

# 金利の期間構造とマクロ経済： Nelson-Siegel モデルを用いた実証分析<sup>\*†</sup>

藤井 真理子<sup>‡</sup>

高岡 慎<sup>§</sup>

## 概 要

本稿では、ダイナミックな Nelson-Siegel モデルの枠組みを利用して 1992 年から 2007 年春までの 15 年間に於ける国債のイールドカーブ変動に関する実証分析を行った。第 1 に、Nelson and Siegel (1987) に基づくレベル、傾き、曲率を状態変数とした期間構造モデルは柔軟性が高く、ゼロイールドの形状とその時間変化をよく近似できることが分かった。

第 2 に、これら 3 つの期間構造パラメータとマクロ経済変数の関連について分析したところ、インフレ率と日本銀行の公定歩合はレベルと正の関係にあり、株価の上昇や米国における長短金利差の拡大はイールドカーブのスティープ化と、実物の活動水準の伸びや米国 FF レートの上昇は中期ゾーンの金利の相対的な上昇と関連付けられるなどの結果が得られた。さらに、状態空間モデルの枠組みを利用した同時推定の結果によれば、単純な VAR モデルよりマクロ経済変数を考慮したモデルのほうが説明力が高く、1996 年以降のデータを対象とすると、傾きや曲率にはやはり株価の変化や鉱工業生産の動きが反映されており、海外要因である FF 金利の影響も無視できないことなどが確認された。

---

\* 本稿の内容はすべて著者の個人的見解であり、金融庁あるいは金融研究研修センターの公式見解ではない。

† 本論文の執筆に際し、植田和男氏（東京大学）から貴重なコメントを頂いた。記して感謝したい。また、本研究の一部は科学研究費補助金基盤研究（B）による。

‡ 東京大学先端科学技術研究センター（金融庁金融研究研修センター特別研究員）

§ 東京大学大学院公共政策学連携研究部

## 1 はじめに

本稿は、ダイナミックな Nelson-Siegel モデルを用いて、バブル崩壊後、最近までの過去 15 年間の金利の期間構造の推移について計量的な分析を行い、期間構造の形状を決めるパラメータとマクロ経済変数の関係を明らかにすることを目的とする。市場で取引されている債券の満期はさまざまであるが、残存期間の異なる債券のゼロイールドから構成される期間構造は、これまでの研究により比較的少数のファクターでの確に表現できることが知られている。これは、例えば、期間構造の変動に対して主成分分析を行うと、金利変動の 90 パーセント以上が第 1 主成分で説明され、第 3 主成分までをとればほぼすべてが説明されることにも示されている<sup>1</sup>。この場合、第 1 主成分はレベル（例えば、長期金利）に、第 2 主成分は傾き（例えば、長短金利差）に、第 3 主成分は曲率（中間の満期の金利と長短金利の平均値の差）に相当する変数と理解されている。

Nelson and Siegel (1987) は、長期、中期、短期に関連した 3 つの変数を用いて期間構造をパラメトリックに記述できると論じた。さらに、最近ではこの考え方を時間を通じたモデル化に適用し、Nelson-Siegel モデルをダイナミックな 3 ファクターモデルとして解釈するアプローチも提案されている。本稿では、このダイナミックな Nelson-Siegel モデルにより期間構造が記述できると仮定し、日本国債のゼロイールドのデータを対象として実証分析を行う。

近年、マクロ経済学とファイナンスの両方の分野での研究の蓄積を踏まえ、イールド全体の動きとマクロ経済動向を総合的に分析する試みが主として米国のデータを対象に活発に展開されている。期間構造に一定の関数形を想定する場合やマクロ経済の構造部分について簡単なネオケインジアン<sup>2</sup>の定式化を仮定する場合、または、状態変数による時系列モデルを用いるなど、いくつかの手法が試みられているが、こうしたアプローチはマクロ・ファイナンスのアプローチとよばれている<sup>2</sup>。本稿もそうした試みの一つであるが、ショートレートの確率過程から債券価格の無裁定条件を導き、これを制約とする手法をとっているわけではない。期間構造の変動には、期間プレミアムの時間変動や金利水準とボラティリティの関係など多くの論点があり、また、実証分析の手法やアプローチにもいくつかの考え方がある。本稿では、まず期間構造の変動を 3 ファクターの Nelson-Siegel モデルにより長期にわたってうまく記述できるかどうかを検証し、さらにその間のマクロ経済とどのように関連付けられるかを明らかにすることに焦点をしばって分析を行う。

以下、第 2 節で Nelson-Siegel モデルをダイナミックに定義し、その特色を説明する。このモデルを用いて実証分析を行うが、その推定手法と結果について第 3 節で論じる。第 4 節では、推定結果に基づいたイールドカーブ変動に関する具体的な分析の例を示す。第 5 節は、結論と今後の課題である。

<sup>1</sup>例えば、Litterman and Scheinkman (1991)、Frye (1997)などを参照。

<sup>2</sup>現実のデータと対応させるためには、適当な観測可能データを決めることによってモデルを推定するか、あるいは、状態空間モデルの形式を用いたり潜在変数として Nelson-Siegel 型の関数の当てはめを考える方法などが採られている。後者の例には、Diebold and Li (2006)、Diebold, Rudebusch and Aruoba (2006) などがあり、これらはモデルの自由度を確保する等の観点から無裁定条件を課していない。

## 2 Nelson-Siegel モデルによるイールドカーブの表現

Nelson-Siegel モデルは、少数のパラメータでイールドの一般的な形状を柔軟に記述できるモデルとして広く知られている。最近では、このダイナミックな形式をアフィン型の金利構造モデルで基礎づけ、派生資産の価格付けなどにも適用できるような解釈も提示されており、実務的な柔軟性とファイナンスにおける無裁定性などの理論的要請の両方に応えられる可能性のあるモデルとして注目される<sup>3</sup>。

本稿では、ダイナミックな Nelson-Siegel モデルを用いて期間構造を表現し、これに影響を与えるマクロ経済の変動を明らかにすることを目的に実証分析を行う。はじめにモデルを定義し、Nelson-Siegel モデルの特色を確認しておく。

### 2.1 モデルの定義

Nelson-Siegel モデルでは、残存  $m$  ヶ月の（無リスク）フォワードレート  $f(m)$  を

$$f(m) = L + Se^{-m\lambda} + Cm\lambda e^{-m\lambda} \quad (1)$$

と表す。 $L$ 、 $S$ 、 $C$ 、 $\lambda$  はそれぞれイールドのレベル、傾き、曲率および規模パラメータである<sup>4</sup>。 $y(m)$  を残存  $m$  ヶ月の（無リスク）割引債のゼロイールドとすると

$$y(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f(u) du \quad (2)$$

の関係が成り立つので、イールドカーブは

$$y(m) = L + S \left( \frac{1 - e^{-m\lambda}}{m\lambda} \right) + C \left( \frac{1 - e^{-m\lambda}}{m\lambda} - e^{-m\lambda} \right) \quad (3)$$

と書ける。

ダイナミックな Nelson-Siegel モデルとは、上の (3) 式において、各パラメータが時変であるとモデル化するものであり、次のようになる<sup>5</sup>。

$$y_t(m) = L_t + S_t \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} \right) + C_t \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} - e^{-m\lambda_t} \right) \quad (4)$$

### 2.2 データと Nelson-Siegel パラメータの推定

使用する金利データは、日次の国債価格データから B スプラインに基づく凹凸ペナルティ法によって推定したゼロクーポンイールドである。推定方法の詳細は補論に示しているが、原則として利用可能なすべ

<sup>3</sup>Christensen, Diebold and Rudebusch (2007) は、(1) 無リスク金利がアフィン型の拡散方程式に従い、(2) 無裁定の条件を満たす場合の割引債価格の式を一般的に導出した Duffie and Kan (1996) の結果を用いて、上記の (3) 式のようなモデル化がこうした無裁定条件を満たす場合の解釈と解析解を与えている。

<sup>4</sup>Nelson and Siegel (1987) では、それぞれ長期の項、短期の項、中期の項とよばれている。

<sup>5</sup>ただし、この場合の 3 変数は潜在変数であり、したがって計測誤差の可能性があるほか、経済的にはフォワードレートは常に正となることや割引ファクターは満期が無限大に近づくにつれ、ゼロに近づかなければならぬことなどを満たさなければならない。

ての利付国債の価格データを用いてゼロイールドを滑らかにする方法により割引関数を推定している<sup>6</sup>。利付国債の価格データは、1992年1月以降、2007年5月までの日次で各日100～300程度のサンプルが得られる<sup>7</sup>。各月の月末の取引日における1年から20年までの異なる残存期間を有する価格データをサンプルとして用いた<sup>8</sup>。以後の分析では、この月末値により算出されたイールドカーブを月次系列として使用する。利付国債の価格から推定したイールドの推移が図1に示されており、X軸が時点、Y軸が残存期間、Z軸がイールドをそれぞれ表している。

分析の対象期間については、金利の上昇、下降の両局面を含む長期をとることが一つの考え方であるが、本稿では以下のような点を勘案し、1992年以降とした。すなわち、日本の国債市場における金利上昇局面を含むためには1980年代半ばまで遡る必要があるが、国債の流通市場が十分に機能し始めた時期は、1980年代後半の金利自由化以降であり、特に残存10年超の満期を持つ国債がある程度定期的に発行され、流通市場の機能が高まったのは1990年代に入ってからと考えられる<sup>9</sup>。本稿では、残存20年までの範囲にわたるイールドカーブの変動を対象期間を通じて整合的かつ市場の情報を反映した形で分析することを目的にしているため、長期ゾーンの国債流通市場が比較的、十分に機能していると考えられる1990年代に入ってからを分析の基本的な対象期間とした<sup>10</sup>。

いま、 $m_1$  から  $m_s$  まで  $s$  種類の残存期間におけるゼロクーポンイールドの値が時系列的に得られているとき、各  $t$  における  $L$ 、 $S$ 、 $C$ 、 $\lambda$  を  $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$ 、 $\lambda_t$  とすると、これらの時系列を得る一つの方法は、 $t$  と

$$\sum_{j=1}^s \left[ y_t(m_j) - L_t - S_t \left( \frac{1 - e^{-m_j \lambda_t}}{m_j \lambda_t} \right) - C_t \left( \frac{1 - e^{-m_j \lambda_t}}{m_j \lambda_t} - e^{-m_j \lambda_t} \right) \right]^2 \quad (5)$$

を最小化する  $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$ 、 $\lambda_t$  を求めることである。 $\lambda_t$  は規模のパラメータであるが、これがカーブの形状に与える影響は限定的であるので、本稿では推定値の安定性を考慮し、 $\lambda_t$  が全ての時点で共通であると仮定して、次のような手順によりパラメータの推定を行った。

