技術資料

移流拡散方程式の解析解（1）

齋藤　大作*　　星　　清**

1．はじめに

土木工学で取り扱う多くの問題は、偏微分方程式で表すことができる。例えば、構造物の振動、熱伝導に関する問題、流れに関する問題などがあげられる。これらの偏微分方程式は解くことにより解の性質を理解することができ、諸問題を解決することができる。

偏微分方程式を解く方法はいくつかあり、方程式を解析的に解く方法、方程式を離散化し、差分法等を用いて数値的に解く方法がある。解析的に解く場合は結果が式として導出できるため、式中の各変数を変化させることにより、何がどのように利くかが明確にわかるといった利点がある。数値的に解く場合は解析解が導けない様な複雑な偏微分方程式を解くのに有効であるが、結果を図化しないと特性が分からない上に、式中の変数を変化させた場合にどの様になるかは再度計算しなければ分からない。よって、偏微分方程式が多少複雑な場合でも解析解を導くことは有効なことである。

ここでは、例として、流れに関する問題を取り扱うが、その中でも特に、移流と拡散に関する問題について具体的に取り扱うこととする。

2．移流拡散方程式の解析解（補遺1）

2．1　移流拡散方程式の導出

例えば、横流入のない開水路流れの流量の伝搬は、連続式と運動方程式によって(2.1)式のように表される。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial A}{\partial t}=0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}+V\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)=S_0-S_f \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで、Q：流量、y：水深、S_0：河床勾配、S_f：損失勾配である。また、運動方程式内の左辺第2項、すなわち慣性項が他の項と比べ無視できるとき、(2.1)式は(2.2)式となる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial A}{\partial t}=0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}=S_0-S_f \end{cases} \tag{2.2}$$

この二式を用いることにより、(2.3)式が導ける。(2.3)式は速水の式とも呼ばれ流れの移流拡散に関する最も一般的な式である。（補遺2）

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+D_2\frac{\partial Q}{\partial x}=D_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

ここで、$D_1=\dfrac{A^2y^{4/3}}{2n^2QB}$　，　$D_2=\dfrac{5Q}{3A}$

この式は、Qを物質濃度とすることにより、河川内に流入した汚染物質の広がり等の諸問題にも適用できる。

2．2　単位ステップ関数による移流拡散

一般的な移流拡散方程式は2.1で導いたように(2.4)式で表される。

$$\frac{\partial y}{\partial t}+D_2\frac{\partial y}{\partial x}=D_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

ここでは簡単な場合を考えD_1、D_2は定数と仮定する。yは水位として、開水路の水位変動問題を考える。

この式に初期条件、境界条件を与えることにより解が決定される。

初期・境界条件を以下のように与える。

a) $y(0,t)=U_0(t)$　　$t\geqq 0$　　単位ステップ関数

b) $y(x,t)\neq\infty$　　$x\to\infty,\ t\geqq 0$　　無限距離

c) $y(x,0)=0$　　$x\geqq 0$　　初期水位

上の条件の内a),b)は境界条件であり、c)は初期条件である。

a)は$x=0$すなわち上流端において常にU_0の水位を与えていることを表している。b)は$x=\infty$すなわち無限距離において水位は無限にはならないことを表している。c)は$t=0$すなわち初期の状態として水路が空の状態を表している。

これらの初期・境界条件は、例えば貯水池下流の開水路の水深変化を計算する場合に適用できる。まず、

貯水池のゲートが閉まっており、下流の開水路には水が無いとする。次に、ゲートを開きゲートでの水深がU_0となるように水を流す。このとき、下流の各地点の水深は時間とともにどのように変化するかといった問題に適用できる。

