．以下新たな点 $x^1$ と $x^0$ 考えて同じステップを繰返すのである．

このようにすると $x^k$ は次第に最適解 $x^*$ に近づくが，$x^k$ が境界に近づいても射影されたベクトル $y^k=\dfrac{1}{n}e$ は境界から遠く離れているので，$y$空間では方向ベクトルやステップサイズの選び方がきゅうくつにならないのが特徴である．

実際，Karmarkar は上の方法で $\alpha=1/4$ とおくと各ステップで次のポテンシアル関数：

$$f(x)=n\ \ln\ c^tx-\sum_{j=1}^{n}x_j\equiv\ln\frac{(c^tx)^n}{x_1x_2\cdots x_n} \tag{1.11}$$

が $\delta\,(\geqq 0.108)$ だけ減少し，その結果第$k$回目の反復で得られる解を $x^k$ とすると

$$c^tx^k\leqq c^tx^0\ \exp(-k\delta/n) \tag{1.12}$$

が成立することを示した．

これより，$K$法は栄光ある“多項式オーダー”の解法であることが示されるのであるが，この算法で最も手間を食うのが方向ベクトル$p$を生成する部分である．ここで

$$M=\begin{pmatrix} AD \\ e^t \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

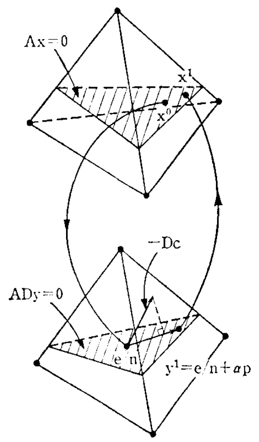


図 1

とおくと

$$p=-(I-M^t(MM^t)^{-1}M)Dc \tag{1.14}$$

で与えられるが，この計算をストレートにやろうとすると $m^3$ 回程度の手間がかかる．$A$ が疎であっても $MM^t$ は一般に稠密だから，この部分の計算はきわめて高価なものになってしまうのである．

## 1.2　K法その後の展開

Karmarkar は，このアルゴリズムが単体法より数十倍程度速いことを84年以来一貫して主張し続けている（85年春の ORSA/TIMS，85年8月の国際数理計画法シンポジウム等）が，その実験環境や途中経過を公表しなかったため，当初専門家の間にはその結果を疑問視する向きが多かった．

因みに，1984年秋に J. Tomlin[32] が体系的なフォロー・アップ実験を行っているが，制約式100本，変数200個程度の問題群を解いた結果，

(i) K法は（直線探索によってステップサイズ$\alpha$を決めてやっても）単体法に比べてかなり遅い．特に$p$を生成するステップはきわめて高価であり，効率的な近似法を開発しなければ単体法を凌駕することは難かしい．

(ii) K法が収束するまでに必要とされる反復回数は，問題のサイズが大きくなっても余り変化しない．この結果K法は当初予想したほどには遅くない．

という主旨の報告をしている．

さて85年になると，まず Todd-Burrell[31] によってK法の第2の仮定(1.4) を取除く方法が提案された．それを説明するため，(1.1) の双対問題：

$$\left|\begin{array}{ll} 最大化 & v \\ 条\quad件 & A^tu+ev\leqq c \end{array}\right. \tag{1.15}$$

を導入しよう．容易に確かめられるとおり，任意のベ

クトル $u \epsilon R^m$ に対して

$$v=\min_{l \leqq j \leqq n}(c-A^t u)_j \qquad (1.16)$$

とおくと $(u, v)$ は (1.15) の実行可能解となっている．したがって双対定理により

$$v \leqq \min\{c^t x \mid x \epsilon X\} \qquad (1.17)$$

である．そこで $x^k$ が生成されるたびにうまく双対問題(1.15) の実行可能解 $(u^k, v^k)$ を計算して（詳細は31)参照)，この $v^k$ を用いてポテンシアル関数を

$$\tilde{f}_k(x)=n \ln (c^t x-v^k)-\sum_{j=1}^{n} x_j \qquad (1.18)$$

と定義しなおす．そして，このポテンシアル関数に対してK法と全く同じ手続きをあてはめると，(1.1) の最適解 $x^*$ に対して次の不等式：

$$(c^t x^k-c^t x^*) \leqq (c^t x^0-c^t x^*) \exp(-k\delta/n) \qquad (1.19)$$

が成立し $c^t x^k \longrightarrow c^t x^*$ となる，というわけである．

同様の結果は，ほぼ同じ時期に東工大の小島氏によっても得られていたが，同氏と埼玉大の刀根氏は85年以来本格的な共同研究に着手し，様々な結果を得ている[20,21,33]．そして最近の論文[24]では，