まず、与えられた  $\lambda$  の下で (5) 式を最小化する  $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$  を、 $(1, \frac{1 - e^{-m_j \lambda}}{m_j \lambda}, \frac{1 - e^{-m_j \lambda}}{m_j \lambda} - e^{-m_j \lambda})$  ( $j = 1, \dots, s$ ) に  $\{y_t(m_j)\}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) を線形回帰した係数推定値として得る。これらは  $\lambda$  の関数なので  $\hat{L}_t(\lambda)$ 、 $\hat{S}_t(\lambda)$ 、 $\hat{C}_t(\lambda)$  と表し、このときの残差二乗和を

$$U_t(\lambda) = \sum_{j=1}^s \left[ y_t(m_j) - \hat{L}_t(\lambda) - \hat{S}_t(\lambda) \left( \frac{1 - e^{-m_j \lambda}}{m_j \lambda} \right) - \hat{C}_t(\lambda) \left( \frac{1 - e^{-m_j \lambda}}{m_j \lambda} - e^{-m_j \lambda} \right) \right]^2 \quad (6)$$

とする。 $\lambda$  は、 $\sum_t U_t(\lambda)$  を最小にする値を選択するものとし、これを  $\hat{\lambda}$  とする。

<sup>6</sup>90年代半ばの時期に実際には生じない小さなハンプが計算されてしまうケースがあるため、滑らかさのペナルティのかけ方を調整している。詳細は補論参照。

<sup>7</sup>原則として日本相互証券の各日の引け値を用いており、1998年11月以前は東証における上場国債の終値を用いている。

<sup>8</sup>日次データから算出した日中平均による系列と本月末値系列について以下の分析を行ったが、モデルの構成上からも推定結果からも月末値系列をより適切なデータと判断した。モデル構成との関連については、3.1参照。なお、残存1年未満の国債については手数料等の要因により適切な値が得られなかったため、対象から除いている。

<sup>9</sup>1987年から20年債の公募入札が開始され、1996年から四半期毎の入札が行われている。30年債の公募入札は1999年からである。

<sup>10</sup>なお、3.3節の同時推定の際には、96年以降を分析の対象としている。

この手順により上記のサンプル期間について得られた  $\lambda$  は、0.0327 であった<sup>11</sup>。これにより、各時点における  $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$  の推定値は、 $\hat{L}_t(\hat{\lambda})$ 、 $\hat{S}_t(\hat{\lambda})$ 、 $\hat{C}_t(\hat{\lambda})$  として求められ、その結果は、3.3 節の図 8 に示されている。

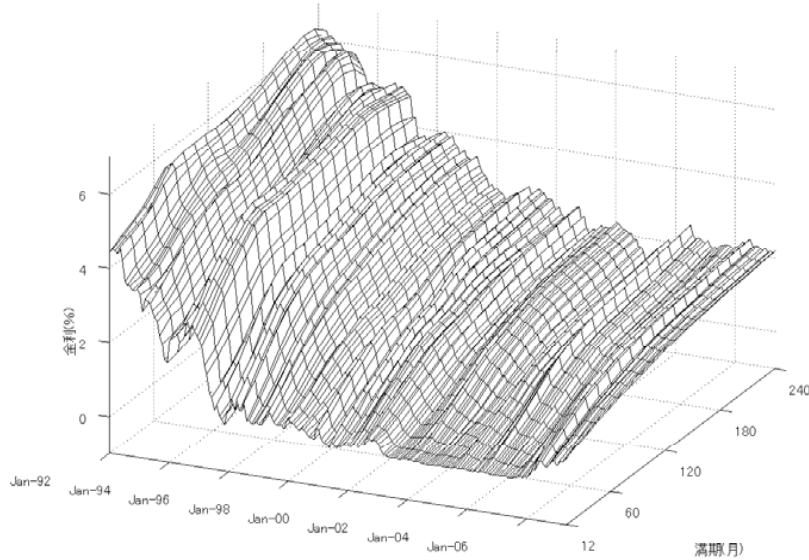


図 1: ゼロイールド（国債）の推移：1992 年 1 月～2007 年 5 月

### 2.3 ポストバブル期の期間構造の変動

(3) 式の右辺第 2 項および第 3 項の  $S_t$ 、 $C_t$  にかかる部分を

$$S(m) = \frac{1 - e^{-m\lambda}}{m\lambda} \quad (7)$$

$$C(m) = \frac{1 - e^{-m\lambda}}{m\lambda} - e^{-m\lambda} \quad (8)$$

とおき、異なる  $\lambda$  に対してプロットしたグラフを図 2 に示した。図 2 を見ると、 $\lambda$  がここで推定された 0.0327 の値を取る場合には、図の下の方の線で示されている  $C(m)$  は 48ヶ月から 60ヶ月の付近でピークを持つ。したがって、この場合には  $C_t$  は主に 4 年から 5 年の残存の金利の状態を表している。 $\lambda$  が大きいほど  $C(m)$  のピークは左に移動する。 $S(m)$  は、 $0 < m$  に対して右下がりの曲線を描く。このため、順イールドの場合は  $S_t$  は基本的に負の値を取る。時点  $t$  におけるイールドカーブは、 $y_t(m) = L_t + S_t S(m) + C_t C(m)$  で表され、カーブの形状は  $S_t$ 、 $C_t$  および  $\lambda$  の相対的な大小関係によって決定される。このように、Nelson-Siegel

<sup>11</sup>Diebold and Li (2006) は、1985 年 1 月から 2000 年 12 月までの 192ヶ月間の米国のイールドデータに対して中期の項が残存 30ヶ月で最大値をとるよう  $\lambda = 0.0609$  としている。

モデルでは、レベルの値  $L_t$  から傾きおよび曲率に関する項が調整されてイールドの形状が柔軟に表現されている<sup>12</sup>。

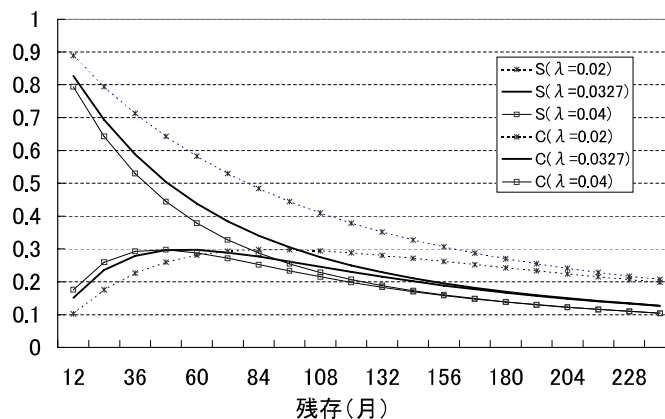


図 2: 異なる  $\lambda$  に対応する傾きファクター ( $S(m)$ ) と曲率ファクター ( $C(m)$ ) の例

イールドの満期方向の変動は、指数関数による因子  $e^{-m\lambda}$  に支配されているため、 $m$  の値が大きくなるにつれてイールド形状を構成する  $S_t S(m)$  と  $C_t C(m)$  の各項の貢献度はゼロに近づいてゆく。 $\lambda$  はそれぞれの項の貢献度をコントロールするパラメータであると解釈でき、 $\lambda$  が大きい時は短い満期でイールドの値が一定値に収束することになる。Nelson-Siegel 型の関数では  $\lambda$  の値によって  $L, S, C$  への分解の結果が変化するため、 $L, S, C$  とマクロ変数の関係も  $\lambda$  の値によって意味合いが変化する可能性があることに注意が必要である。

図 3 と図 4 に、残存 2 年、5 年、10 年および 15 年のゼロイールドについて、 $S_t S(m)$  と  $C_t C(m)$  それぞれの要素に分解した時系列が示されている。図を見ると、残存 24 ヶ月程度の比較的短期のゾーンでは傾きファクター ( $S_t S(m)$ ) の寄与が大きく、残存 60 ヶ月程度の中期ゾーンになってくると曲率に相当する C ファクター ( $C_t C(m)$ ) の寄与が大きくなっていることが分かる。1999 年のゼロ金利政策の導入以降、特に 1999 年から 2001 年および 2003 年後半から 2005 年にかけてスロープファクターが短期ゾーンの金利を引き下げ、2001 年から 2003 年、2004 年から 2005 年にかけては曲率のファクターにより中期ゾーンの金利が下がっている。

<sup>12</sup> 推定結果が経済的に不合理でないイールドカーブとなることを保証するためには、パラメータ推定に一定の制約を課すことも考えられる。例えば、イールドが正であるためには任意の  $0 < m$  に対して  $0 < L_t + S_t S(m) + C_t C(m)$  という制約条件の下で最適化問題を解くこととなる。本稿では、この条件については 3.3.1 で論じている。

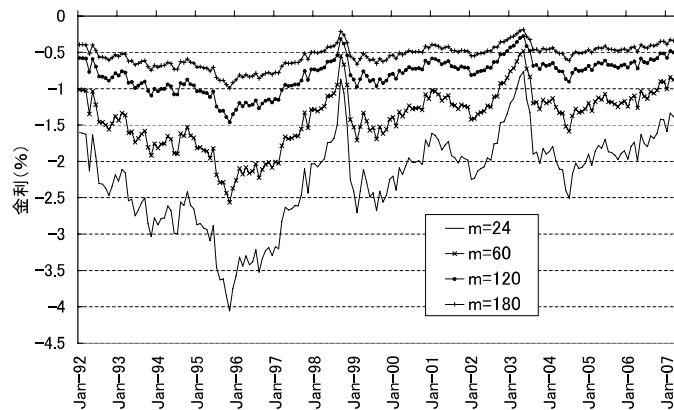


図 3: S ファクター ( $S_t S(m)$ ) の寄与 (残存月数別)

(注) 推定された残存 2,5,10,15 年における傾き成分 ( $S_t S(m)$ ) の時系列プロットを示している。

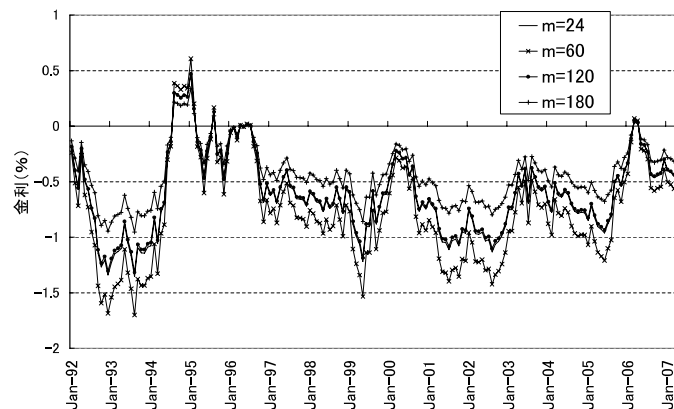


図 4: C ファクター ( $C_t C(m)$ ) の寄与 (残存月数別)

(注) 推定された残存 2,5,10,15 年における曲率成分 ( $C_t C(m)$ ) の時系列プロットを示している。

### 3 期間構造パラメータとマクロ経済

本節では、 $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$  とした期間構造の 3 つのパラメータをまとめて状態変数  $\alpha_t$  とし、マクロ経済変数が状態変数に及ぼす影響を通じてイールドカーブを変化させる過程を抽出するモデルの推定を行う。

