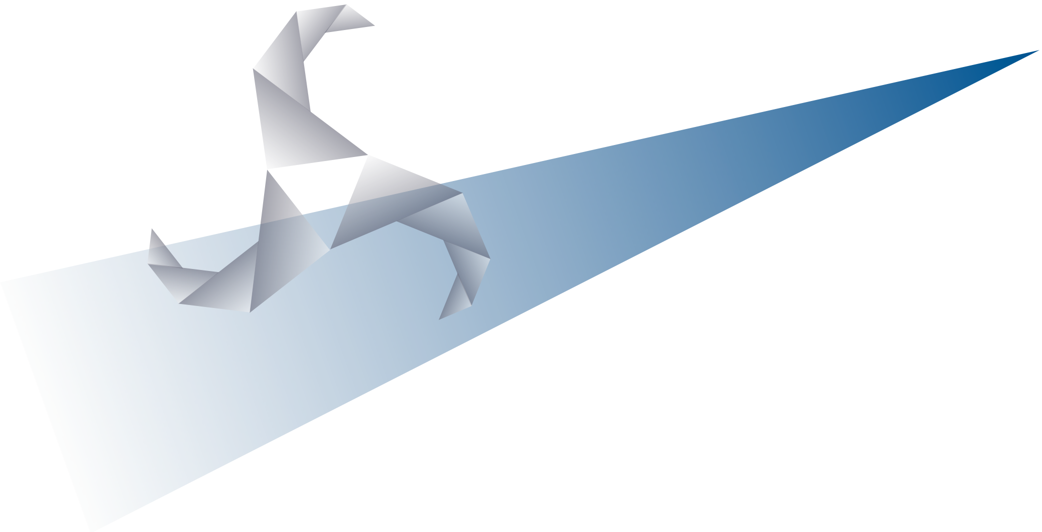
鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education
ISSN：1881−6134



ハンス・フロイデンタールの数学化

塩見拓博

vol.9, no.8
Feb. 2007

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

鳥取大学 数学教育学研究室

＜目次＞

第１章　研究の目的と方法

本章では、研究の動機、目的、方法について述べる。１－１では、ハンス・フロイデンタールの数学化を取り上げるに至った動機について述べる。１－２では、目的をあげ、その目的を達成するための課題について述べ、その課題を解決するためにどのように研究を進めていくかについて述べる。１－３では、数学化を明らかにする意義について述べる。

１－１　研究の動機

筆者は初め、何か知識を得ることにより「生徒がどのように発達していくのだろう」また「そのとき生徒の中では何がおこっているのだろう」ということに疑問を持ち、ピアジェの同化と調節について調べていた。だが、筆者の知識のなさゆえに時間がかかりすぎてしまい、断念するに至った。

そこで次に、主題をより焦点化し、数学の授業で学習される内容は生徒にどのように理解されるのかを考えだした。２乗に比例する関数の用具的理解（「できる」ことで表面的に「わかっている」ように見受けられる理解の様相）と関係的理解（単にやり方を知っているだけでなく、そうしたやり方が、なぜそれでよいのか、まで理解している理解の様相）について考えていたのだが、そのとき２乗に比例する関数の単元で学習される内容について

- $y = ax^2$で表されるものが存在する
- $y = ax^2$のグラフ
- グラフと変域
- 変化の割合

このように挙げ、既に形づくられた数学的知識の操作により考察を試みていた。つまり、２乗に比例する関数がどんな考えの延長にあるか、２乗に比例する関数を学習する必要性は何か、その現代的意味を考えておらず、自分で２乗に比例する関数を作り上げていく作業を行わなかったのである。つまり、２乗に比例する関数を数学化する作業を行っていなかったのである。このような経緯で数学化を考えるに至った。その際、数学化を考えている全ての人物を対象にすることは物理的に無理があり、フロイデンタールが「数学化」という用語を提唱した人物であることから、本主題を設定するに至った。

１－２　研究の目的と方法

本研究の目的は

ハンス・フロイデンタールの数学化とは何か その教育的意義とは何か

を明らかにすることである。

この目的を達成するために以下の課題を設定した。

課題１	ハンス・フロイデンタールとはどのような人物か
課題２	ハンス・フロイデンタールの考える「数学する」と「数学化する」の差異とは
課題３	生徒の学ぶべき数学化とは
課題４	ハンス・フロイデンタールの考える数学化の教育的意義とは
課題５	今日の数学の学習指導における数学化の意義とは