(2.4)式はラプラス変換を用いることにより、簡単に解くことができる。yをラプラス変換したものを以下とすると、

$$L[y(x,t)] = \tau(x,s) = \int_0^\infty \exp(-st)\,y(x,t)\,dt \tag{2.5}$$

(2.4)式のラプラス変換は(2.6)式となる。（補遺３）

$$D_1\frac{d^2\tau}{dx^2} - D_2\frac{d\tau}{dx} + y(x,0) - s\tau = 0 \tag{2.6}$$

これは、２階線形微分方程式であり、簡単に解くことができる。これに、各初期・境界条件を代入し整理すると(2.7)式となる。（補遺４）

$$\tau(x,s) = \frac{1}{s}\exp\left(\frac{D_2 x}{2D_1}\right)\exp\left[-\left\{s+\left[\frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\right]^2\right\}^{1/2}\frac{x}{\sqrt{D_1}}\right] \tag{2.7}$$

これを逆変換して、

$$L^{-1}[\tau(x,t)] = y(x,t)$$

$$= \exp\left(\frac{D_2 x}{2D_1}\right)L^{-1}\left[\frac{1}{s}\exp\left\{-\left[s+\left(\frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\right)^2\right]^{1/2}\frac{x}{\sqrt{D_1}}\right\}\right] \tag{2.8}$$

(2.8)式の右辺のラプラス逆変換は(2.9)式になる。（補遺５）

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\exp\left[-c\left(s+b^2\right)^{1/2}\right]\right\} = \frac{1}{2}\exp(-cb)\ erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}-b\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}\exp(cb)\ erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right) \tag{2.9}$$

ただし、 $c = \dfrac{x}{\sqrt{D_1}}$ ， $b = \dfrac{D_2}{2\sqrt{D_1}}$

$$erfc(z) = 1 - erf(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-t^2)dt$$

（誤差関数について、詳しくは付録を参照）

これを用いると(2.8)式は(2.10)式となる。

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{D_2 x}{2D_1}\right)\left[\exp\left(-\frac{D_2 x}{2D_1}\right)\ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1 t}}-\frac{D_2\sqrt{t}}{2\sqrt{D_1}}\right) + \exp\left(\frac{D_2 x}{2D_1}\right)\ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1 t}}+\frac{D_2\sqrt{t}}{2\sqrt{D_1}}\right)\right] \tag{2.10}$$

２．３　パルス入力による移流拡散

次に、前述と同じ(2.4)式を用い初期・境界条件を変えた場合について考える。

移流拡散方程式は式(2.11)である。

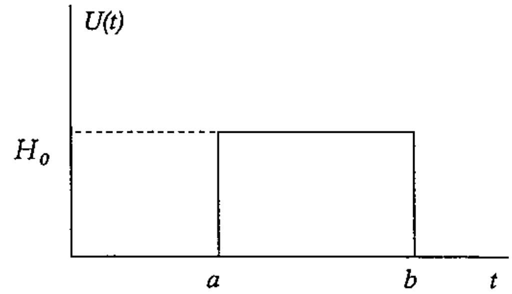
$$\frac{\partial y}{\partial t} + D_2\frac{\partial y}{\partial x} = D_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

初期・境界条件を次のように与える。

$$U_a(t) = \begin{cases} 0 & if \quad 0 < t < a \\ 1 & if \quad t > a \end{cases}$$

$$U_b(t) = \begin{cases} 0 & if \quad 0 < t < b \\ 1 & if \quad t > b \end{cases}$$

a) $y(0,t) = H_0[U_a(t) - U_b(t)]$　$t \geqq 0$　パルス入力
b) $y(x,t) \neq \infty$　$x \to \infty,\ t \geqq 0$　無限距離
c) $y(x,0) = 0$　$t \geqq 0$　初期水位



これを2.1と同様に貯水池のゲート下流の開水路における水深変化として考えると、この境界条件は$t=a$にゲートを開け、$t=b$にゲートを閉じるといった場合に適用できる。