### 3.1 モデルの考え方

国内の経済変数として、物価と金利、株価および実物の活動水準を表わす鉱工業生産指数を考え、政策関連変数として日本銀行の公定歩合<sup>13</sup>を考える。さらに、資産市場に影響を与える海外の変数として、米国のフェデラル・ファンズ（FF）レートおよび長期米国債利回りを考慮しよう<sup>14</sup>。本稿で関心があるのは、資産市場の価格である債券の金利であるが、これは多数の債券の価格が前節で示した Nelson-Siegel モデルにより 3 変数の関数として記述されると仮定する。

はじめに、予備的考察として上記体系の中で Nelson-Siegel モデルの期間構造パラメータを決めていると考えられるマクロ経済変数を誘導型のモデルで推定してみた。この結果を 3.2 節で紹介する。推定の結果を要約すれば、レベルはインフレ率と公定歩合により決まり、傾きは株価の変化率と米国の長短金利差に左右されていること、そして曲率は、ゼロ金利政策導入までの時期においては米国の FF レートの影響を受け、最近では実物経済の活動水準によっているとみられることが分かった。

次に、こうした考察を踏まえ、よりシステムティックな同時推定を行った。この場合には、 $L$ 、 $S$ 、 $C$  とした期間構造の 3 つのパラメータも同時に推定される。マクロ経済変数を考慮しないベクトル自己回帰 (VAR) モデルと上記予備的考察に基づいたマクロ変数を考慮した場合の 2 つのケースについて実証分析を行った結果を 3.3 節で示す。

同時推定を行う際には、状態空間表現を用いた。まず、 $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$  をまとめて状態変数  $\mathbf{x}_t = (L_t, S_t, C_t)'$  と表すと、同じ時点でのイールドカーブ  $\mathbf{y}_t$  は、次のような行列  $H$  によって状態変数  $\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t$  と関係付けられる。

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-m_1\lambda}}{m_1\lambda} & \frac{1-e^{-m_1\lambda}}{m_1\lambda} - e^{-m_1\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-m_s\lambda}}{m_s\lambda} & \frac{1-e^{-m_s\lambda}}{m_s\lambda} - e^{-m_s\lambda} \end{bmatrix} \quad (9)$$

また、 $\mathbf{x}_t$  は  $t-1$  期のマクロ変数  $M_{t-1}$  と 1 期前の状態  $\mathbf{x}_{t-1}$  によって決定されると仮定し、この関係は係数行列  $F$  および  $G$  によって表現されるとする。

以上をまとめると、 $\mathbf{w}_t$  と  $\mathbf{v}_t$  をそれぞれ観測ノイズとシステムノイズとして、

$$\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim N(\mathbf{0}, R) \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + F\mathbf{x}_{t-1} + GM_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_t \sim N(\mathbf{0}, Q) \quad (11)$$

となる。なお、実際の推定で用いるデータは、イールドについては月末値、マクロ変数については月中平均の系列であるため、推定においてはデータの時間的順序を考慮し、第  $t$  月のイールドを  $\mathbf{y}_t$  とすると、同じ月のマクロ変数を  $M_{t-1}$  として扱っている。

<sup>13</sup>日本銀行は 2006 年 8 月に「公定歩合」に関する統計の名称を「基準割引率および基準貸付利率」に変更した。本稿では、分析に用いたデータの期間や表記の利便性を考慮して「公定歩合」という用語を用いる。また、金利自由化以降は、公定歩合と預金金利との制度的な運動関係が失われ、政策金利としての色彩は薄まってはいるが、中央銀行の姿勢を表す一つの代理変数として公定歩合を使用した。

<sup>14</sup>試行の過程では月次系列を有するその他のマクロ変数（名目および実質の為替（実効）レート、経常収支、マネーサプライ関係など）や四半期国債残高データの対 GDP 比を線形で月次に変換した系列などについても分析したが、有意な結果は得られなかった。



マクロ経済における金利は、基本的には経済全体の中で同時決定される。通常のマクロ経済モデルでは、長短金利の区別がなされることはあるが、期間構造を明示的に記述する形で分析している例は多くない。期間構造を明示的に考慮した最近の研究の中では、Ang and Piazzesi (2003) がインフレと実物経済の活動の指標をマクロファクターとして用い、潜在変数とのジョイント・ダイナミクスを VAR で捉えようとしている。その結果、マクロ経済変数はイールドカーブの短・中期に重要な影響を与えており、インフレにおけるサプライズはイールドカーブ全体の水準に大きく影響していると論じている。Diebold, Rudebusch and Aruoba (2006)(以下 DRA (2006)) は、Nelson-Siegel の 3 つのファクターとマクロ経済変数（実物の活動水準、インフレ、金融政策の変数）との関係について、レベルはインフレとの関係が強く、傾きは実物経済の活動と強く関連しているが、曲率とマクロ経済変数との明確な関係はみられなかったとしている<sup>15</sup>。

### 3.2 期間構造パラメータとマクロ変数：予備的考察

#### 3.2.1 期間構造パラメータに関する回帰分析

推定された  $L_t, S_t, C_t$  の系列とマクロ変数との関連を定式化するために回帰モデルによる分析を行った。ここでは自己相関を考慮して、次の 2 つのタイプのモデルを適用した。ただし、 $Z_t$  は  $L_t, S_t, C_t$  のいずれかであり、 $M_t$  と  $\alpha$  はそれぞれマクロ変数ベクトルとその係数ベクトルである<sup>16</sup>。

$$\begin{aligned} 1) Z_t &= \mu + \alpha' M_t + \xi Z_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \sigma^2) \\ 2) Z_t &= \mu + \alpha' M_t + u_t, \quad u_t = \phi u_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

分析の対象期間は、いずれも 1992 年 1 月から 2007 年 5 月までである。モデル選択については、説明変数の候補を設定した上で、係数が有意に推定され、AIC が小さいモデルを選択した。最終的に有意な説明変数として用いたマクロデータの変数名等は、下記のとおりである。

- $CPID_t$  : CPI インフレ率 (CPI (生鮮食品を除く総合) の対前年同月変化率、総務省、消費税調整済み)
- $IIPD_t$  : 鉱工業生産指数の対前年同月変化率 (2000 年基準 : 経済産業省)
- $BDR_t$  : 公定歩合 (月末値、日本銀行) (パーセント)
- $TOPIXD_t$  : 東証株価指数 (日足終値の月中平均) の対前年同月変化率 (パーセント)

<sup>15</sup>以上の推定にあたっては、マクロ変数とイールドファクターの間の一方の関係のみをみるのか、双方向を考慮するのか、また、無裁定条件を課す場合、課さない場合など、どのようなメカニズムの把握に焦点を置くかにより定式化の違いがある。日本の国債の期間構造とマクロ経済変数の関係を明らかにしようとする実証分析は必ずしも多くはないが、小田・植田 (2007) は、ゼロ金利政策と量的緩和政策の 10 年ゾーンまでの国債金利への影響について 1995 年第一四半期から 2005 年第一四半期までの期間を対象に計量分析を行い、(1) 日本銀行のゼロ金利コミットメントは 3 年から 5 年ゾーンの金利の期待仮説部分に有効に作用し、金利を低下させた、(2) ゼロ金利達成に必要な以上の流動性供給や国債の買いオペがポートフォリオリバランス効果を通じて金利のリスクプレミアム部分に影響を与えたという証拠はみられなかった、と報告している。

<sup>16</sup>プライムは転置を示す。

- $US10_t$ : 米国財務省証券 (10年) 利回り (パーセント)<sup>17</sup>
- $FF_t$ : 米国フェデラル・ファンズ (FF) レート (パーセント)<sup>18</sup>
- $TDUMMY_t$ : タイムダミー (99年2月以降に1、それ以外で0となるダミー変数)

ダミー変数については、金融政策の枠組みの変更などを考慮し、いくつか試みた結果、1999年2月のゼロ金利政策導入前後で中期ゾーンのイールド変化に違いがみられるとした場合に係数が有意となったため、これを採用している。推定式および推定値は次の通りであり、カッコ内の数値はt統計量を表している。

$L_t$  は定数、 $CPID_t$ 、 $BDR_t$  および  $L_{t-1}$  に回帰した。 $u_t$  はホワイトノイズを仮定している。

$$L_t = 0.231 + 0.074 BDR_t + 5.740 CPID_t + 0.918 L_{t-1} + v_t$$

(3.164)      (1.940)                      (1.457)                      (40.776)

$S_t$  については定数、米国長短金利差 ( $US10_t - FF_t$ )、 $TOPIXD$  に回帰した。 $u_t$  は1次の自己回帰過程に従うとし、 $v_t$  はホワイトノイズを表す。

$$S_t = -2.971 - 0.151 (US10_t - FF_t) - 0.007 TOPIXD_t + u_t$$

(-6.820)      (-1.986)                      (-2.303)

$$u_t = 0.952 u_{t-1} + v_t$$

(41.510)

$C_t$  のモデルの説明変数には、 $FF_t$ 、および  $IIPD_t$  を用いた。ただし、 $IIPD_t$  は  $TDUMMY_t$  との積を取り、99年2月以降のみで作用する変数を作成して説明変数に加えた。 $S_t$  のモデルと同様に、誤差項に1次の自己回帰過程を仮定したモデルを採用した。

$$C_t = -4.104 + 0.352 FF_t + 4.916 (IIPD_t * TDUMMY_t) + u_t$$

(-5.278)      (2.021)                      (2.542)

$$u_t = 0.892 u_{t-1} + v_t$$

(23.942)

なお、各モデルの自由度調整済決定係数とダービン=ワトソン統計量は表1に示す通りである。

表 1: 推定結果

被説明変数	$L$	$S$	$C$
自由度調整済決定係数	0.980	0.906	0.847
ダービン=ワトソン統計量	1.741	2.130	2.035

<sup>17</sup>連邦準備制度理事会公表の月次系列 (月平均)。

<sup>18</sup>連邦準備制度理事会公表の月次 effective federal funds rate (月平均)。

レベル ( $L_t$ )、傾き ( $S_t$ )、曲率 ( $C_t$ ) という期間構造パラメータと説明変数であるマクロ経済の関係を確認すると、レベルは公定歩合とインフレ率と正の関係を有しており、自然な結果である。傾きは、TOPIX の変化率および米国の長短金利差といずれも負の関係にある。したがって、TOPIX の上昇や米国における長短金利差の拡大は比較的短期の金利の低下を通じたイールドカーブのステープ化と関連付けられる。曲率については、ゼロ金利政策導入以降の 1999 年以降に限ってみれば、鉱工業生産指数の変化率と正の関係になっているので、実物の活動水準の増大は中期ゾーンの金利を押し上げる。米国の FF 金利も程度は小さいものの、方向としては中期のイールドの上昇と結び付けられる。