まず数学化を考える際、フロイデンタールがどういう立場で数学化を語っているかをふまえるため、簡単ではあるが人物紹介と氏が立脚する直観主義に影響を与えたであろうブラウワーの歴史的背景からその直観主義をみていく。それに伴いフロイデンタールの数学観も明らかにすることにより課題Ｉの解決を図る。

続いて、課題Ｉをふまえ実際に数学化の考察に取り組むわけであるが、数学化を考えていく中で、数学化にはプロセスがあり、そのプロセスには様々な種類があること、数学化する対象に違いがあることが明らかとなった。これらをふまえて、数学化とは何か、に答えられなければならず、「数学する」と「数学化する」の差異を明らかにすることにより、数学化とは何か、がより明確になると考える。

本研究は、数学教育における人物研究あるいはその人物の思想研究であるが、このような類の論文には常にその今日的意義が問われる。実際に数学化を教授に取り入れるのであれば、生

徒はどこまでの数学化を扱うべきかを考えることは必然であり、今日的意義を考えるための一つの基盤となりえるであろう。
また、数学化を教材にアプローチする多数の方法の中の一つとするのではなく、有用な方法であるとするため、その教育的意義について述べることも必要であり、これは、フロイデンタールの考えを今日に生かそうとすることに対しても必要である。

これらの課題を考察する方法として、フロイデンタール自身に語らせることにより考察する。つまり、実際にフロイデンタールが述べている内容は、それを適切に把握し、引用をもとに考察を進め、そうでない内容は、フロイデンタールにより書かれた文献から自身の中にフロイデンタール像を作成し、例えば、ある質問に対し「フロイデンタールだとこう述べるだろう」という具合に考察を進めていくものである。

１－３　研究の意義

今日のわが国の数学教育における目的とは何か。それは、子どもに数学的知識・技能を獲得させることはもとより、その過程である、数学的な見方・考え方を伸ばすことであろう。今では当たり前のように言われているこのような考え方に、国外においても早くから着目した人物がフロイデンタールである。このような考え方は、既に形づくられた数学的知識・技能を受動的に教授し、訓練させているだけで達成されるだろうか。そうではなく、現実の問題から出発し、数学を創造・発展させていくように学習させることが行われなければならないのである。フロイデンタールも同様の問題意識を持っており、子どもの望むべき活動として「数学化」を提唱した。それは、現実の問題を数学的方法にアクセスできる問題へ導く活動、さらにその数学を質の高い数学へと発展していく活動であるため、今日の数学教育を考える際、フロイデンタールの数学化を明らかにすることで有効な指針となるであろうと予想する。