(2.11)式も2.1と同様にラプラス変換を行い、初期・境界条件を代入し、整理すると(2.12)式となる。（補遺６）

$$\tau(x,s) = H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as) - \frac{1}{s}\exp(-bs)\right]\exp(\lambda_2 x)$$

$$= H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as) - \frac{1}{s}\exp(-bs)\right]\exp\left[\left(D_2 - \sqrt{D_2^2 + 4D_1 s}\right)\frac{x}{2D_1}\right]$$

$$= H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as) - \frac{1}{s}\exp(-bs)\right]\exp\left[\frac{D_2}{2D_1}x - \frac{x}{2D_1}\sqrt{4D_1}\sqrt{s + \frac{D_2^2}{4D_1}}\right]$$

$$= H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as) - \frac{1}{s}\exp(-bs)\right]\exp\left\{\frac{D_2 x}{2D_1} - \left[s + \left(\frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{D_1}}\right\} \tag{2.12}$$

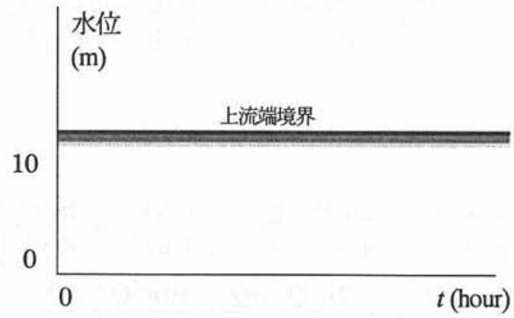
これを、逆変換すると(2.13)式となる。（補遺７）

$$
\begin{aligned}
y(x,t) = \frac{1}{2} H_0 \exp\left(\frac{D_2 x}{2D_1}\right) \Biggl\{ \Biggl[& \exp\left(-\frac{D_2 x}{2D_1}\right) \\
& \times \ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-a)}} - \frac{D_2\sqrt{(t-a)}}{2\sqrt{D_1}}\right) \\
& + \exp\left(\frac{D_2 x}{2D_1}\right) \ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-a)}} + \frac{D_2\sqrt{(t-a)}}{2\sqrt{D_1}}\right) \Biggr] U_a(t) \\
& - \Biggl[\exp\left(-\frac{D_2 x}{2D_1}\right) \ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-b)}} - \frac{D_2\sqrt{(t-b)}}{2\sqrt{D_1}}\right) \\
& + \exp\left(\frac{D_2 x}{2D_1}\right) \ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-b)}} + \frac{D_2\sqrt{(t-b)}}{2\sqrt{D_1}}\right) \Biggr] U_b(t) \Biggr\}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

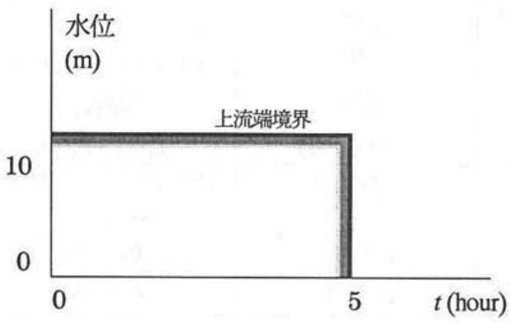
練習問題

以下の各問において上流端境界で流入水位が与えられた時、下流での水位変化を求めよ。
（速水の式のD_1=1,000m^2/s, D_2=0.7m/sとして、10km,20km,30km地点における時間と水深の関係をグラフにせよ。）
誤差関数は付録の近似式を用いること。