以上のモデルにより求めた理論値とイールドの観測値を残存 24、60、120ヶ月の時系列について示したものが図 5 である。

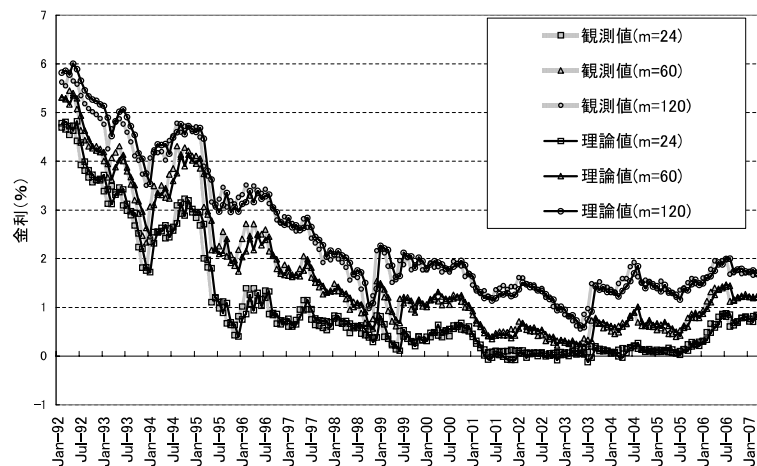


図 5: ゼロイールドの推移：理論値と観測値

### 3.2.2 イールドの変化の要因分解

推定されたモデルに基づいて、一定期間におけるイールドカーブの変化の要因分解を行った。時点  $t$  から  $t+k$  におけるイールドの変化分  $y_{t+k} - y_t$  は、同期間の  $L_t, S_t, C_t$  の変化分の線形結合に分解される。2つのタイプのモデルは、それぞれ

$$1) Z_{t+k} - Z_t = \sum_{j=0}^{k-1} \xi^j \mathbf{a}' M_{t+k-j} + \left( \sum_{j=0}^{k-1} \xi^j \mu + (\xi^k - 1) Z_t \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \xi^j v_{t+k-j}$$

$$2) Z_{t+k} - Z_t = \mathbf{a}' (M_{t+k} - M_t) + (\phi^k - 1) u_t + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j v_{t+k-j}$$

と変形でき、各式における  $Z$  の変化分のうち、右辺第 1 項がマクロ変数の変化による部分を表している。

例として 1999 年 5 月から 2000 年 5 月にかけてのイールドカーブの変化に関するマクロ変数の影響を計算した。図 6 は、2つの時期のカーブの変化を示している。この期間では長期金利の低下と短期金利の上昇

が同時に起こることにより、カーブがフラット化している。モデルの仮定の下では、マクロ変数の変化は、過去の実現値の持続的な影響とマクロ変数の影響およびそれ以外の攪乱項により生じるが、そのうちマクロ変数による効果を示したものが図 7 である。

図 7 をみると、短中期ゾーンの金利にプラスの寄与をしている要因は、この間いずれも上昇していた鉱工業生産や FF レートであり、他方、物価の低下は各ゾーンを通じて金利引下げ要因となっていることから長期的な期待金利の低下につながっているように見える。

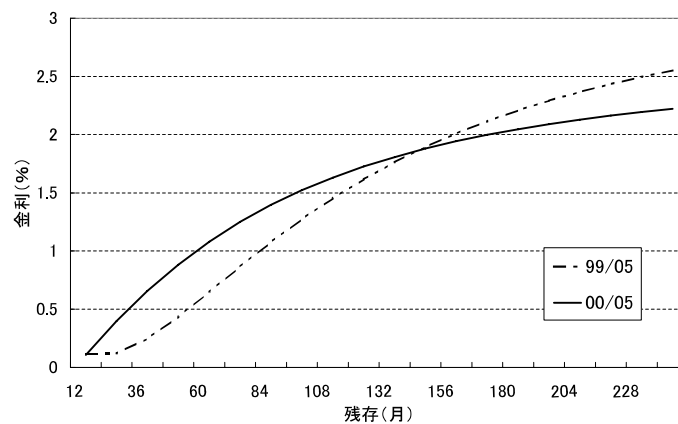


図 6: イールドの変化 (99/05-00/05)

(注) 1999 年 5 月と 2000 年 5 月におけるイールドカーブの理論値をプロットしている。

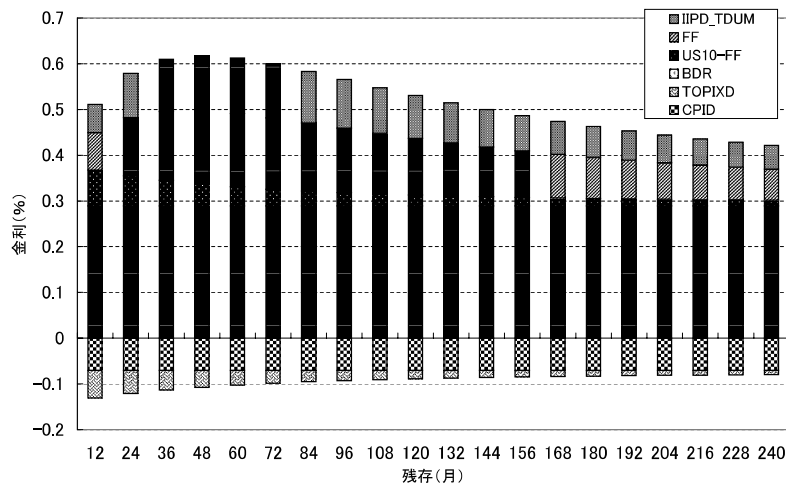


図 7: マクロ変数による効果の分解

(注) 1999 年 5 月から 2000 年 5 月にかけてのイールドカーブの変化のうち、マクロ変数に由来する部分を各成分に分解してプロットしている。

### 3.3 状態空間表現による同時推定

次に、状態空間表現を利用することにより構造全体を同時に推定する。具体的には、各成分を合わせたモデル全体を最尤推定することにより、情報量規準を用いて変数の組み合わせの優劣を比較し、選択した。ただし、本節のモデルでは状態方程式における分散共分散行列  $Q$  は時間を通して一定であると仮定している。ボラティリティが金利水準に依存して変動する可能性も指摘されているため、データの開始時期を変化させることにより推定期間を変えて結果の比較を行ったところ、本稿の設定においては、1996年1月から2007年5月までを対象期間とした場合にもっとも良好な結果が得られた。

#### 3.3.1 モデルと推定方法

基本となるモデルは3.1で示した(10)、(11)式の通りであり、以下に再掲する。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= H\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim N(\mathbf{0}, R) \\ \mathbf{x}_t &= \boldsymbol{\mu} + F\mathbf{x}_{t-1} + G\mathbf{M}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_t \sim N(\mathbf{0}, Q) \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{y}_t$  は  $\mathbf{y}_t = (y_t^{(m_1)}, \dots, y_t^{(m_s)})'$  であり、 $s$  種類の残存におけるゼロイールドの時点  $t$  における観測値ベクトルを表す。推定においては、残存12ヶ月から残存240ヶ月までの金利を12ヶ月ごとに使用した。すなわち、 $\mathbf{y}_t = (y_t^{(12)}, y_t^{(24)}, \dots, y_t^{(240)})'$  とした。 $\mathbf{x}_t$  は  $\mathbf{x}_t = (L_t, S_t, C_t)'$  であり、 $M_t$  はマクロ変数を表すベクトルである。 $\boldsymbol{\mu}$  は  $(3 \times 1)$  の定数ベクトルである。一般に(10)式は観測方程式、(11)式は状態方程式と呼ばれる。

モデルは、形式的にはマクロ変数が制御入力として作用し、次の期の状態変数に影響を与える構造になっている。行列  $G$  はマクロ変数にかかる係数行列であり、この成分が次の期のイールドのレベル、傾き、曲率のそれぞれに対してマクロ変数がどのように影響するかを表している<sup>19</sup>。

推定においては係数行列  $F, G$  と誤差項の共分散行列  $R, Q$  および  $\lambda$  が未知パラメータとなる。モデルは線形でガウシアン of 標準的な状態空間モデルであるため、カルマンフィルタを利用して対数尤度を計算することができるので、数値的最大化を実行することで未知パラメータの最尤推定量が得られる。

なお、観測される金利は非負であるため、次のような変換  $f_u(\cdot)$  を利用してモデルによるイールドの理論

<sup>19</sup>DRA (2006) は、次のような状態空間モデルを用いてイールドカーブ全体とマクロデータとの時系列的な変動を分析している。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ M_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ M_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{観測方程式}) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ M_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_0 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ F_2 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1} \\ M_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} \quad (\text{状態方程式}) \end{aligned}$$

記号は(10)式、(11)式と同様に、 $\mathbf{y}_t$  がゼロイールド、 $\mathbf{x}_t$  が状態変数、 $M_t$  がマクロ変数ベクトルを表す。DRA (2006) はマクロ変数として製造業稼働率とFFレート、インフレ率を採用し、 $F_1, F_2$  の推定値の有意性により、マクロ変数から  $L_t, S_t, C_t$  への一定の影響はあるが、逆の影響は小さいことを報告している。本稿のモデルではマクロ変数の変動自体は定式化せず、外生変数として扱うことでマクロ変数から状態変数への影響のみを取り入れている。

値が負になることを回避した。

$$f_u(z) = \begin{cases} z & z \geq u \\ z \exp\left(\frac{z-u}{u}\right) & z < u \end{cases} \quad (12)$$

これは、境界値  $u$  よりも小さいデータを正の値に変換するものであり、ここでは

$$\mathbf{y}_t = f_u(\mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t) \quad (13)$$

という形で用いる。推定においては、逆変換したイールド  $f_u^{-1}(\mathbf{y}_t)$  を観測データとして利用することにより、境界値  $u$  も同時に最尤推定する。また、簡単のために  $R$  を 1 つのパラメータ  $\sigma^2$  によって代表させ、 $\sigma^2 I$  という形に限定し、 $Q$  を対角行列と仮定した。

### 3.3.2 推定結果 1 イールドデータのみを用いた推定

まず、基本となるケースとして次のようなマクロ変数を用いないイールドのみのモデルを推定した。

$$\mathbf{y}_t = f_u(\mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t), \quad \mathbf{w}_t \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I) \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + F\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_t \sim N(\mathbf{0}, Q) \quad (15)$$

最尤法により推定されたパラメータを表 2 から表 4 に示した。ただし、 $f_u(\cdot)$  の  $u$  については、最適化計算の過程で正值である制約を課すために、 $u = \exp(c)$  となる  $c$  について対数尤度関数を最大化した。 $\lambda$  の推定値は 0.036 であり、2 節での推定値 0.0327 に近い値が推定されている。カルマンフィルタによる状態変数の推定値は 2.2 節の推定結果にほぼ重なっており、操作性の高いモデルであるといえる。なお、このモデルの AIC は  $-7676.42$  となった。

### 3.3.3 推定結果 2 マクロ変数を利用した推定

次にマクロ変数を導入したモデルの推定結果を示す。まず 1 変量での予備的な考察に基づき、候補となるマクロ変数を以下のとおりとした。定義は、前小節と同じである。

- $CPID_t$  : CPI インフレ率 (CPI(生鮮食品を除く総合) の対前年同月変化率、総務省、消費税調整済み)
- $IIPD_t$  : 鉱工業生産指数の対前年同月変化率 (2000 年基準 : 経済産業省)
- $BDR_t$  : 公定歩合 (月末値、日本銀行)
- $TOPIXD_t$  : 東証株価指数 (日足終値の月中平均) の対前年同月変化率
- $US10_t$  : 米国財務省証券 (10 年) 利回り
- $FF_t$  : 米国 FF レート
- $US10_t - FF_t$  : 米国長短金利差