第１章まとめ

本研究の目的は、ハンス・フロイデンタールの数学化とは何か、その教育的意義とは何かを明らかにすることである。

この目的を達成することにより、数学的な見方・考え方を目標とした数学教育に対し、有効な指針となるのではないか、と考えられる。具体的には、第４章で議論する。

また､数学化の具体的な内容として｢現実を数学化すること｣と「数学を数学化すること」が考えられたが、これは３章で議論する。

目的を達成するための方法として以下の５つの課題を設定した。

課題１　ハンス・フロイデンタールとはどのような人物か

課題２　ハンス・フロイデンタールの考える「数学をする」と「数学化する」の差異とは

課題３　生徒の学ぶべき数学化とは

課題４　ハンス・フロイデンタールの考える数学化の教育的意義とは

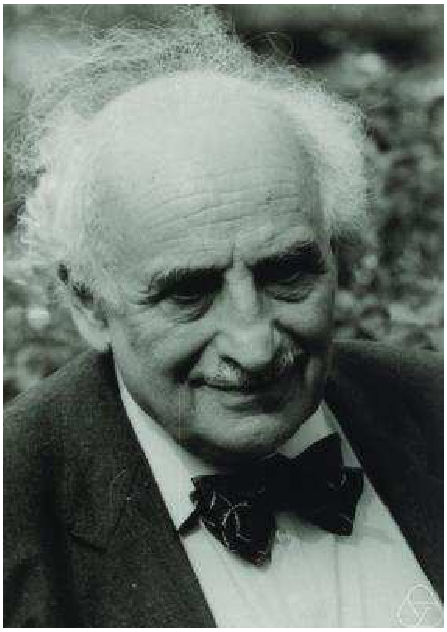
課題５　今日の数学の学習指導における数学化の意義とは

この課題について、課題１は２章で、課題２・３は３章で、課題４・５は４章でそれぞれの解決を図っていく。

第２章　ハンス・フロイデンタールとは

本章では、数学化を考える際、ハンス・フロイデンタールがどういう立場で語っているかを明らかにするため、２－１において、課題Ｉを解決する。課題Ｉにも関係するが、数学化を考える際、フロイデンタールの数学観を明らかにしておくことは有効に働くと考えられ、そのため２－２においてブラウワーの歴史的背景をふまえ、これについて述べる。

２－１　フロイデンタールとはどのような人物か



Hans Freudenthal (1983)

フロイデンタールは 1905 年 9 月 17 日にドイツの Luckenwalde に生を受けた。その後、氏はベルリンとパリの大学で勉学に励み、有名な直観主義者である L.E.J.ブラウワーに招かれオランダの Amsterdam で活動することとなる。そのため氏は、ブラウワーの影響を少なからず受けているといえよう。1946 年には、Utrecht の国立大学の教授として任命されそこで働く。そのとき氏の研究は、純粋で応用された数学や数学の基礎についてであり、氏の科学的な働きは幾何学の一部分に焦点化されたものであった。また、氏はトポロジー（一般トポロジーのコンパクト化）とリー群論にかなりの貢献をしたことでも有名である。

だが、氏は長年、数学教育に関心をもっており、数学教授の際、教師から一方的に数学的知識を教えられることを問題視し、望ましい方法として、生徒自身が数学的知識や数学的な考え方を発明し直さなければならないこと、現実の問題から出発し、生徒自身により数学化という活動を行わなければならないとし、数学化と発明し直すことを提唱することとなる。氏の実際として、数学から数学教育への観点の変更は 1955 年に国際的に明らかとなった。そのころ氏はオランダの代表者として ICMI（THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION）の一員となり、最終的に 1966 年から 1970 年まで会長の職を務める。その仕事の一環として、1968 年に【*How to teach mathematics so as to be* *useful*】（以下【数学教授】とする）という論文を伴い、現代において国際的な数学教育における最も権威ある雑誌として知られる【*Educational Studies in Mathematics*】を出版し、1971 年に IOWO の管理者の職についたことにより氏の数学から数学教育への移行は完全なものとなった。その後、1990 年 10 月 13 日に亡くなるまで、価値のある数多くの数学教育に関する活動を行ってきており、【*Revisiting mathematics education*】（以下【再考】とする）は氏の集大成である。

　また、氏の死後、フロイデンタール研究所が創設された。そこでの教育的な原理とは、Realistic Mathematics Education（現実的数学教育）である。この原理は２つの部分から成り立っており、一部は、現実的な物語として起こされる数学の問題を強調すること、もう一つの部分は、「発明し直すこと」である。これは、まさに氏が強調してきた内容であり、根底には数学を「人間の活動としての数学」と捉えるフロイデンタール自身が生きているといえよう。

フロイデンタール研究所

２－２　ハンス・フロイデンタールの数学観

上述したように、フロイデンタールはブラウワーのもとで仕事をしていたことがあるため、その影響を少なからず受けているといえる。そこで、ブラウワーが活躍し、フロイデンタールにも関係する時期として簡単ではあるが20世紀のブラウワーに関する歴史的背景をみていきながら、フロイデンタールが立脚する直観主義とフロイデンタールの数学観について考察していく。

長年にわたり数学は飛躍的な進歩を遂げてきた。だが、それは同じ速度で進歩してきたというわけではない。十七世紀に科学革命がおこり、それに次ぐ第二の科学革命の一環として起こった数学的存在に関する理解の深化と転換という十九世紀数学の飛躍的発展は、『英国の数学史家ジェレミー・グレイによって剴切にも「数学的存在の十九世紀革命」と呼ばれた。【二十世紀数学思想（以下【数学思想】とする．Ｐ９】』