(イ) 共役勾配法を用いた $p$ の近似手法

(ロ) 上で述べた双対変数の利用

(ハ) 最適解で値が 0 となる変数の早期検出

(ニ) 基底形式表現の利用

などを組込んだ改訂K法をインプリメントして，Avis-Chvátal[3]のランダム LP

$$\left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & e^t x \\ \text{条　件} & Ax \leqq 10000 \ (A \epsilon R^{m \times n}) \\ & x \geqq 0 \end{array} \right. \qquad (1.20)$$

（$A$のすべの成分は 1 から1000の範囲の一様乱数）に対して実験を行った結果，必要となる反復回数は$m$がふえても余り変化せず，$m$が 100 を越えるあたりで改訂K法が単体法の効率を上廻るということを報告している．現在のところは，係数行列が疎な場合については単体法の方が速いということであるが，大型問題に対する今後の展開が楽しみである．

### 1.3 Gill-Murray-Saunders-Tomlin-Wright の方法

一般の制約付き最小化問題：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条　件} & h_i(x)=0, \ i=1, \cdots, m \\ & g_j(x) \geqq 0, \ j=1, \cdots, l \end{array} \right. \qquad (1.21)$$

の解法として古くからよく知られているものに

$$g_i(x^0)>0, \ j=1, \cdots, l$$

をみたす $x^0$ が存在する場合に適用可能な内点罰金法がある．この方法は，正のパラメータ $r$ を用いて不等式制約を目的関数の中に埋めこんだ罰金関数：

$$F(x:r)=f(x)+r\sum_{j=1}^{l} \ln(1/g_j(x)) \qquad (1.22)$$

を導入し，これを目的関数とする問題：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{最小化} & F(x:r) \\ \text{条件} & h_i(x)=0, \ i=1, \cdots, m \end{array} \right. \qquad (1.23)$$

の最適解を $x(r)$ とすると

$$x^*=\lim_{r \to 0} x(r) \qquad (1.24)$$

がもとの問題の最適解になるという性質を利用している（この詳細については例えば 22) を参照）

線形計画問題 (1.1) にこの考えを適用すると，(1.23) は

$$\left| \begin{array}{ll} \text{最小化} & F(x:r)=c^t x-r \ln \sum_{j=1}^{l} x_j \\ \text{条　件} & Ax=0 \\ & e^t x=1 \end{array} \right. \qquad (1.25)$$

と書ける．スタンフォード大学の Gill[11]らはこの問題の目的関数がK法のポテンシアル関数と良く似ていることを手掛りに分析を行った結果，標準的な内点罰金法の枠組の中でK法の再構成が可能であることを示した．

いま問題(1.1) の 1 つの実行可能解 $x^k$ が与えられたものとし，

$$x=x^k+d \qquad (1.26)$$

とおいて $F(x:r)$を $x^k$ のまわりで 2 次の項までテーラー展開する：

$$\begin{aligned} F(x:r) &= F(x^k+d:r) \\ &\fallingdotseq F(x^k:r)+\nabla F(x^k:r)d \\ &\quad +\frac{1}{2}d^t \nabla^2 F(x^k:r)d \end{aligned}$$

次いでこの近似式を目的関数とする 2 次計画問題：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{最小化} & \nabla F(x^k:r)d+\frac{1}{2}d^t\nabla^2 F(x^k:r)d \\ \text{条　件} & A(x^k+d)=0 \\ & e^t(x^k+d)=1 \end{array} \right. \qquad (1.27)$$

を解いてその最適解を $d^k$ とおき，パラメータ $\alpha_k>0$ を用いて，

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k d^k \qquad (1.28)$$

を新たな解とする．このようにして $x^{k+1}$ を定める方法は内点罰金／ニュートン射影法とよばれているが，この方法で $r$ と $\alpha_k$ を適当に選ぶと，K法と同一の点列 $x^k$, $k=1, 2, \cdots$が生成されるというのが Gill らの得た結果である．

かくして，K法は射影変換という馴染みの薄い道具を用いることなしに，古典的な内点罰金法の一種であることが示されたのであるが，内点罰金法に関してこ

れまでに蓄積された様々な理論的結果を利用できることや，パラメータ $(r, \alpha_k)$ の選び方に自由度があるので，今後のこの方向での展開が期待されている．

なお，(1.27) の最適解 $d^k$ は次の方程式

$$\begin{bmatrix} -\nabla^2 F(x^k : r)A^t & e \\ A & 0 & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^k \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla F(x^k : r) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