表 2:  $F, \mu$  の推定結果

	$F$			$Const.$
	$L_t$	$S_t$	$C_t$	$\mu$
$L_{t+1}$	0.875* (0.087)	-0.052 (0.079)	0.020 (0.016)	0.280* (0.092)
$S_{t+1}$	0.014 (0.107)	0.928* (0.098)	-0.021 (0.020)	-0.285* (0.114)
$C_{t+1}$	0.029 (0.184)	0.087 (0.168)	0.929* (0.035)	-0.069 (0.193)

(注) 括弧内は標準誤差を表す。\*を付した係数は少なくとも5%水準で有意であることを示す。以下の表においても同様である。

表 3:  $Q$  の推定結果

	$Q$		
	$L_t$	$S_t$	$C_t$
$L_t$	0.038 (0.196)		
$S_t$		0.059 (1.516)	
$C_t$			0.177 (0.276)

(注) 括弧内は標準誤差を表す。

表 4:  $\sigma^2, \lambda, c$  の推定結果

$\sigma^2$	$\lambda$	$c$	$u = \exp(c)$
0.002 (0.041)	0.036 (0.195)	-7.354* (1.000)	0.001 (0.001)

(注) 括弧内は標準誤差を表す。

以上のうち、変数の組み合わせによるモデルの優劣を比較するために変数を5個に制限し、可能な組み合わせについてAICを算出した結果、 $CPID_t$ 、 $IIP_t$ 、 $TOPIXD_t$ 、 $BDR_t$ 、 $FF_t$ を含むモデルが選択された。モデルのAICは-7681.01となり、イールドのみのモデルよりも改善されている。パラメータの推定の結果は表5から表7に示されている。パラメータを用いてカルマンフィルタにより推定した状態変数を、2.2節での $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$ の推定結果と合わせてプロットした結果が図8である。

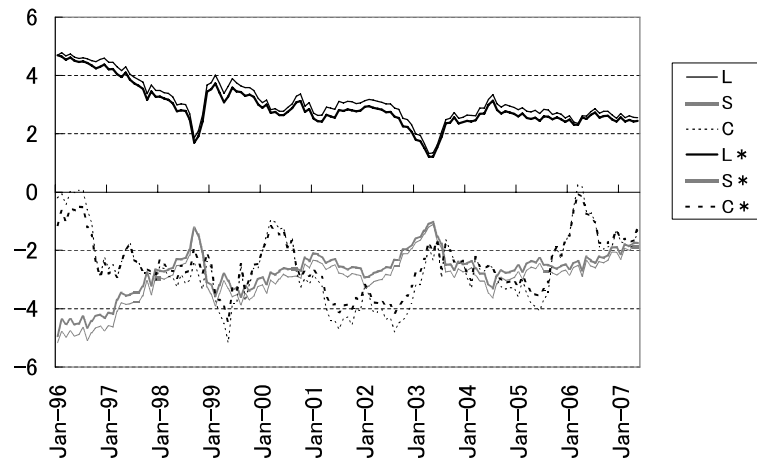


図8: 推定された $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$

(注) (10)、(11)式のモデルに基づく $L_t$ 、 $S_t$ 、 $C_t$ の推定値と、2.2節の推定値をプロットしている。\*の無い系列は2.2節の推定結果を表す。

行列 $F$ の推定値は、全ての固有値の絶対値が1よりも小さくなったため、状態変数 $x_t$ は、マクロ変数の影響が無ければ、平均 $(I - F)^{-1}\mu$ の周りで推移する形となった。マクロ変数の係数の推定結果を見ると、レベルはインフレ率で説明され、公定歩合との相関も強い。DRA (2006)による米国に関する先行研究では、レベルはFFレート、傾きは稼働率とFFレートとの関連がそれぞれ有意に推定されたとしており、本稿の分析と類似した結果となっている。なお、ここで報告している1996年以降においては公定歩合の変動が少ないため、その影響が明確に有意には推定されていないが、公定歩合が段階的に引き下げられた1992年以降のデータで推定を行った場合には、公定歩合とレベルの関係はより明確に推定される。また、実物の活動水準の増減 $IIPD_t$ と期間構造パラメータとの関係を見ると、レベルに対して負の係数となっている点には改善の余地があると考えられるものの、 $S_{t+1}$ に対しては正の係数で有意である。

また、TOPIXの変動はイールドの傾きと曲率に関連があることが見出された。 $S_{t+1}$ に対する $TOPIXD_t$ の係数は有意に負に推定されているため、TOPIXが前年同月比で上昇している場合は、イールドの傾きが大きくなる。経験的にはイールドカーブの傾きは景気の先行きに関する市場の期待を表すと考えられているが、事後的に見ても景気の指標と将来のイールドの傾きとの間に一定の関係があることが分かった。 $C_{t+1}$ と $TOPIXD_t$ との関係を見ると、 $TOPIXD_t$ の上昇により、イールドの4~5年のレンジが相対的により大きく押し上げられるということが分かる。



表 5:  $F, \mu, G$  の推定結果

	$F$			$Const.$	$G$				
	$L_t$	$S_t$	$C_t$	$\mu$	$CPID_t$	$IIPD_t$	$TOPIXD_t$	$BDR_t$	$FF_t$
$L_{t+1}$	0.763* (0.143)	-0.135 (0.123)	0.017 (0.020)	0.378* (0.103)	1.653 (0.983)	-0.930* (0.348)	0.001 (0.001)	0.272 (0.172)	-0.019 (0.018)
$S_{t+1}$	-0.170 (0.173)	0.765* (0.149)	-0.036 (0.025)	-0.331* (0.126)	-0.124 (0.988)	1.282* (0.416)	-0.003* (0.001)	-0.153 (0.210)	0.037 (0.022)
$C_{t+1}$	0.619* (0.290)	0.635* (0.251)	0.889* (0.044)	-0.462* (0.215)	0.522 (0.996)	0.708 (0.629)	0.008* (0.002)	-0.337 (0.351)	0.020 (0.038)

(注) 括弧内は標準誤差を表す。

表 6:  $Q$  の推定結果

	$Q$		
	$L_t$	$S_t$	$C_t$
$L_t$	0.036 (0.038)		
$S_t$		0.054 (0.091)	
$C_t$			0.161 (0.508)

(注) 括弧内は標準誤差を表す。

表 7:  $\sigma^2, \lambda, c$  の推定結果

$\sigma^2$	$\lambda$	$c$	$u = \exp(c)$
0.002 (0.001)	0.036 (0.021)	-16.942* (1.000)	0.000 (0.000)

(注) 括弧内は標準誤差を表す。

なお、 $u$  の推定結果はほぼ 0 となっており、本稿で分析の対象とした残存 12ヶ月から 240ヶ月の金利については、モデルによる理論上のイールドカーブの期待値が負になるケースは存在しなかったため、結果的には関数  $f_u(\cdot)$  による非負制約は不要であった。

### 3.4 政策的効果の抽出

以上のうち、特に日米の政策に関連した変数である公定歩合および FF レートの変化がイールドカーブに与える影響をより明確にするため、これら変数がイールドカーブに及ぼす影響を取り出してみよう。

まず、状態方程式に関して、 $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (I - F)^{-1}\boldsymbol{\mu}$  とすると、 $F$  が定常性の条件を満たしていれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_t - \tilde{\boldsymbol{\mu}} &= F^k(\boldsymbol{x}_{t-k} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}) + \sum_{j=1}^k F^{j-1}GM_{t-j} + \sum_{i=0}^{k-1} F^i\boldsymbol{v}_{t-i} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} F^{j-1}GM_{t-j} + \sum_{i=0}^{\infty} F^i\boldsymbol{v}_{t-i} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\boldsymbol{x}_t$  の第  $p$  成分を  $x_t^{(p)}$ 、 $M_t$  の第  $q$  成分を  $M_t^{(q)}$  とすると、 $M_{t-k}^{(q)}$  が 1 単位変化した場合の  $x_t^{(p)}$  の応答  $\Phi_{pq}^{(k)}$  は

$$\Phi_{pq}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial M_{t-k}^{(q)}} x_t^{(p)} = (F^{k-1}G)_{pq} \quad (16)$$

によって与えられる。ただし、 $(F^{k-1}G)_{pq}$  は  $F^{k-1}G$  の  $(p, q)$  成分を表す。また、 $t-k$  時点において  $M_{t-k}^{(q)}$  に 1 単位の変化が生じ、その変化が  $t-k$  時点以降も継続した場合の  $x_t^{(p)}$  への累積的な影響を

$$\Psi_{pq}^{(k)} = \sum_{r=1}^k \Phi_{pq}^{(r)} \quad (17)$$

と定義する。このとき、第  $q$  番目のマクロ変数において、 $t-k$  時点以降に持続的な変化があった場合の状態変数  $\boldsymbol{x}_t$  への影響は、 $\Psi_q^{(k)} = (\Psi_{1q}^{(k)}, \Psi_{2q}^{(k)}, \Psi_{3q}^{(k)})'$  というベクトルで表されるので、イールドカーブへの影響は  $H\Psi_q^{(k)}$  によって表すことができる。

各パラメータを最尤法による推定量に置き換え、公定歩合と FF レートのそれぞれについて計算した  $H\Psi_q^{(k)}$  を図 9 に示した。図では  $k$  を 1ヶ月、3ヶ月、6ヶ月、36ヶ月にとり、公定歩合の影響をマークなし、FF レートの影響をマークつきの線でプロットしている。

グラフはマクロ変数が 1 単位変化した場合のイールドカーブへの影響なので、公定歩合または FF レートが 1%ポイント上昇した場合のイールドカーブの動きを表していると解釈できる。まず、公定歩合の上昇は、カーブ全体を上へスライドさせるが、相対的には長期金利をより大きく押し上げる。図 9 におけるマークのない実線が 36ヵ月後の累積的な効果を示しており、例えば 10 年債でみると、3ヵ月後には 0.4 ポイント強の上昇が生じ、3 年後には 1.2 パーセントポイント強の上昇につながっている。

他方、FF レートの上昇は、図 9 におけるマークつきの線で示されているように、残存期間 6~7 年付近を境にして、短期金利の上昇とわずかではあるが長期金利の低下をもたらしている。ただし、その影響の