『十九世紀以前の純粋数学は、西洋的理解では、数（離散量）を対象とする算術と、図形（連続量）を対象とする幾何学が基本になっているものとされていた。【数学思想. P7】』『ところが、十九世紀が進むうちに、数や図形の根源にはもっと本質的な数学的存在があるに違いない、という認識が一般的になっていった。【数学思想．P8】』このことから高等解析学、非ユークリッド幾何学、代数方程式に関するガロワ理論、集合論などが形成され、この頃を「存在論革命」(ontological revolution）と呼ぶ。これは、『数や図形が、より根源的で一般的な「構造」(structure）によってとらえられるようになると二十世紀特有の段階に達する。この過程は、フランスの数学者集団ニコラ・ブルバキが結成された一九三〇年代に完成の境域にいたる。それゆえ、十九世紀の「存在論革命」は、二十世紀初頭の「構造論革命」へと連続的に発展したと見なすことができるのである。【数学思想. Ｐ９】』

『「構造論革命」は代数学の分野から起こり、解析学の新しい基礎づけのための位相空間論へと波及し、ルベーグらの測度論の建設を経て、一段落した。その後、数学的構造はカントル的集合論をさらに超えたカテゴリー概念を中軸に再編・拡充され

るまでにいたっている。【数学思想．Ｐ９】』こういった一連の数学における革命を推進していった代表的数学者がヒルベルトである。『ヒルベルトの革命の方法論的道具は古代ギリシャで生まれた公理論的方法であった。彼はその方法を『幾何学の基礎』(一八九九年）において十九世紀末の幾何学に応用し、幾何学の公理系を整序して、ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学を少なくとも論理的には同格であることを示してみせただけではなく、もっと根源的にその方法を算術、それから数学基礎論の道具とした。ヒルベルトの公理論的方法に基づいた数学の基礎づけの試みである形式主義は、一九二〇年代に新たな段階を迎え、無矛盾な公理論的体系をもって数学理論の正当化とすべきものと主張した。【数学思想．Ｐ９-10】』

『ヒルベルトによる形式主義的数学の理解の試みは包括的で、多くの数学者には受け入れやすいものであったが、認識論、すなわち不動の「真の知識」とは何かをめぐって探求を続けてきた批判的な知的基準を備えた立場から見て、ナイーブな側面をも宿していた。そのことを早くから察知していたのが、ヒルベルトの最大のライヴァルで直観主義の領軸 L.E.J.ブラウワーであった。ブラウワーは、一九二七年暮れにはヒルベルトの証明論が要請する無矛盾性の証明など不可能に決まっているという見解を提出していた。そして、一九二八年春、ウィーンで直観主義数学の考え方について講演し【数学思想．P12】』哲学者のウィトゲンシュタイン、数学者のクルト．ゲーデル、などに大きなインパクトを与えた。

だが、ブラウワーの直観主義は広く一般に用いられたというわけではなかった。それにはブラウワーの特異な思想前提が起因の一つとしてあげられる。

『ブラウワーはおよそ近代的な世俗生活を嫌悪し、内省的な個人生活を憧憬するようなロマンティックな少年であったらしい。そして重要なことは、どうやらそれが個人の意識から生み出される自然数の直観から数学が構成されるべきであるとし、言語なり記号的なもの一般を忌避する彼の数学のモティヴェーションともなったというのである。【数学思想．P62】』つまり、数学的対象は、我々から独立に実在しているのではなく、むしろ我々の精神の自由な所産であると主張する。例えば、自然数（１，

２，３,・・・）は、無限個あるといわれるが、これは自然数全体（無限の全体）が完結した姿であらかじめ存在しているのでなく、限りなく生成されるという立場なのである。また、ブラウワーは先ほどの構成主義的態度や個人主義的態度から、無限集合において、背理法による非存在の矛盾にもとづき存在を示す証明を認めなかった。それ故、無限集合において「排中律」、すなわち、ある命題は真であるか偽であるかのどちらかであるという推論法則を捨てるべきだと主張した。これにより、例えば ab=0 から a=0 または b=0 を直接結論することはできない、などいろいろと制限がかかり、この点からも直観主義に不賛同の結果をもたらしたといえる。