を解くことによって得られるが，これをいかにうまく解くかがこの方法の効率化の決め手となる．

Gill らは $m=300$, $n=500$程度までの問題に対して精密な数値実験を行っており，特定の問題に対しては標準的な LP コードである MINOS 5.0と内点ペナルティ／ニュートン射影法がほぼ同程度の効率を示すことを報告している．そして大型問題に対して Karmarkar が言うような驚異的なスピードを実現することは困難であるとしながらも，特定の問題群に対しては単体法はしのぐ可能性があると述べているのは大変興味深い．

### 1.4 Adler-Karmarkar-Resende-Veiga の方法

K法では射影変換という武器を用いて $X$ の点 $x^0$ を $Y$ の点 $y^0=e/n$ に移しかえた．したがって，仮に $x^0$ が $X$ の境界面 $(x_j=0,\ 1 \leqq j \leqq n)$ に近い点であっても，$y^0$ は $Y$ の境界面 $(y_j=0,\ 1 \leqq j \leqq n)$ から離れた点となるから，ポテンシアル関数を減らすにあたって方向ベクトルやステップサイズの選び方に自由度が保たれるのであった．ここで述べる Adler らの方法[2] は，スラック変数の尺度変換というありきたりの手法によって，K法と同じことを実現しようという方法である．

ここでは線形計画問題を次の形

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & z=c^t x \\ \text{条　件} & Ax \geqq b \end{array}\right. \tag{1.30}$$

に書き，$A \epsilon R^{m\mathrm{x}n} (m \geqq n)$でその階数は列の数 $n$ に等しいものとする．スラック変数 $s$ を導入して問題(1.30)を

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & z=c^t x \\ \text{条　件} & Ax-s=b,\quad s \geqq 0 \end{array}\right. \tag{1.31}$$

と書き直して，この問題の実行可能解で

$$Ax^k - s^k = b,\quad s^k > 0 \tag{1.32}$$

をみたすもの（すなわち $Ax^k > b$ をみたすもの）が求まっているものとしよう．

次に，スラック変数 $si$ を $s_i^k$ で割ってスケール変換を施した新たな変数：

$$u_i = s_i/s_i^k,\quad i=1, \cdots, m \tag{1.33}$$

を導入する．ここで

$$D_k = \begin{pmatrix} 1/s_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & 1/s_m^k \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

とおけば，

$$u = D_k s \tag{1.35}$$

と書けるから，$s=D_k^{-1}u$ を(1.31) に代入すると問題は

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & z=c^t x \\ \text{条件} & Ax-D_k^{-1}u=b,\quad u \geqq 0 \end{array}\right. \tag{1.36}$$

と書き改められる．ここで

$$u^k = e = (1,\ 1, \cdots, 1)^t \tag{1.37}$$

とおけば $(x^k,\ u^k)$ はこの問題の実行可能解である．そこで次に $c^t x^{k+1} < c^t x^k$ となる実行可能解 $x^{k+1}$ を求めるため，パラメータ $\alpha_k > 0$ を用いて

$$(x^{k+1}, u^{k+1}) = (x^k, u^k) + \alpha_k (p^k, q^k) \tag{1.38}$$

とおいてみよう．$(x^{k+1},\ u^{k+1})$ が (1.37) の実行可能解であるための条件は

$$D_k A p^k - q^k = 0 \tag{1.39}$$

である．これより

$$A^t D_k^2 A p^k = A D_k q^k$$

だから

$$p^k = (A^t D_k^2 A)^{-1} A D_k q^k \tag{1.40}$$

とすれば (1.39) がみたされる．この式を用いると

$$c^t x^{k+1} - c^t x^k = \alpha_k c^t p^k = \alpha_k c^t (A^t D_k^2 A)^{-1} A D_k q^k$$

となるが，これを最も大きく減らす向きに $q^k$ を選ぶと

$$q^k = -D_k A (A^t D_k^2 A)^{-1} c \tag{1.41}$$

を得る．

これによって$(p^k,\ q^k)$が決まったので，あとは $\alpha_k$ を定めれば次の点 $(x^{k+1}, s^{k+1})$が決まる．Adler ら[2]は

$$\alpha^* = \max\{\alpha \mid A(x^k + \alpha p^k) \geqq 0\} \tag{1.42}$$

とおいて $\alpha_k$ を $0.9\,\alpha^*$ と $0.99\,\alpha^*$ の間の適当な値に設定して数値実験を行い，先述の MINOS に比べて3倍程度速く答が得られると報告している．