度合いは公定歩合に較べるとかなり小さい。なお、どちらの場合も  $k$  をより大きくして確認すると 36ヶ月後のグラフとほぼ同一になる。

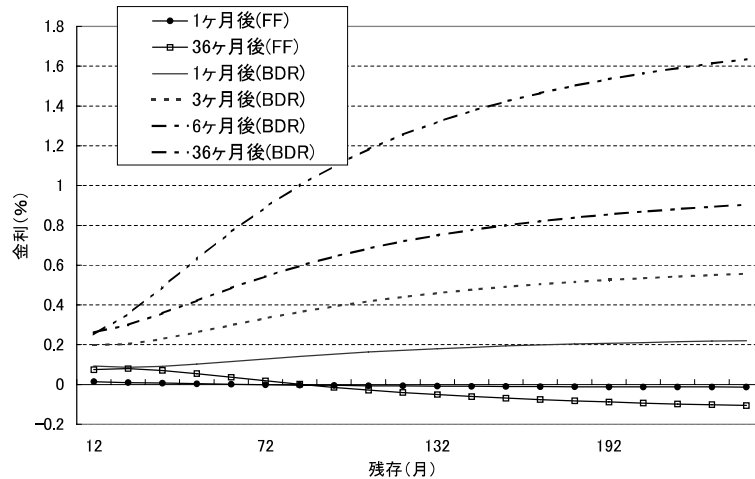


図 9: マクロ変数の変化がイールドカーブに及ぼす影響

(注) 公定歩合と FE レートについて、それぞれが 1 %ポイント上昇し、上昇時点以降もその水準が維持された場合のイールドカーブへの影響がプロットされている。マークなしの線が公定歩合の影響、マーク付きの線が FE レートの影響をそれぞれ表す。

#### 4 推定結果の解釈とシミュレーション

金利の期間構造は、世界的にみても 1980 年代、90 年代と比較して 2000 年以降の時期に大きく水準を低下させ、また、フラット化してきている<sup>20</sup>。特に、米国では顕著なフラット化が観察されており、例えば、04 年 3 月末と 06 年 5 月はじめのイールドカーブと比較すると、長短金利差は 10 年ゾーンまでで 3 パーセントからほぼゼロに縮小している。これに対し日本では、景況感の改善や量的緩和の終焉の見込みにもかかわらず長期金利の反応が小さく、2000 年以降、長短金利差が 2 パーセント以内のフラットなカーブが継続している。ただし、各時期の形状を細かくみていけば景況感の変化などにより動きがみられる。

本節では、こうした具体的なイールドカーブの形状変化について、前節までの推定結果に基づいてその変化の要因分析、特にマクロ変数の変化がどのような影響をもたらしていたのかを検証するための分析を行う。事例としては、分析の対象である 1996 年からゼロ金利解除までの時期を 2003 年 6 月の VaR ショックの時期を境として前・後半に分けた場合の動きと 2006 年 6 月のゼロ金利解除後から直近までの 1 年間という 2 つの時期を取り上げてみた<sup>21</sup>。

<sup>20</sup>こうした動きの要因として、例えば Ahrend, Catte and Price (2006) は、金融政策への信頼性の高まりに伴うインフレ懸念の後退や景気変動のボラティリティの低下などを反映した期間プレミアムの縮小、相対的な貯蓄増加 (OECD 諸国における企業貯蓄の拡大と投資の減少が政府赤字の拡大を相殺し、さらに途上国の貯蓄増大期待)、人口構造の高齢化に伴う資産選好の変化 (リスクの高い株式から債券へのポートフォリオ・シフト) などを上げている。

<sup>21</sup>この間の金融政策をみると、バブル崩壊後の継続的な金利引き下げの後、金融システム不安も生じる中、95 年 9 月から 98 年

#### 4.1 要因分解の方法

前節の結果を用いると、具体的な期間構造の変化とマクロ変数の動きがどのように関係付けられるかについての要因分解を行い、モデルのインプリケーションを検証することができる。分解は、次の方法により行う。まず、 $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (I - F)^{-1}\boldsymbol{\mu}$  として、 $\tilde{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{x}_t - \tilde{\boldsymbol{\mu}}$  と置くと、(11) 式は

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_t = F\tilde{\boldsymbol{x}}_{t-1} + G\boldsymbol{M}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$$

となる。また、ある整数  $k > 0$  に対して

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}_{t+k} &= F(F\tilde{\boldsymbol{x}}_{t+k-2} + G\boldsymbol{M}_{t+k-2} + \boldsymbol{v}_{t+k-1}) + G\boldsymbol{M}_{t+k-1} + \boldsymbol{v}_{t+k} \\ &= F^k\tilde{\boldsymbol{x}}_t + \sum_{j=1}^k F^{j-1}G\boldsymbol{M}_{t+k-j} + \sum_{i=0}^{k-1} F^i\boldsymbol{v}_{t+k-i}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{t+k} - \tilde{\boldsymbol{x}}_t = (F^k - I)\tilde{\boldsymbol{x}}_t + \sum_{j=1}^k F^{j-1}G\boldsymbol{M}_{t+k-j} + \sum_{i=0}^{k-1} F^i\boldsymbol{v}_{t+k-i}$$

となるので、時点  $t$  から時点  $t+k$  の期間における  $\tilde{\boldsymbol{x}}$  の変化分が、 $\tilde{\boldsymbol{x}}_t$  の持続的な影響とこの期間におけるマクロ変数の累積的な影響およびイノベーションの累積的影響の3つに分解できることが分かる。

したがって、イールドカーブの変化分は (10) 式より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_{t+k} - \boldsymbol{y}_t &= H(\boldsymbol{x}_{t+k} - \boldsymbol{x}_t) + (\boldsymbol{w}_{t+k} - \boldsymbol{w}_t) \\ &= H(\tilde{\boldsymbol{x}}_{t+k} - \tilde{\boldsymbol{x}}_t) + (\boldsymbol{w}_{t+k} - \boldsymbol{w}_t) \\ &= H(F^k - I)\tilde{\boldsymbol{x}}_t + H\sum_{j=1}^k F^{j-1}G\boldsymbol{M}_{t+k-j} + H\sum_{i=0}^{k-1} F^i\boldsymbol{v}_{t+k-i} + (\boldsymbol{w}_{t+k} - \boldsymbol{w}_t)\end{aligned}$$

と分解できる。これにより、2時点間のイールドカーブの形状の変化を VAR パートとマクロ変数パートに分け、さらに個別のマクロ変数の影響部分を取り出すことができる。以下では、推定された状態変数  $\hat{\boldsymbol{x}}_t$  を用い、いくつかの時点について  $H\hat{\boldsymbol{x}}_t$  をプロットしたグラフを図 10、図 13、図 16 に示した。これらをモデルに基づく理論値とし、 $H\hat{\boldsymbol{\mu}}$  を "Mean" として同じ図に重ねて表示している<sup>22</sup>。 $H\hat{\boldsymbol{\mu}}$  は、マクロ変数の影響が無い場合のイールドカーブの長期的な平均を表している。

9月までの間、無担保コールレート(オーバーナイト物)については約0.5%という水準が維持された。1999年2月以降、日本銀行はコールレートをゼロに向かって誘導し、99年4月から2000年8月までは「デフレ懸念の払拭が展望されるまで」ゼロ金利を続けると宣言した。さらに、2001年3月から2006年3月までの間は量的緩和政策が採られ、CPIのマイナスが続く事態に対処するため、大量の流動性供給が行われた。この中には、中長期国債の買いオペの増額も含まれている。2001年以降はゼロ金利、量的緩和政策の下で短期金利が0%付近に張り付いている。

<sup>22</sup>(14)式に従えば、イールドの理論値は  $f_u(H\hat{\boldsymbol{x}}_t)$  であるが、 $u$  の推定値が十分小さいため、ここでは  $H\hat{\boldsymbol{x}}_t$  をイールドの理論値としている。

## 4.2 前半期と後半期の比較

本稿が分析対象とした1996年から2007年春までの期間は、大きな流れでみると1996年から2003年6月のVaRショックまでの低下局面と後半の2003年6月から06年6月までの緩やかな上昇期に区分できる。前半においては、期間構造はブルフラット化、すなわち、金利の全般的な低下を伴いつつ、フラット化してきている。後半においてもフラット化が継続しているが、金利の全般的な水準は緩やかに上昇している。

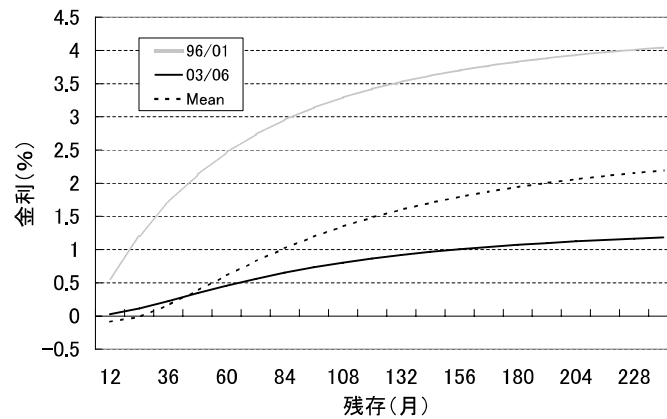


図 10: モデルによるイールドカーブ (96年1月と03年6月)

(注) 96年1月と03年6月におけるイールドカーブの理論値をプロットしている。

図 11 により、前半期のマクロ要因と VAR のパートの寄与をみると、1996年の金利水準が計測期間の中では高い水準からスタートしていることもあり、低下の主要因は VAR パートと分解されるが、マクロ要因もどちらかといえば長期ゾーンの金利を下げるによりフラット化と関連している。

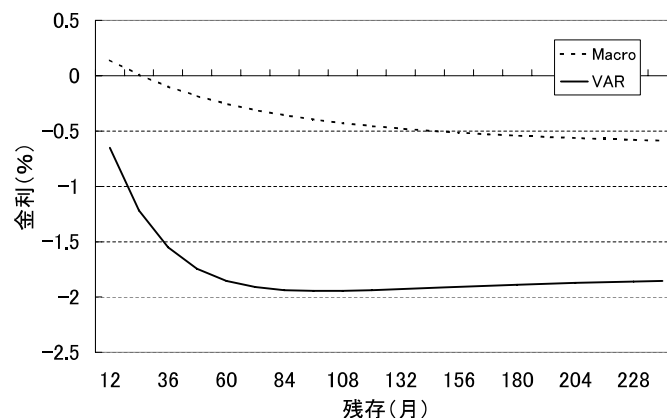


図 11: イールドの変化分の分解 (96年1月から03年6月)

(注) イールドカーブの理論値の変化分のうち、マクロ変数に由来する部分と自己相関による部分を示している。

具体的な変数で見ると、図 12 に示すように TOPIX、IIPD、CPID、FF 金利のいずれもがブルフラット化を示唆している。他方、後半期においては、VAR パートはベアスティーブ化と関連付けられるのに対し、マクロ要因は中期ゾーンの金利上昇に寄与していることが図 14 から分かる。特に、図 15 から TOPIXD の動きが影響していることがうかがえる。この間にみられた FF 金利の上昇は短中期金利の上昇と関連しているようである。IIP の動向は変動しつつも上昇基調にあったが、大きな寄与にはつなげていない。