問題1.1



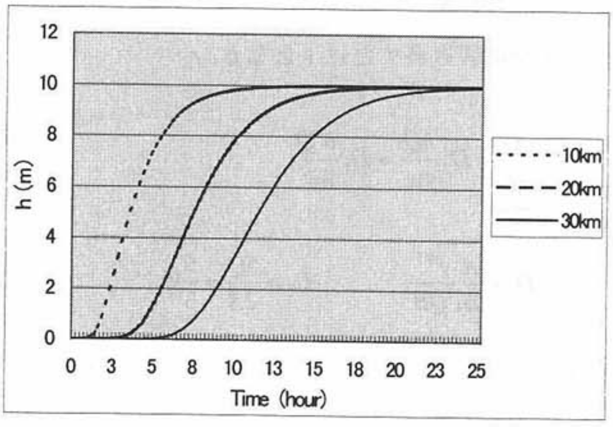
問題1.2



練習問題解答

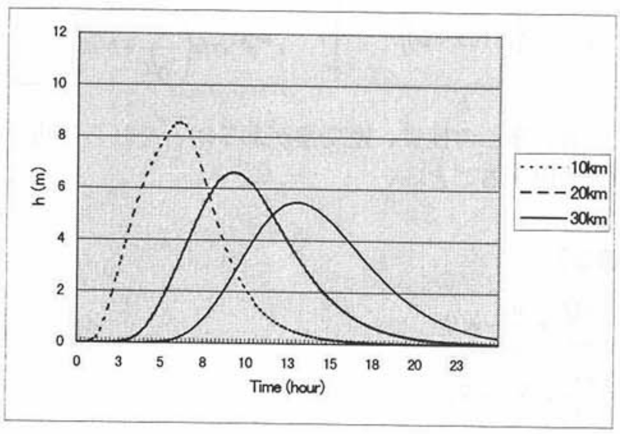
問題1.1

式(2.10)を使用



問題1.2

式(2.13)を使用



[補遺１]

偏微分方程式の解析解を求めるには、色々な方法があるが、ここでは、ラプラス変換による方法を用いて行う。

線形の微分方程式はラプラス変換を利用することにより、きわめて容易に解を求めることができ、かつ、初期条件や境界条件を満足する解を求めることができる。

ラプラス変換を利用する方法はまず、任意関数$f(t)$に次のような変換を行い、

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

方程式を解きやすいように変形し、$F(s)$についての解を求め、最後に、ラプラス逆変換を行い、$f(t)$についての解を求める方法である。

最後に行うラプラス逆変換は、多くの場合、逆変換表を用いると便利であり、ラプラス変換の基本性質が理解できれば、容易に解を求めることができる。

ここに、本編で用いるラプラス変換に関する基本性質とラプラス逆変換についてまとめる。

ラプラス変換の基本性質

基本性質	f(t)	F(s)
変換	$f(t)$	$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$
線形	$\lambda f(t)$ $f_1(t)+f_2(t)$	$\lambda F(s)$ $F_1(s)+F_2(s)$
微分	$d^n f(t)/dt^n$	$s^n F-s^{n-1}f_0-s^{n-2}f_0^{(1)}\cdots$ $\cdots-f_0^{(n-1)}$
移動	$e^{-\lambda t}f(t)$ $e^{\lambda t}f(t)$	$F(s+\lambda)$ $F(s-\lambda)$

ラプラス逆変換表

F(s)	f(t)
$1/s$	$U(t)$　(単位ステップ関数)
$1/(s-a)$	e^{as}
$e^{-c\sqrt{s}}/\left\{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+b\right)\right\}$	$e^{bc}e^{b^2t}erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)$

この他、多くの性質、逆変換があるが、それらは専門書を参照すること。

[補遺２]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial A}{\partial t}=0\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial x}=S_0-S_f\end{cases} \qquad \text{（補１）}$$

ここで、$Q(x,t)$：流量、$y(x,t)$：水深、S_0：河床勾配、$S_f=n^2Q^2/A^2R^{4/3}$：損失勾配である。

（補１）式の時間に関する編微分をとると以下の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial S_0}{\partial t}-\left(\frac{2n^2Q}{A^2R^{4/3}}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{4n^2Q^2}{3A^2R^{7/3}}\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{2n^2Q^2}{A^3R^{4/3}}\frac{\partial A}{\partial t}\right) \qquad \text{（補２）}$$

幅Bの広矩形断面では$A(x,t)=By(x,t)$となり連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{（補３）}$$

広矩形断面では径深を以下とすると$R(x,t)\cong y(x,t)$となる。これより、

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial (By)}{\partial t}=B\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{（補４）}$$