このアルゴリズムでも，$p^k$ を計算するステップを効率的に行うことが必要であるが，全く種も仕掛けもないこのような方法が単体法を精密にインプリメントした MINOS コードを上廻るというのは驚きである．しかし，この方法についてはまだ収束性等について余り詳しいことは分っていないようである．

### 1.5 伊理—今井の乗法的罰金関数法

最後に，数ある内点法の中でも最も直接的な伊理—今井の乗法的罰金関数法[16]を簡単に紹介しよう．

この方法も，前項と同じ形の線形計画問題(1.30)を対象とするものであるが，ここでは問題を

$$\begin{cases} \text{最小化} & z=c^t x \\ \text{条　件} & \alpha_i x \geqq \alpha_{i0},\ i=1,\cdots,m \end{cases} \tag{1.43}$$

と書いておこう．

以下では簡単のため，この問題の実行可能領域

$$X=\{x\epsilon R^n \mid \alpha_i x \geqq \alpha_{i0},\ i=1,\cdots,m\} \tag{1.44}$$

は有界で，その内部

$$X^\circ=\{x\epsilon R^n \mid \alpha_i x > \alpha_{i0},\ \ i=1,\cdots,m\} \tag{1.45}$$

は空でないものと仮定する．この場合もちろん(1.43)には最適解が存在するがK法の場合と同様

$$c^t x^*=\min\{c^t x \mid x\epsilon X\}=0 \tag{1.46}$$

であるものとし，さらに簡単のため

$$c^t x>0,\ \ \forall x\epsilon X^\circ \tag{1.47}$$

を仮定する．

さて，これらの条件の下で $X^\circ$ 上で次のような関数

$$F(x)=(c^t x)^{m+1}/\prod_{i=1}^{m}(\alpha_i x-\alpha_{i0}) \tag{1.48}$$

を定義しよう． $X^\circ$ 上ではこの式の分母・分子はともに正だから $F(x)$ の値は正であるが，$X^\circ$ の点 $x$ が $x^*$ に近づくと $F(x)$ は0に近づく．なぜなら $x\to x^*$ のとき分母・分子ともに0に近づくが，分子は0に近づく式を$m+1$ 回かけ合わせているので，仮にすべての $i$ に対して $\alpha_i x-\alpha_{i0}\to 0$ になったとしても，分子の方が速く0に近づくからである．また $X$ は有界だから，$F(x)\to 0$ のときには $c^t x\to 0$ である．したがって(1.43)を解くためには，$F(x^k)\to 0$ となる $X^\circ$ の点列 $x^0, x^1\cdots$を求めてやれば良い．

ところが，実は面白いことに $F(x)$は $X^\circ$ 上で凸関数となることが示されており，このため $F(x)$ を $X^\circ$ 上で最小化するにあたってニュートン法などの収束の速い方法を使えるのがこの方法の特長である．また，最近 Imai[15] はユニークな双対理論を用いて，$c^t x$ の最小値がゼロであるという仮定を取り外すことに成功しており，Avis-Chvátal の問題(1.20) にこのアルゴリズムをあてはめると，反復回数は$\sqrt{n}$に比例する程度でしかふえないことを報告している．

## 2.　単体法の新展開

内点法の紹介が終ったので，次の単体法にかかわる最近の結果を紹介しよう．

### 2.1　単体法の平均反復回数

単体法は過去40年にわたって最適化手法の基本として君臨してきたが，その原因はひとえにその驚異的な効率の良さに求められる．たとえば線形計画問題を標準形の問題：

$$\begin{cases} \text{最小化} & z=c^t x \\ \text{条　件} & Ax=b,\ \ x\geqq 0\ \ (A\epsilon R^{m\times n}) \end{cases} \tag{2.1}$$

の形に書くと，実用上のほとんどの問題が（フェーズＩを含めて）２ｍ～３ｍ 回程度の 反復で 解けてしまうということである．ところが，その一方で Klee—Minty の問題[19]とよばれる次のクラスの問題：

$$\begin{cases} \text{最大化} & z=\sum_{j=1}^{n}10^{n-j}x_j \\ \text{条　件} & 2\sum_{j=1}^{n}10^{i-j}x_j+x_i \leqq 100^{i-1},\ \ i=1,\cdots,n \\ & x_j\geqq 0,\ \ j=1,\cdots,n \end{cases} \tag{2.2}$$

に，原点 $x=0$ を出発点として通常の単体法を施すと，実行可能領域のすべての頂点（基底解）が生成されることが知られて居る．

一般の$n$変数$m$不等式で定義される多面集合の頂点の最大個数は

$$\binom{m-\left[\frac{n+1}{2}\right]}{m-n}+\binom{m-\left[\frac{n+2}{2}\right]}{m-n}$$