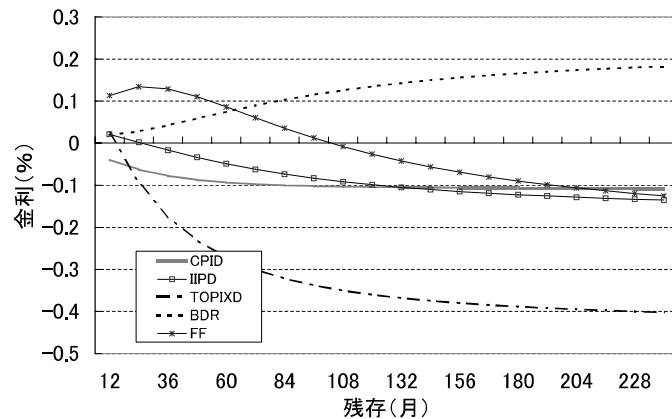


図 12: マクロ変数の影響の分解 (96 年 1 月から 03 年 6 月)

(注) イールドカーブの理論値の変化分のうち、マクロ変数に由来する部分を各成分に分解した結果を示している。

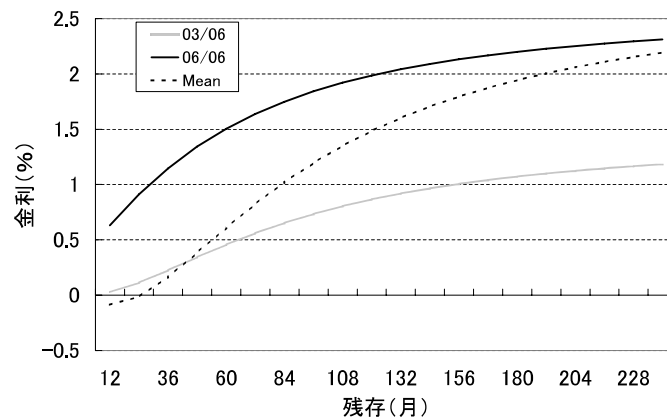


図 13: モデルによるイールドカーブ (03 年 6 月と 06 年 6 月)

(注) 03 年 6 月と 06 年 6 月におけるイールドカーブの理論値をプロットしている。

TOPIXD には、景気の先行指標としての意味付けが与えられているように考えられる。前半期には金融システム不安等が生じている中、株価も低迷し、2000 年前後に一時持ち直しているものの、その後、再び低迷が続いた。これは、期間構造においては相対的な中長期金利の低下要因と関連付けられる。後半期は株価も回復に転じているが、これが先行きの景気改善を意味するとすれば、中長期金利の上昇につながる

ことも自然である。IIPD、CPID で捉えられる足元の経済状況は、それらの悪化が金利の低下と、改善があれば金利の上昇と関連付けられることは一般的な理解に反しないと考えられる。前半期には、この傾向が確認される。後半期には、物価に将来の期待インフレ水準を左右するほどの顕著な変化はみられないものの、鉱工業生産は変動しつつも上昇基調にあった。これがあまり金利に影響していないような試算結果となっているのは、同時に進行していた企業のバランスシート改善など、本稿でのモデルでは考慮していない要因が影響しているのかもしれない。

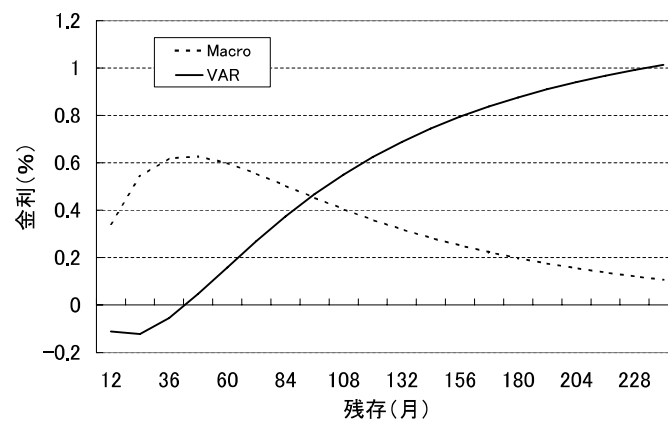


図 14: イールドの変化分の分解 (03年6月から06年6月)

(注) モデルによるイールドカーブの理論値の変化分のうち、マクロ変数に由来する部分と自己相関による部分を示している。

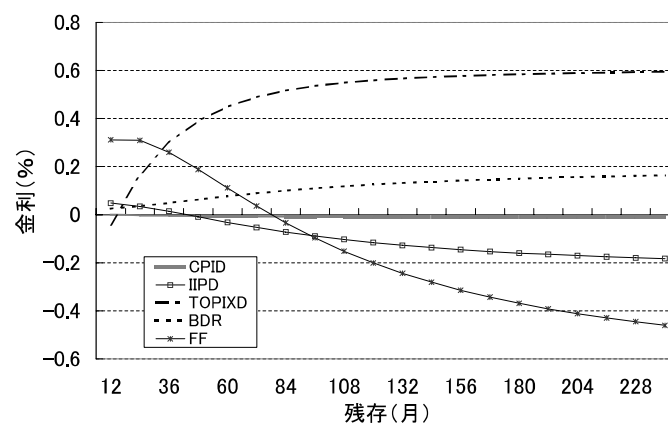


図 15: マクロ変数の影響の分解 (03年6月から06年6月)

(注) イールドカーブの理論値の変化分のうち、マクロ変数に由来する部分を各成分に分解した結果を示している。

### 4.3 ゼロ金利解除後の動向：2006年6月から07年5月

ゼロ金利解除後、2006年6月から07年5月にかけてのイールドカーブの変化をみると、全体として金利は多少低下しつつも短期がやや上昇してフラット化している。この間の分解を図17、図18に示している。

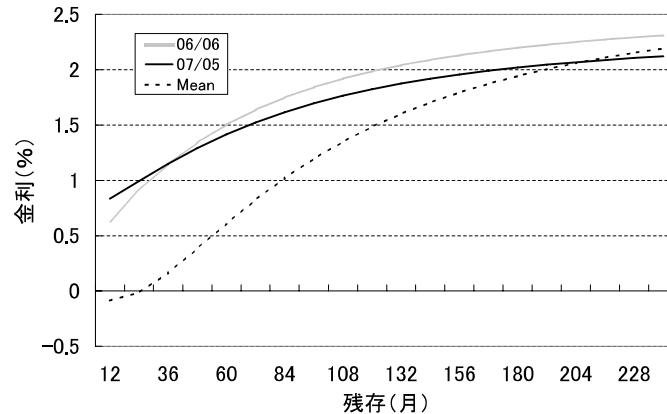


図16: モデルによるイールドカーブ (06年6月と07年5月)

(注) 06年6月と07年5月におけるイールドカーブの理論値をプロットしている。

VAR部分の方向はスティーブ化であり、フラット化は主としてマクロ要因と関連付けられる。図18を見ると、FF金利は主に短期ゾーンの金利上昇に寄与している。鉱工業生産の変化はどちらかという中長期ゾーンの金利低下とフラット化に関連付けられるが、その影響は大きい。公定歩合（基準貸付利率）の上昇は金利全般の上昇と関連付けられる。なお、分解の式に従った計算結果を確認すると、VARとマクロの部分以外の項が中長期の金利低下の方向に働いており、全体として短期以外が多少低下する結果となっている。

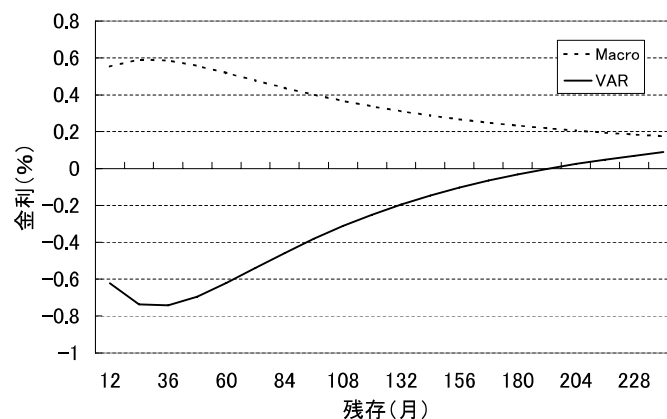


図17: イールドの変化分の分解 (06年6月から07年5月)

(注) モデルによるイールドカーブの理論値の変化分のうち、マクロ変数に由来する部分と自己相関による部分を示している



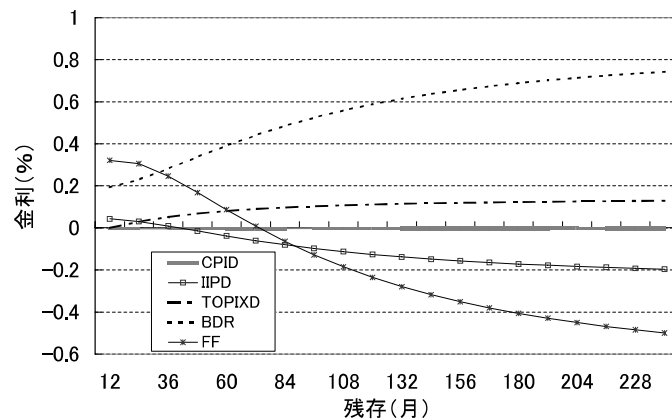


図 18: マクロ変数の影響の分解 (06年6月から07年5月)  
 (注) イールドカーブの理論値の変化分のうち、マクロ変数に由来する部分を各成分に分解した結果を示している。

## 5 結論と今後の問題

本稿では、ダイナミックな Nelson-Siegel モデルの枠組みを利用して 1992 年から 2007 年春までの 15 年間に於ける国債のイールドカーブの変動について、実証分析を行った。第 1 に、レベル、傾き、曲率を状態変数としたモデルは柔軟性が高く、1992 年から 2007 年 5 月までのゼロイールドの 3 次元的変動をよく近似できることが分かった。本稿の分析対象データの範囲では、傾きファクターは主に残存 2 年程度の比較的短期の金利に影響しており、他方、曲率ファクターは主に残存 5 年以上の金利に影響している。

第 2 に、これら 3 つの期間構造パラメータとマクロ経済変数の関連について分析した。レベルはインフレ率や公定歩合と正の方向で関連付けられ、これらマクロ変数が長期的なインフレ率の水準に関する期待形成に深く関連していることが示唆された。傾きのファクターは、TOPIX の変化率および米国の長短金利差との相関が高い。株価の上昇や米国の 10 年債の利回りと FF レートとの差で測られる米国の長短金利差拡大は、相対的に短期ゾーンの金利を下げカーブをスティーブ化する方向に働いている。米国の長短金利差の影響は市場のグローバル化との関係を示唆しているようであり、より個別の時期の分析の結果も踏まえると、株価には将来の景況感を表す先行指標としての意味づけが与えられているように考えられる。曲率のファクターとマクロ経済変数と間に明確な関係が見出せるとは必ずしもいい難いが、本稿で検証した範囲では米国の FF 金利と正の関係にあり、1999 年以降の時期をみると鉱工業生産指数の変化とも正の関係にあるとの結果が得られた。すなわち、足元における実物経済の活発化は相対的な中期ゾーンの金利上昇と関係付けられることが示された。