である。

（補３）、（補４）を用いて、（補２）式を書き直すと（補５）となる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\frac{2n^2Q}{A^2y^{4/3}}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{4n^2Q^2}{3A^2By^{7/3}}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{2n^2Q^2}{A^3y^{4/3}}\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{（補５）}$$

さらに、整理すると（補６）となる。

$$-\frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=-\frac{2n^2Q}{A^2y^{4/3}}\frac{\partial Q}{\partial t}-\left(\frac{4n^2Q^2}{3A^2By^{7/3}}+\frac{2n^2Q^2}{A^3y^{4/3}}\right)\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=-\frac{2n^2Q}{A^2y^{4/3}}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{10n^2Q^2}{3A^3y^{4/3}}\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{（補６）}$$

両辺に$-(A^2y^{4/3}/2n^2Q)$をかける。

$$\frac{A^2y^{4/3}}{2Bn^2Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{5Q}{3A}\frac{\partial Q}{\partial x}$$

簡単に書き直すと以下となる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+D_2\frac{\partial Q}{\partial x}=D_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad \text{（補７）}$$

ここで、

$$D_1=\frac{A^2y^{4/3}}{2n^2QB}\quad,\quad D_2=\frac{5Q}{3A}=\frac{5}{3}V$$

である。

[補遺３]

$$\frac{\partial y}{\partial t}+D_2\frac{\partial y}{\partial x}=D_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{(補８)}$$

上式をラプラス変換で解くこととする。まず、次式を定義する。

$$L[y(x,t)]=\tau(x,s)=\int_0^\infty \exp(-st)y(x,t)dt$$

前述した表のラプラス変換の基本性質より、dy/dt のラプラス変換は次式となる。

$$L\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right]=s\tau(x,s)-y(x,0) \qquad \text{(補９)}$$

したがって、(補８)のラプラス変換は、

$$s\tau(x,s)-y(x,0)+D_2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty y\exp(-st)dt \qquad \text{(補10)}$$
$$=D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty y\exp(-st)dt$$

となり、τ を用いて書き直すと、

$$D_1\frac{d^2\tau}{dx^2}-D_2\frac{d\tau}{dx}+y(x,0)-s\tau=0 \qquad \text{(補11)}$$

となる。

[補遺４]

$$D_1\frac{d^2\tau}{dx^2}-D_2\frac{d\tau}{dx}+y(x,0)-s\tau=0 \qquad \text{(補12)}$$

ここで、c) $y(x,0)=0$を代入すると(補12)は(補13)となる。

$$D_1\frac{d^2\tau}{dx^2}-D_2\frac{d\tau}{dx}-s\tau=0 \qquad \text{(補13)}$$

(補13)は、２階同次線形微分方程式である。

(補13)を解くには(補14)のようなλについての補助方程式をたてて解く。

$$D_1\lambda^2-D_2\lambda-s=0 \qquad \text{(補14)}$$

この補助方程式の解は以下となる。

$$\lambda_1=\left(D_2+\sqrt{D_2^2+4D_1s}\right)\Big/2D_1$$

$$\lambda_2=\left(D_2-\sqrt{D_2^2+4D_1s}\right)\Big/2D_1$$

これより(補13)の一般解は、(補15)となる。

$$\tau(x,s)=C_1\exp(\lambda_1x)+C_2\exp(\lambda_2x) \qquad \text{(補15)}$$

(補15)に境界条件 b)をあてはめる。
$x\to\infty$で$y(x,t)\neq\infty$, $t\geqq 0$であるので $\tau(\infty,s)\neq\infty$であり、このためには$C_1=0$でなければならない。よって、(補15)は、

$$\tau(x,s)=C_2\exp(\lambda_2x) \qquad \text{(補16)}$$

となり、境界条件 a) $y(0,t)=U_0(t)$ $t\geqq 0$ より単位ステップ関数のラプラス変換は $\tau(0,s)={}^1/_s$であり、$C_2={}^1/_s$となる。
(補13)の一般解は、

$$\tau(x,s)=\frac{1}{s}\exp(\lambda_2x)$$

$$\tau(x,s)=\frac{1}{s}\exp\left[\left(D_2-\sqrt{D_2^2+4D_1s}\right)\frac{x}{2D_1}\right]$$

$$\tau(x,s)=\frac{1}{s}\exp\left(\frac{D_2x}{2D_1}\right)\exp\left[-\left\{s+\left[\frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\right]^2\right\}^{1/2}\frac{x}{\sqrt{D_1}}\right] \qquad \text{(補17)}$$