しかし、ウィトゲンシュタインがそうであったように、それが「インスピレーション」を与えてくれる役割としては有用である。つまり、ウィトゲンシュタインが非古典論理学について以下のように述べている役割として有用なのである。『そうしたゲームの価値は、それらが偏見を打ち壊すところにある。すなわち、必ずしもこのやり方でなくてもよいということを、それらは示すのである。【数学思想．P94】』

ともあれ、フロイデンタールはこのブラウワーの直観主義の影響をうけていたと考えられる。それはフロイデンタールの数学観に表れている。

上で少し述べたように、フロイデンタールの数学観とは、数学を活動とみることである。数学には、前もって確立された演繹的なシステム（例えば、教科書に示される数学）としての完成された数学がある。他方、『ソクラテスの方法はその生徒に、煉瓦から最終的に何が建設されるかを知らせるために、どのように彼を基礎的な分析に参加させるかを、示す。【*Mathematics as an Educational Task*（以下【課題】とする）、P91】』のように、応用・応用可能性のある現象から出発し、生徒により作り上げられる、まさに生まれ出ようとしている状況にある（in statu nascendi）数学がある。フロイデンタールは前者を既成の（ready-made）数学、後者を行動に表された（acted-out）数学と呼んでいる。フロイデンタールのいう活動としての数学は後者を指す。ここには、数学をある種の超越的存在（生徒からみると、完成された数学が別にある）とみなすのではなく、ブラ

ウワーの高弟であり直観主義を代表する一人であるハイティングが、直観主義の目標を『知性の自然な機能、思考の自由で生き生きした活動として数学を行う。【数学思想．P42】』『数学は人間精神の産物なのである。【数学思想．P42】』と述べているような活動ととらえる構成主義的な立場をみることができる。

では、活動としての数学における数学的活動とは何であるか。フロイデンタールは、【課題】の中で「数学的活動とは、経験の場を組織する活動である。」と述べている。ではどのように組織すればよいか。フロイデンタールは、van Hiele の学習プロセスのレベルにしたがって組織することを主張している。そこでは、一つの水準において、経験を組織する行為が、次の水準においては、分析の対象となり、今度はそれを組織する。そしてその次の水準では、すぐ前の水準における組織の行為が対象となり、次々と学習水準が上昇するというものである。

数学をこのような「人間の活動としての数学」と捉えることがフロイデンタールの数学観である。

残された課題：課題Ｉである「フロイデンタールとはどのような人物か」について、読むことができた文献が少なく、大まかにしか明らかにすることができなかった。そのため、この課題の目的である本研究主題に対する有効な指針をあたえることができなかった。この課題は今後研究を進めていく上で重要な課題であり、文献を読み進め明らかにする。（この課題は一般的にいう「課題」とは異なり、今後の筆者自身にとって、という意味であげた。）

第２章まとめ

本章では、課題１に対しての考察を述べた。フロイデンタールははじめ数学者であったが、長年数学教育に関心をもっており、数学教授の際、教師から一方的に数学的知識を教えられることを問題視し、望ましい方法として、数学を「人間の活動としての数学」とみる考え方、つまり、生徒自身が数学的知識や数学的な考え方を発明し直さなければならないこと、現実の問題から出発し、生徒自身により数学化するという活動を行わなければならないとし、数学化と発明し直すことを提唱した人物である。また、数学化について述べる際、以上の立場に立ち述べている。

第３章　ハンス・フロイデンタールの数学化

　本章では、フロイデンタールの数学化がいかなるものかを明らかにする。３－１・２では、数学化とは何に対して行うか、どのように行うかについて述べる。さらに数学化について明確にするため３－３の節を設けた。ここでは「数学する」と「数学化する」を比較し述べることにより課題Ⅱを解決する。では数学化をどのように教授すべきか。これを３－５で明らかにし、３－６で課題Ⅲである「生徒はどこまでの数学化を学ぶべきか」について考察する。