で与えられるから[26]これらの頂点のすべてを生成する可能性のある単体法が，なぜ実際にはこれほど効率が良いのかは永らく数理計画法における大きな謎とされてきた．しかし，80年代になってやっとその謎が解明されはじめている．

線形計画問題のデータ（$A, b, c$）に適当な確率分布を設定して，単体法(もしくはその親類)の平均反復回数を求める研究は，データの球対称性を仮定した1982年の Borgwardt[4]によるものが最初であるが，その論文の難解さは， かの R. Karp のような大先生も途中で投げ出すような代物であった[18]．しかしその後，より分り易くしかも現実に即したモデルが提案されているので以下ではその中のいくつかを紹介しよう．

以下では線形計画問題を

$$\begin{cases} \text{最大化} & z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \\ \text{条　件} & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqq b_i,\ \ i=1,\cdots,n\ \ (m\geqq n) \end{cases} \tag{2.3}$$

と書き，データ $a_{ij}$，$b_i$，$c_j$ が次の仮定をみたす確率分布に従うものとしよう

(i)符号対称性

$a^0_{ij}$，$j=1,\cdots,n$，$b^0_i$ をある実数としたとき，線形計画問題(2.3) の第 $i$ 制約式として

$a^0_{i1}x_1+a^0_{i2}x_2+\cdots\cdots+a^0_{in}x_n\leqq b^0_i$

という制約式と

$-a^0_{i1}x_1-a^0_{i2}x_2-\cdots\cdots-a^0_{in}x_n\leqq -b^0_i$

という制約式が現われる確率は互いに等しい

(ii)非退化仮定

$m$本の超平面

$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i,\ \ i=1,\cdots,m$

のどの$n$本についても，それらは確率1で1点のみで交わり，$n+1$ 本以上が同一の点で交わる確率はゼロである．また$n$本の超平面の交点を頂点とよぶことにすると，異なる頂点で目的関数 $c^tx$ が同一の値をとる確率はゼロである．

仮定2を2次元の場合に関して図示したのが**図2.1**である．ここでは $m=5$, $n=2$ であるが，5本の直線 $a_ix=b_i$, $i=1,\cdots 5$ のどの2点も平行でなく，どの3本も同一の点を通過していない．また $c^tx$ の値も頂点ごとに異なる値をとっていることに注意しよう．仮定2は$m$本の直線と目的関数の係数が確率1でこのような位置関係を満たしていることを要求している．

一方，仮定1はこれらの直線で区切られるどちら側も等確率で出現することを要求している．したがって5本の直線に対して全体で $2^5=32$ の領域が等確率で線形計画問題の実行可能領域として出現するが，以下ではこのうちの空集合でないものをセルとよぶことにしよう．図2.1の場合には全体で16個のセルが生成されている．

以下では一般に仮定2をみたす$m$本の超平面によって区切られる次元空間のセル（空でない領域）を $C_1, C_2,\cdots,C_k$ としよう．すでに述べたとおり，これらのセルの各々が線形計画問題の制約領域として等確率で出現するわけだから，$K$個の線形計画問題：

$$P_k：最大化\{c^tx\,|\,x\epsilon C_k\},\ \ k=1,\cdots,K \qquad (2.4)$$

の各々を解くのに必要な反復回数を $f_k$ として

$$\sigma=\sum_{k=1}^{K}f_k/K \qquad (2.5)$$

を計算すれば（実行可能領域が空でない）線形計画問題の平均反復回数が得られるはずである．

Haimovich[12] は，$P_k$ において「フェーズIIの計算が $C_k$ 上で $c^tx$ を最小化する頂点 $V_k$ を出発点として開始される」という前提をおくと，単体法の親類である連続変形法（パラメトリック法）によって $C_k$ 上で $c^tx$ を最大化する頂点（すなわち $P_k$ の最適頂点）にたどりつくまでの平均反復回数が

$$\min\{n,\ \ m-n\} \qquad (2.6)$$

より小さいことを示している．

いま$c$とは平行でないベクトル $0\neq d\,\epsilon\, R^n$ と0から1まで連続的に変化するパラメータ$\lambda$を用いてパラメトリックな目的関数：

$$z(\lambda)=\begin{cases}2\lambda d^tx+(2\lambda-1)c^tx,\ \ 0\leqq\lambda\leqq 1/2 \\ 2(1-\lambda)d^tx+(2\lambda-1)c^tx,\ \ 1/2<\lambda\leqq 1\end{cases} \qquad (2.7)$$