[補遺５]

次の式のラプラス逆変換を求める。

$$\frac{1}{s}e^{-c\sqrt{s+b^2}} \qquad \text{(補18)}$$

この形のラプラス逆変換は変換表にはないので、変換表にある形を利用する。ラプラス逆変換表には以下の変換がある。

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-c\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+b\right)}\right]=e^{bc}e^{b^2t}erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right) \qquad \text{(補19)}$$

まず、次式を考える。

$$F_1(s)=\frac{1}{s}e^{-c\sqrt{s+b^2}}$$
$$F_2(s)=\frac{1}{s-b^2}e^{-c\sqrt{s}} \qquad \text{(補20)}$$

$F_1(s)$と$F_2(s)$の関係は、
$F_1(s)=F_2(s+b^2)$
となる。

今、求めるものは$F_1(s)$の逆変換であり、以下の関係がある。

$$L^{-1}F_1(s)=L^{-1}F_2(s+b^2)=e^{-b^2t}f_2(t) \qquad (補21)$$

よって、$F_2(s)$の逆変換$f_2(t)$が分かれば、$F_1(s)$の逆変換が求まる。

そこで、次式$F_2(s)$を(補19)が適用できる形に変形する。

$$\frac{1}{s-b^2}e^{-c\sqrt{s}} \qquad (補22)$$

(補19)の左辺を考慮し、(補22)の分数部分を変形する。

$$\frac{1}{s-b^2}=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+b\right)\left(\sqrt{s}-b\right)}=\frac{1}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+b\right)}+\frac{1}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}-b\right)}$$

これを用いて書き直す。

$$\frac{1}{s-b^2}e^{-c\sqrt{s}}=\frac{1}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+b\right)}e^{-c\sqrt{s}}+\frac{1}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}-b\right)}e^{-c\sqrt{s}} \qquad (補23)$$

これで(補22)は逆変換を行えるように変形でき、(補22)を逆変換すると次式となる。

$$\begin{aligned}L^{-1}F_2(s)&=f_2(t)\\&=L^{-1}\left[\frac{1}{s-b^2}e^{-c\sqrt{s}}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+b\right)}e^{-c\sqrt{s}}+\frac{1}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}-b\right)}e^{-c\sqrt{s}}\right]\\&=\frac{1}{2}e^{bc}e^{b^2t}erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)+\frac{1}{2}e^{-bc}e^{b^2t}erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}-b\sqrt{t}\right)\end{aligned} \qquad (補24)$$

(右辺第２項は$b=-b$として変換する。)

よって(補21)より、求めるラプラス逆変換は、

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-c\sqrt{s+b^2}}\right]&=L^{-1}F_1(s)=e^{-b^2t}f_2(t)\\&=\frac{1}{2}e^{bc}erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)+\frac{1}{2}e^{-bc}erfc\left(\frac{c}{2\sqrt{t}}-b\sqrt{t}\right)\end{aligned}$$

となる。

[補遺６]

２．２と同様に一般解は(補25)となる。

$$\tau(x,s)=C_1\exp(\lambda_1x)+C_2\exp(\lambda_2x) \qquad (補25)$$

$\tau(x,s)$はtについての$y(x,t)$のラプラス変換である。

条件 b)を(補25)に適用すると、次式になる。

$$\tau(x,s)=C_2\exp(\lambda_2x) \qquad (補26)$$

条件 a)よりC_2はパルス入力のラプラス変換であり、

$$\begin{aligned}C_2&=\int_0^\infty y(0,t)e^{-st}dt=\int_a^b H_0e^{-st}dt\\&=\int_a^\infty H_0e^{-st}dt-\int_b^\infty H_0e^{-st}dt\end{aligned}$$