３－１　数学化の対象のレベル

数学化とは何か。まず数学化の対象のレベルから明らかにしていくこととする。つまり、いったい何に対して数学化を行うかから述べよう。

『学生は数学化することを学ぶべきである―私が意味するのは、始めるのに、現実の場面を数学化することである。数学的な場面を数学化することは終点であって、出発点ではない。【課題．P55】』というフロイデンタールの主張からわかるように、数学化する対象にはレベルの違いがある。

また、『生徒が数学化を、確かに数学の応用可能性を保証するために、それが非数学的なものに適用する最も低いレベル上で学ぶべきこと、しかし、数学的なものが少なくとも局所的に組織される次のレベル上ではいっそう少なく学ぶべきことである。【課題．ｐ101】』とも主張している。このことから数学化する対象に対するレベルは以下のようになる。

最初のレベル：非数学的な場面を数学化する。
次のレベル　：数学的な場面を局所的に数学化する。
・
・
最後のレベル：数学的な場面を数学化する。

最初のレベルについて：

フロイデンタールは数学指導で数学の応用が言及されるなら、教授法的倒置のパターンにしたがってなされるべきでないことを主張している。数学が最初に来て、具体的な問題が一つの応用として後にくるべきではないということである。フロイデンタールはこれではなく、負の数は、もしそれら負の数がてこで応用されるべきなら、それらで出発するべきであり、対数がもし計算尺、空気圧、または、双曲線に応用されるべきなら、それらで出発するべきであると主張する。つまり、数学との関係をもつ現実の現象で出発するべきであり、そのため最初のレベルをこう位置づけている。

後のレベルについては次節で説明を加える。

以上から、数学化には大きく分けて「現実を数学化すること」と「数学を数学化すること」がある。そして現実を数学化することに始まり、数学を数学化することへ続くことを述べた。そこで次にその数学化のプロセスについて詳しく説明を加えることとする。

３－２　数学化のプロセス

３－２－１　最下位のレベル―現実を数学化すること―

以上で述べたように、数学化のプロセスとして最初に行われることは現実を数学化することである。フロイデンタールは『今日、多くの人は、生徒が非数学的なものを数学化することを学ぶべきこと、つまり、それを数学的な洗練にアクセス可能な構造に整理組織するのを学ぶべきことに同意するだろう。【課題.P101】』と述べている。このことから現実を数学化することとは、生活の世界から記号の世界へ導くことであり、数学的な方法にアクセスでき、数学的に洗練できる構造に整理・組織することである。つまり問題の構造を把握することから始まる。この方法の一つとして、問題を図式化することが考えられる。これによって問題の数学的構造が把握され、問題が解決されるわけである。

例えば、「グー、チョキ、パーにもう一つ加えて４つの種類にして、公平なジャンケンを作ってみよう」という問題で考察する。

4 種の場合を直接考える前に、まず、3 種の場合のジャンケンを図式化してみよう。グー、チョキ、パーを三角形の頂点にあてはめる。これはジャンケンを三角形という数学的モデルに置き換えたものである（図１）。

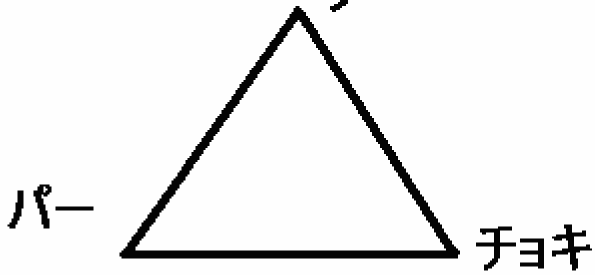


図 1

このモデルをもとに 4 種の場合の考察を進める。前と同じように考えると、新しいジャンケンは四角形の頂点にあてはめて考えればよい。しかし、四角形を見てわかるように、三角形の場合とは異なり、対戦は辺の上だけではなく、今度は対角線にある組の勝ち負けも考えねばならない（図２）。つまり、６つの組それぞれの勝ち負けを考えなければならない。