第 3 に、状態空間モデルの枠組みを利用した拡張カルマンフィルタによる同時推定の手法を用いてモデルの推定を行った。国債の流通市場では、90 年代半ば以降、徐々に市場でのイールドカーブが滑らかに形成されるようになってきたといわれている。そこで、1996 年以降を対象として期間構造パラメータとマクロ経済変数のモデルを同時推定し、分析結果を確認したところ、規模パラメータを含め、期間構造パラメータ

タについては、基本的に予備的考察と総合的な結果が得られた。また、単純な VAR モデルよりマクロ経済変数を考慮したモデルのほうが説明力が高いことが示された。ただし、鉱工業生産指数の変動は短・中期の金利の相対的な上昇を示唆するものの、レベルとマイナスの関係がみられるなど、改善点も残された。これらは企業部門の負債調整や金融システム不安に関連した調整など、モデルでは考慮されていない事項があることと関係しているのかもしれない。

推定されたモデルにより過去のイールドカーブの変動要因を求めると、例えば、1996年から2003年半ばまでのフラット化を伴う金利の低下局面にはマクロ要因として株価の低落が関連付けられることなどが示される。なお、日米の政策関連金利は、公定歩合が比較的速やかに金利全般の水準を左右するレベルの要素を変え、全体のカーブを上方シフトさせるのに対し、米国FFレートの場合は、これが上昇すると、日本の比較的短期のゾーンの金利は同時に上昇するが長期ゾーンにはわずかに下落の傾向が緩やかに現れる結果となった。ただし、FFレートの影響の程度は小さい。

期間構造の変化をその波及のメカニズムも含め、マクロ経済とどのように関連付けて理解するのかという問題には経済主体の期待形成も関連し、さらに実証分析の積み重ねが必要と考えられる。実証分析の結果を踏まえ、より適切なモデル化について検討していくことも我々の今後の課題である。

## 補論：ゼロイールドの推定

### スプライン関数による近似

金利の期間構造の時系列での変動を分析するためには、現実の観測値である利付国債の価格情報からゼロクーポン債の価格を推定し、ゼロクーポンイールドのデータセットを準備することが必要である。通常イールドカーブは滑らかであることが期待されるが、McColluch(1971,1975)によるスプライン関数を用いた研究以降、スプライン関数の様々なバリエーションの適用が試みられた。以下では、Steeley (1991)によるBスプライン関数を利用する方法と、Bスプライン関数に凹凸ペナルティを課した場合の2つの手法を説明する。

Steeley (1991)で提案された3次のBスプラインを用いたイールドカーブの推定では、時点 $t$ における額面価格1、満期 $\tau$ の割引債の価格 $P_t^0(\tau)$ ( $0 < \tau$ )を

$$P_t^0(\tau) = \sum_{i=-3}^{n-1} \lambda_i B_i(\tau)$$

のように近似する。ここで $B_i(\tau)$ ,  $i = -3, -2, \dots, n-1$ は、推定を行う残存期間の幅 $[\xi_0, \xi_n]$ に対して、 $\xi_{-3} < \dots < \xi_0 < \dots < \xi_n < \dots < \xi_{n+3}$ のように取った $n+7$ 個の節点に対応する3次Bスプライン基底関数を表す。未知パラメータ $\lambda_i$ ( $i = -3, \dots, n-1$ )はデータに基づいて決定される。

いま、時点 $t$ において $L$ 種類の国債が存在するとする。各債券の市場における約定金額を $P_t^l$ ( $l = 1, \dots, L$ )、経過利子を $a_t^l$ ( $l = 1, \dots, L$ )とし、時点 $t + \tau_j$ ( $j = 1, \dots, M$ )に $C_{lj}$ のキャッシュフローがあるとする。ここで、 $v_t^m, C, B, \lambda$ を

$$v_t^m = \begin{bmatrix} P_t^1 + a_t^1 \\ \vdots \\ P_t^L + a_t^L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{L1} & \cdots & c_{LM} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{-3}(\tau_1) & \cdots & B_{n-1}(\tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-3}(\tau_M) & \cdots & B_{n-1}(\tau_M) \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{-3} \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix}$$

のように定義する。このとき、 $v_t^m$ の理論値を $v_t^t$ とすると

$$v_t^t = CB\lambda$$

と表すことができる。

$\lambda$ は $v_t^m$ と $v_t^t$ の二乗誤差を最小化するベクトルとして得られる。なお、満期までの期間が0である債券の価格は額面価格1に一致しなければならないので、 $P_t^0(0) = 1$ が成立する必要がある。したがって、求める $\lambda$ を $\tilde{\lambda}$ とすると、

$$\tilde{\lambda} = \arg \min_{\lambda} \{ (v_t^m - CB\lambda)'(v_t^m - CB\lambda) | w'\lambda = 1 \}$$

となり、線形制約の下での最適化問題の解となる。ただし、 $w = (B_{-3}(0), \dots, B_{n-1}(0))'$  である。この解は

$$\tilde{\lambda} = \alpha + \frac{1 - \mu w' \alpha}{w' K w} K w$$

となる。ここで

$$K = \{(CB)'CB\}^{-1}$$

$$\alpha = K(CB)'v_t^m$$

である。

$\tilde{\lambda}$  を用いると、満期  $\tau$  の割引債の理論価格  $\tilde{P}_t^0(\tau)$  は

$$\tilde{P}_t^0(\tau) = \sum_{i=-3}^{n-1} \tilde{\lambda}_i B_i(\tau)$$

のように表すことができる。ただし、 $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_{-3}, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1})'$  とする。以上より、満期  $\tau$  のゼロイールド  $\tilde{Y}_t(\tau)$  は

$$\tilde{Y}_t(\tau) = -\frac{1}{\tau} \log \left( \tilde{P}_t^0(\tau) \right)$$

となる。

B スプラインの基底を設定する際に節点  $\xi_{-3} < \dots < \xi_0 < \dots < \xi_n < \dots < \xi_3$  をどのように設定するかは、イールドの推定結果に影響を与える。一般にある時点  $t$  で取引されている債券の満期には偏りがあり、 $t$  が異なればばらつき方も異なる。このような場合には、隣り合う 2 つの節点からなる区間のすべてに同じ個数の債券が入るように節点を設定するといった方法が知られている。また、節点の個数については、ある時点  $t$  における債券の個数を  $L_t$  とするとき、節点がおおよそ  $\sqrt{L_t}$  個になるように決定することが多い。

#### 凹凸ペナルティを課した推定方法

上記のような節点の設定法は、経済的には不合理と考えられる小さなこぶをカーブに生じさせる場合がある。イールドカーブをより滑らかに推定するには、次のような凹凸ペナルティを利用した手法を利用することができる。これはノンパラメトリック回帰で利用される方法の一つである。凹凸ペナルティを加えた場合の  $\lambda$  の推定値は、与えられた  $\gamma$  の下で、

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda} \{ (v^m - CB\lambda)'(v^m - CB\lambda) + \gamma \lambda' Z \lambda | w' \lambda = 1 \} \quad (18)$$

となる。Z は、 $(i, j)$  成分  $Z_{i,j}$  が

$$Z_{i,j} = \int_{\xi_0}^{\xi_n} \left( \frac{d^k}{dv^2} B_i(v) \right) \left( \frac{d^k}{dv^2} B_j(v) \right) dv \quad (19)$$

となる行列を表す。

$$\int_{\xi_0}^{\xi_n} \left\{ \frac{d^k}{dv^2} P_t^0(v) \right\}^2 dv = \lambda' Z \lambda \quad (20)$$

であることから、 $\lambda'Z\lambda$  は割引関数の凹凸に対するペナルティであると考えられる。すなわち、 $P_t^0(v)$  が直線に近いほど  $\lambda'Z\lambda$  が小さくなる。 $\gamma$  は、近似関数のデータへの当てはまりと凹凸ペナルティとの兼ね合いを決定する平滑化パラメータである。 $\gamma$  が大きいほど割引関数は直線に近くなり、 $\gamma$  がゼロであれば、推定は Steeley (1991) の方法に一致する。

この場合の  $\lambda$  の推定値は

$$\hat{\lambda} = \hat{\alpha} + \frac{1 - w' \hat{\alpha}}{w' \hat{K} w} \hat{K} w \quad (21)$$

となる。ただし

$$\hat{K} = \{(CB)'CB + \gamma Z\}^{-1} \quad (22)$$

$$\hat{\alpha} = \hat{K}(CB)'v^m \quad (23)$$

である。本稿で用いたゼロイールドは、このペナルティを課した場合の手法によっている。

なお、推定に先立ち、推定に用いる国債データに残存などに関する条件に基づき、一定のフィルタリングをかけたときの考え方に対し、むしろフィルタリングによるバイアスが考えられるので、できるだけ多くのデータを用いるべきであるとの立場がある。本稿では、後者の考え方に立ちつつ、データにおける残存のばらつき等を考慮してペナルティを課した推定を行ったものである。

## 参考文献

- [1] Ahrend, R., P. Catte, and R. Price, “Factors Behind Low Long-Term Interest Rates,” *OECD Economic Department Working Papers*, No. 490, 2006.
- [2] Ang, A., and M. Piazzesi, “A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, 745–787, 2003.
- [3] Christensen, J. H. E., F. X. Diebold, and G. D. Rudebusch, “The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models,” *NBER Working Paper Series*, No. 13611, 2007.
- [4] Diebold, F. X., and C. Li, “Forecasting the term structuring of government bond yields,” *Journal of Econometrics*, Vol. 130, 337–364, 2006.
- [5] Diebold, F. X., M. Piazzesi, and G. D. Rudebusch, “Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics,” *The American Economic Review*, Vol. 95, 415–420, 2005.
- [6] Diebold, F. X., G. D. Rudebusch, and S. B. Aruoba, “The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach,” *Journal of Econometrics*, Vol. 131, 309–338, 2006.

- [7] Duffie, D., and R. Kan, “A Yield-Factor Model of Interest Rates,” *Mathematical Finance* , Vol. 6, No. 4, 379–406, 1996.
- [8] Frye, J., “Principals of Risk: VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios,” *VAR : understanding and applying value-at-risk*, 275–287, 1997.
- [9] Litterman, R., and J. Scheinkman, “Common factors affecting bond returns,” *Journal of Fixed Income*, Vol. 1, 54–61, 1991.
- [10] McCulloch, J. H., “Measuring the term structure of interest rates,” *The Journal of Business*, Vol. 44, 19–31, 1971.
- [11] McCulloch, J. H., “The tax-adjusted yield curve,” *The Journal of Finance*, Vol. 30, 811–830, 1975.
- [12] Nelson, C. R. and A. F. Siegel, “Parsimonious Modeling of Yield Curves,” *The Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, 473–489, 1987.
- [13] Piazzesi, M., “Bond Yields and the Federal Reserve,” *Journal of Political Economy*, Vol. 113, no.2, 311–344, 2005.
- [14] Steeley, J. M., “Estimating the gilt-edged term structure: basis splines and confidence intervals,” *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 18, 513–529, 1991.
- [15] 小田信之・植田和男、「日銀のゼロ金利コミットメントと量的緩和政策の中長期金利への影響」(『現代経済学の潮流 2007』) 市村英彦ほか編、東洋経済新報社、2007.