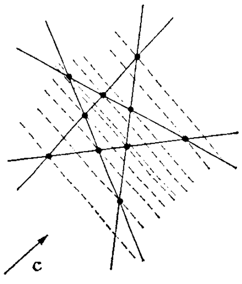


図 2-1

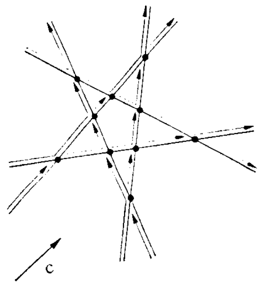


図 2-2

を定義し，$z(\lambda)$を目的関数とする線形計画問題：

$$P_k(\lambda)：最大化\{z(\lambda)\,|\,x\epsilon C_k\} \qquad (2.8)$$

を考えよう．$z(0)=-c^tx$ だから $P_k(0)$の最適解は $C_k$ 上で $c^tx$ を最小化する頂点 $V_k$ と一致する．一方 $z(1)=c^tx$ だから $P_k(1)$ の最適解が $P_k$ の最適解である．そこでパラメトリック単体法を用いて$\lambda$を0から連続的に増加させていったとき，何本の稜線を経由した後に $P_k$ の最適解もしくは無限解が生成されるかを調べてみよう．

ここで図2.1を見て頂こう．この図をよく見ると

(i)どの頂点もちょうど1つのセルの最適頂点となっている．

ことが分る．これは実は2次元空間に限らず仮定2の下では一般の次元の空間において成立する事実である．なぜなら，仮定により各頂点での$z$の値はすべて異なっているから，超平面 $c^tx=c_0$ の右辺の $c_0$ を$-\infty$から$+\infty$に動かしてゆくと，1つの頂点を通過するたびに，それが最適頂点となっている1つのセルを離脱するからである．

そこで次に**図2.2**を見て頂きたい．この図は$\lambda$を0から1まで連続的に増やしてゆく過程で各セルの南西隅に位置する出発頂点（$c^tx$ を最小化する頂点）から北東隅の頂点（$c^tx$ を最大化する頂点）もしくは無限解を生成する無限射線に向かって形成されるパスを表わしているが，この図を観察すると

(ii)$K$個の問題 $P_k, k=1,\cdots,K$ を解くのに必要な反復回数の総数 $\sum_{k=1}^{K}\sigma_k$ は，$m$ 本の超平面によって生成される総線の数 $N_1$ と $c^tx\to\infty$ となる無限射線の総数 $N_2$ の和に等しい．

ことが結論される．

ここで簡単な組合せ計算を行うと

$$N_1+N_2=n_mC_n$$

$$K=mC_n+mC_{n-1}$$

だから結局，各セル上で出発基底解として $c^tx$ を最小化する解を選べば平均反復回数$\sigma$は

$$\sigma=\frac{{}_{n}{}_{m}C_m}{mD_n+mC_{n-1}}=\frac{n(m-n+1)}{m+1} \qquad (2.9)$$

となることが分る．これより $n<m$ を考慮すると

$$\sigma \leqq \min\{n, m-n+1\} \qquad (2.10)$$

が得られる．

線形計画問題 $P_k$ にフェーズＩをあてはめたとき，$C_k$ のどの頂点が生成されるか全く分らないわけだから，上で求めた $\sigma$ がフェーズⅡの平均反復回数を表わしているとはいえないが，上の不等式は先に述べた経験事実と良く一致していることは注目に値する．

以上の Haimovich のモデルがフェーズⅡに関するものであったのに対して，フェーズＩを含む反復回数を分析するために Todd ら[30,1] は上と同様な符号対称性をみたす確率分布の下で Lemke の相補掃出し法[25] に関する分析を行なっているのでその結果だけを紹介しよう．

双対定理を用いると線形計画問題(2.3) を解くには

$$M=\begin{pmatrix} O & -A \\ A^t & O \end{pmatrix} \qquad q=\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

に対して定義される次の線形相補性問題

$$\left|\begin{array}{l} w=M_z+q \qquad w\geqq 0, \quad z\geqq 0 \\ w^t z=0 \end{array}\right. \qquad (2.12)$$

を解けば良いことは良く知られている．

ここで人工変数 $z_0$ と微小な正数 $\delta>0$ によって定義されるベクトル

$$d=(\delta^n, \ \delta^{n-1}, \cdots, \delta)^t \qquad (2.13)$$

を用いて (2.11) を

$$\left|\begin{array}{l} w=dz_0+Mz+q \quad w\geqq 0, \ z\geqq 0, \ z_0\geqq 0 \\ w^t z=0, \ z_0=0 \end{array}\right. \qquad (2.14)$$