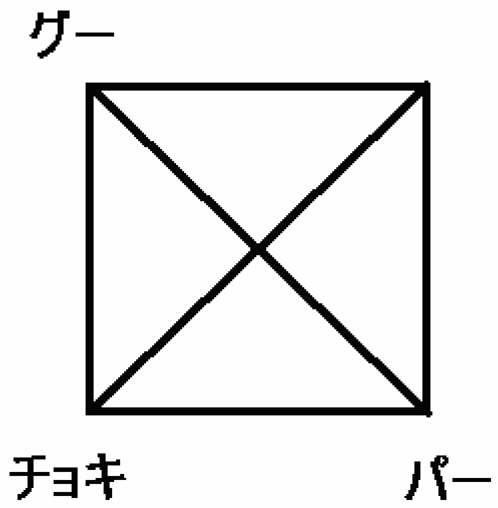


図 2

それを考えるためには、図表示も、組み合わせだけでなく勝ち負けの図表示も考えなければならない。勝ち負けに対して矢印をつけ、それを含めて図式化したものが図 3 である。

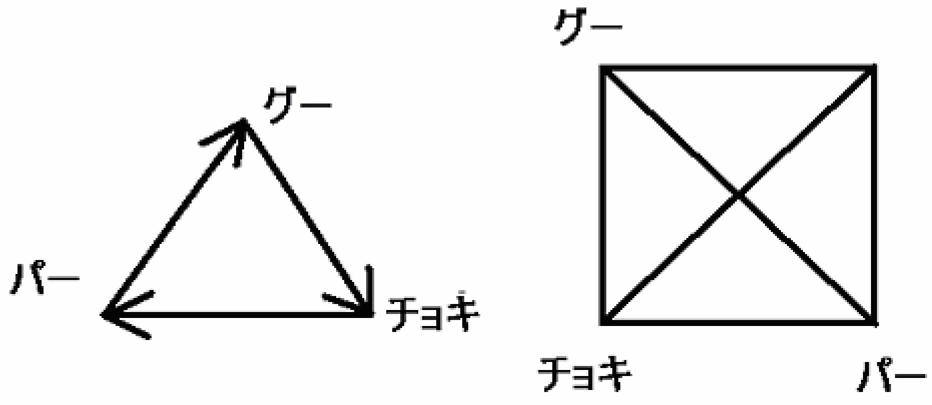


図3

3 種の場合は簡単である。では 4 種の場合はどうだろうか。公平を期するには、各々の頂点で一つ矢印が入ったら、一つ矢印が出るようにすればよい。これは言い換えると、四角形の辺と対角線について一筆書きができ、もとに戻ることができればよいということである。

まさに、現実を数学的な方法にアクセスできる構造に数学化し、問題の構造を明らかにしたのである。この構造はさらに 5 種類のジャンケン（図４）やさらに一般化したジャンケンにも適用でき、数学的な洗練にアクセスできる構造ともいえるであろう。