であるので、

$$\tau(0,s)=C_2=H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as)-\frac{1}{s}\exp(-bs)\right] \qquad (補27)$$

となる。

よって、一般解は次式となる。

$$\tau(x,s)=H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as)-\frac{1}{s}\exp(-bs)\right]\exp(\lambda_2x)$$

[補遺７]

$$\begin{aligned}\tau(x,s)&=H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as)-\frac{1}{s}\exp(-bs)\right]\exp\left\{\frac{D_2x}{2D_1}-\left[s+\left(\frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2D_1}\right\}\\&=H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-as)\right]\exp\left\{\frac{D_2x}{2D_1}-\left[s+\left(\frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2D_1}\right\}\\&\quad-H_0\left[\frac{1}{s}\exp(-bs)\right]\exp\left\{\frac{D_2x}{2D_1}-\left[s+\left(\frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2D_1}\right\}\end{aligned}$$

これを、2.2と同様にラプラス逆変換を行う。このときラプラスの基本性質の移動性質を用いて行う。

$$\begin{aligned}y(x,t)=\frac{1}{2}H_0\exp\left(\frac{D_2x}{2D_1}\right)\Bigg\{&\Bigg[\exp\left(-\frac{D_2x}{2D_1}\right)\\&\times erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-a)}}-\frac{D_2\sqrt{(t-a)}}{2\sqrt{D_1}}\right)\\&+\exp\left(\frac{D_2x}{2D_1}\right)\ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-a)}}+\frac{D_2\sqrt{(t-a)}}{2\sqrt{D_1}}\right)\Bigg]U_a(t)\\&-\Bigg[\exp\left(-\frac{D_2x}{2D_1}\right)\ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-b)}}-\frac{D_2\sqrt{(t-b)}}{2\sqrt{D_1}}\right)\\&+\exp\left(\frac{D_2x}{2D_1}\right)\ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1(t-b)}}+\frac{D_2\sqrt{(t-b)}}{2\sqrt{D_1}}\right)\Bigg]U_b(t)\Bigg\}\end{aligned}$$

付　録

誤差関数(error function)と標準正規分布の関係

本編においてたびたび出てくる*erfc*の数値解法について述べる。

前述のように関数$erf(x)$は次式で定義される。

$$erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-z^2)dz \qquad (付1)$$
$$= 1 - erf(x)$$

これらの解析解は無い。よって、近似式を用いて数値解を導出することにする。

ここでは誤差関数と確率積分の関係について述べながら実際に用いる場合の近似式を紹介する。

標準正規分布の確率密度関数の下側確率は(付２)で定義できる。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt \qquad (付2)$$

これを書き直すと次式となる。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^0 \exp(-\frac{t^2}{2})dt + \int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt\right]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt$$

$z = t/\sqrt{2}$ の変換を行うと、

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x/\sqrt{2}} \exp(-z^2)dz + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}erf(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}$$

となる。これより、

$$erf(x) = 2\phi(\sqrt{2}x) - 1 \qquad (付3)$$
$$erfc(x) = 1 - erf(x)$$
$$= 2\left[1 - \phi(\sqrt{2}x)\right]$$

となる。

確率積分の近似値はHastings(1955)によって、以下のように示された。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt \qquad (x > 0) \qquad (付4)$$
$$z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$$
$$\phi(x) = 1 - z(x)(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$$

ここで、

$t = 1/(1 + 0.33267x)$

$a_1 = 0.4361836$

$a_2 = -0.1201676$

$a_3 = 0.9372980$

である。

これを用いると誤差関数の近似値は$x > 0$のとき(付３)であり、$x < 0$のとき$erf(-x) = -erf(x)$で表すことができる。

齋藤　大作*

開発土木研究所
環境水工部
環境研究室
研究員

星　清**

開発土木研究所長
工学博士