と書き直し $q$ の最初の負の成分を $q_r$ として実行可能基底解

$$z_0=-q_r/\delta^r, \quad z=0, \quad w=dz_0+q \qquad (2.15)$$

を出発点として相補掃出し法を適用するとこのアルゴリズムが終了するまでの平均反復回数 $\sigma_\nu$ が

$$\sigma_\nu \leqq \min\{(m^2+5m+11)/2, \ (2n^2+5_n+5)/2\} \qquad (2.16)$$

であることが示されている．

また Adler ら[1]は ($A$, $b$, $c$) のすべての成分が独立に 0 を平均値にもつ同一の分布にしたがうときには $\sigma_\nu \geqq 0(m^2)$ であることを示し，これまでの経験に反する結果であると述べているが，東京工業大学の久野誉人君によれば，その証明に本質的な誤りが含まれている可能性があるとのことである．

### 2.2 分解原理の再登場

Ｋ法の出現で話が片隅に押しやられてしまった感があるが，80年代の LP の解法の話題として忘れてはならないものに，分解原理の実用化がある．

分解原理は大型の角状系，階段状系の線形計画問題を解く方法の総称で，1960年に発表された Dantzig-Wolfe の方法[7] をはじめとして Ho-Manne[14] の Nested Decomposition 法など様々なものがある．

特に Dantzig-Wolfe の分解原理は一見したところプログラムを組むのも容易そうに見えるため，60年代には多くのグループがこの解法についての実験を行なっているが期待に反して収束が遅いという報告が相続き，実用的な計算技法としては永らく見捨てられた形になっていた．

しかし，最近このような定説は必ずしも正しくないことが J. Ho[13] らによって示されている．すなわち彼らは分解原理に基づく従来のプログラムは，単体法プログラムの精緻さに比べてまったく問題にもならないナイーブさで作成されていたため，あるステップから先は誤差の累積が原因でまったく無意味な反復を行っていることを指摘し，適切な誤差対策やプログラミング技術を用いて角状システム用の DECOMPX コードと階段状システム用の LIFT コードを作成し，かずかずの大型問題に適用したところ，制約式が 3,000 本以上の問題に対しては，これらのコードが MPSX を上回るという結果を得ている．

彼らが行った最も大きな数値比較実験は，21ブロック，12,000本の制約式をもつ階段状システムであるが IBM 370/158， VM/CMS のもとで MPSX/370 が 3 時間かかったところを， LIFT では50回反復で1.5時間で解いたこと，また MPSX では大きすぎて解けない34ブロック19,000行の問題を102反復で4.8時間で解いた結果などを報告している．ここでの収束判定は，主問題と双対問題の目的関数値のギャップが 0.1% 以下になることを条件としており，この条件のもとでは反復回数が34ブロック問題の場合ですら100回程度で，通常の問題の場合20回程度とこれまでの常識を覆す良い結果を得ている．ちなみに，0.1% のギャップは実用上十分な程度をみたしていると考えてよく，今後さらに精密な誤差管理……たとえば単体法の基底の再逆転 (reinversion) に対応するルーチンを組み込み，さらに将来のパラレル・プロセッサの利用を考慮すると，分解原理の潜在能力はきわめて大きいものと考えられる．

## 3. おわりに

以上でほぼ紙数が尽きたのを幸いこの拙ないサーベイを終ることにしたい．このほか内点法に関しては Sonnevend[29] らの analytic center 法や Yamashita[37] の方法など注目すべき方法がいくつか発表されているがこれらについては別の機会に譲りたい．また単体法関連でも有向マトロイド理論や強多項式算法など面白い話題が多いが，前者については福田[10]，後者については藤重[9] のサーベイがあるので本稿では安心して割愛させて頂いた．

なおわが国では，なぜか線形計画法についてはその入口を学んだだけですべてが分ってしまった気になっている人が多いようである．しかし，線形計画法は実際にはきわめて奥行きの深い分野である．最適化法に関心を待つ方々には是非ここでもう一度本格的に線形計画法を学び直されることをお薦めしたい．

なお，この報告を作成するにあたり文部省科学研究費補助金一般A，59400004の助成を受けたことを附記する．

### 参考文献

1) I. Adler and N. Megiddo : A Simplex Algorithm Whose Average Number of Steps is Bounded between Two Quadratic Functions of Smaller Dimension, J. ACM **32**, 871/895 (1985)

2) I. Adler et al. : An Implementation of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming, Dept. of IE & OR, University of California, Berkeley (1986)

3) D. Avis and V. Chvátal : Notes on Bland's Pivoting Rule, Math. Prog. Study **8**, 24/34 (1978)

4) K. H, Borgwardt : Some Distribution-Independent Results about the Asymptotic Order of the Average Number of Steps of the Simplex Method, Math. of OR **7**, 441/462 (1982)

5) V. Chvátol : Linear Programming, Freeman and Co., (1983)

6) G. B. Dantzig : Linear Programming and Extensions, Princeton Uuiv. Press (1963)

7) G.B. Dantzig and P. Wolfe : Decomposition Principle for Linear Programs, Operations Research **8** (1960)

8) K. R. Frisch : The Logarithmic Potential Method of Convex Programming, manuscript, University Institute of Economics, Oslo University (1955)

9) 藤重　悟：線形計画問題の強多項式解法について，オペレーションズ・リサーチ **32**, 14/18 (1987)

10) 福田公明：有向マトロイドと線形計画，オペレーションズ・リサーチ **32**, 5/13 (1987)

11) P. Gill et al. : On Projected Newton Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method, Math. Prog. **36** 183/209 (1986)

12) M. Haimovich : The Simplex Algorithm is Very Good!-On the Expected Number of Pivot Steps and Related Properties of Random Linear Programs, manuscript, Columbia University, New York (April 1983)

13) J. K. Ho : Recent Advances in Decomposition Approach, OR Letters **3** (1984)

14) J. K. Ho and A. S. Manne : Nested Decomposition for Dynamic Models, Math. Prog. **6**, 121/140 (1974)

15) H. Imai : Extensions of the Multiplicative Penalty Function Method for Linear Programming, to appear in J. OR Society of Japan

16) M. Iri and H. Imai : A Multiplicative Penalty Function Method for Linear Programming—Another "New and Fast" Algorithm, Proc. of the 6th Math. Prog. Symposium, Japan, 97/120 (1985)

17) N. Karmarkar : A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, Combinatorica **4**, 373/395 (1984)

18) R. M. Karp : Combinatorics, Complexity and Randomness, C. ACM **29**, 97/111 (1986)

19) V. Klee and G. J. Minty : How Good is the Simplex Algorithm, Inequalities Ⅳ (O. Shisha ed.) Academic Press, 159/175 (1972)

20) M. Kojima : Notes on Improvements of Karmarkar's Algorithm, Proc. of the 6th Math. Prog. Symposium, Japan, 243/271 (1985)

21) M. Kojima and K. Tone : An Efficient Implementation of Karmarkar's New LP Algorithm, Report B-180, Dept. of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology (1986)

22) 今野　浩：非線形計画法，日科技連出版社 (1978)

23) 今野　浩：線形計画法，日科技連出版社 (1987)

24) 今野　浩：大規模数理計画法の現状，計測と制御 **25** 223/228 (1985)

25) C. E. Lemke : Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming, Management Science **11** 681/689 (1965)

26) P. Mc-Mullen : The Maximum Number of Faces of a Convex Polytope, Mathematika **17**, 179/184 (1970)

27) S. Smale : On the Average Number of Steps of the Simplex Method of Linear Programming, Math. Prog. **27**, 241/262 (1983)

28) S. Smale : The Problem of Average Speed of the Simplex Method, Bachem et al. (eds.), Mathematical Programming : The State of the Art, Springer 530/539 (1983)

29) G. Sonnevend : An "Analytical Centre" for Polyhedron and New Classes of Global Algorithms for Linear (Smooth, Convex) Programming, Proc. of the 12th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Budapest (1985)

30) M. J. Todd : Polynomial Expected Behavior of a Pivoting Algorithm for Linear Complementarity and Linear Programming Problems, Math, Prog. **35** 173/192 (1986)

31) M. J. Todd and B. P. Burrell : An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables, Report 648, SORIE, Cornell Univesity (1985)

32) J. Tomlin : An Experimental Approach to Karmarkar's Linear Programming Algorithm, manuscript, Ketron Inc. (1985)

33) K. Tone : A Hybrid Method for Linear Programming, Report 85-B-1, Institute for Policy Science, Saitama Univ. (1985)

34) 刀根　薫 : Karmarkar の新 LP 解法(1), オペレーションズ・リサーチ **30**, 215/220 (1985)

35) 刀根　薫 : Karmarkar の新 LP 解法(2), オペレーションズ・リサーチ **30**, 271/277 (1985)

36) L. Van der Heyden : A Variable Dimension Algorithm for the Linear Complementarity Problem, Math. Prog. **19**, 328/346 (1980)

37) H. Yamashita : Polynomially and Superlinearly Convergent Method for Linear Programming, Mathematical Systems Institute, Inc., (1986)