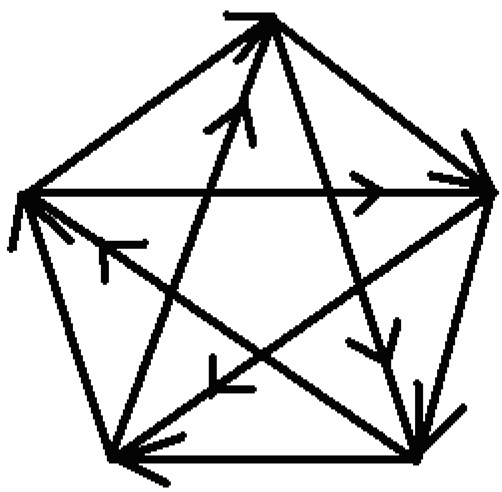


図 4

３－２－２　現実の数学化に続くレベル
―幾何の事例からの考察―

上で一般化という数学的な洗練を示したが、他にどのような洗練された数学を目指すべきか。それを幾何による事例から見ていく。フロイデンタールは数学化のプロセスのいっそう高いレベルとして『空間的な対象 gestalt を図形として把握することは、空間の数学化である。平行四辺形の諸性質を、平行四辺形の定義に到達するために、他のものをそれの上に基礎付けるためある特段の性質が現れるように並べること、それは、平行四辺形の概念場を数学化することである。幾何の諸定理を、少数からそれら全てを得るように並べること、それは、幾何を数学化すること（または、公理化すること）である。このシステムを言語の手段によって整理組織することは、再びある科目を数学化することで、今は、定式化と呼ばれる。その物語は自身を繰り返す―平行四辺形についてのそれぞれの一般的陳述は数学的な陳述であるが、これらの陳述の全体は、それ自身でごたまぜにされた混乱状態である。それは、もし論理的な関係によって構造化されるなら、数学になり、それが数学化である。幾何的な定理（複数）は一つの混乱であり、それらが局所的に関係付けられていてさえ、それはなお幾何的な章（複数）の混乱である。公理的な数学化によってこの魂は数学化される。言語的には、これは再び、日常語で表現される全てのように、混乱状態である。ここで、言語的な組織化は一つの形式的なシステムに導く。【課題．P101】』と述べている。

つまり、数学化のプロセスのいっそう高いレベルである公理化という洗練へのプロセスとは

- 空間の数学化
- 概念場の数学化
- 幾何の数学化（公理化）

である。まず空間の数学化から述べよう。

《空間の数学化》

例えば、様々な平行四辺形が与えられ、その中から共通の原理により組織し、平行四辺形の性質を定めること。

つまり、平行四辺形の形という現実の状況から共通の構造を把握し、数学的な洗練にアクセスできる数学に数学化することである。これにより初めて、対象は幾何図形となり、数学的手段によるアプローチが可能となるのである。

《概念場の数学化》

上述したことから、概念場の数学化とは、ある一種の幾何の諸性質を、その定義に到達するため、つまり他の性質をそれの上に基礎付けるため、ある特段の性質が表れるように並べることである。具体的には以下の通りである。

例えば、以下のように、定義をそれぞれの性質間の関係から（この性質はあの性質から導かれる、というように）導いたとき、それぞれの性質は全てある特定の性質（複数の場合もある）から導かれ、図５の逆ピラミッドのように並べることができる。（定義は以下の一つに限られるのではなく、導き方しだいで多様であり、その中の一つを以下に示したことを注意しておく。）

平行四辺形の定義：2 組の対辺がそれぞれ平行な四角形
平行四辺形の性質：① 2 組の対辺はそれぞれ等しい。
② 2 組の対角はそれぞれ等しい。
③ 2 つの対角線はおのおのの中点で交わる。
④隣り合う角は補角である。
⑤対角線によって分けられる三角形は合同となる。
⑥垂線により切り取られた図形の移動により、長方形ができること。

など、他にも多数の性質がある。

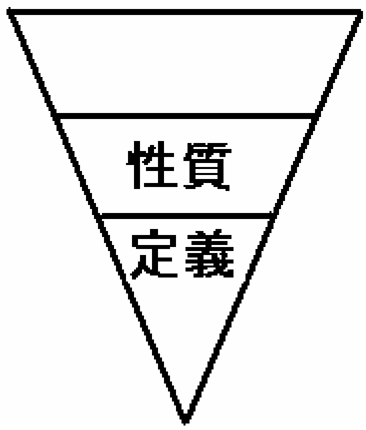


図5

上の性質だけで考えると、図５の性質には、①、②、③、⑤を位置づけることができ、さらにその上には④、⑥の性質を位置づけることができる。

《公理化》

上述したように、数学化で目指すべき洗練の一つである公理化とは、幾何の諸定理を、少数からそれらすべてを得るように並べることである。

いきなり公理化が行われるかというとそうではなく、その前に数学的な経験の蓄積が形成され、それら諸命題を論理的な関係により組織する活動が行われなければならない。その後、それら命題の中の少数を公理のように前程とする事柄として特定し、公理化が行われるのである。

だが、ここで問題となるのは、そのような公理がどこまで厳密であるべきかということである。

この厳密さについて、フロイデンタールは【課題】の中で、「子どもたち自身が「なぜ？」を問い、それに対して根拠とする事柄に適切に答えることができるならば厳密である。」と述べている。つまり、公理の厳密さとは、教師にとっての厳密さではなく、子ども自身により定められる厳密さである。

このような公理化について、具体的には以下の通りである。

（資料２）より、一部抜粋した論理的な関係が図６であり、それを公理化したものが図７である。

（資料２）として、和田（2001）より「中学校において公理として定められている事柄やそれらから導かれた定理のネットワーク」を引用している。

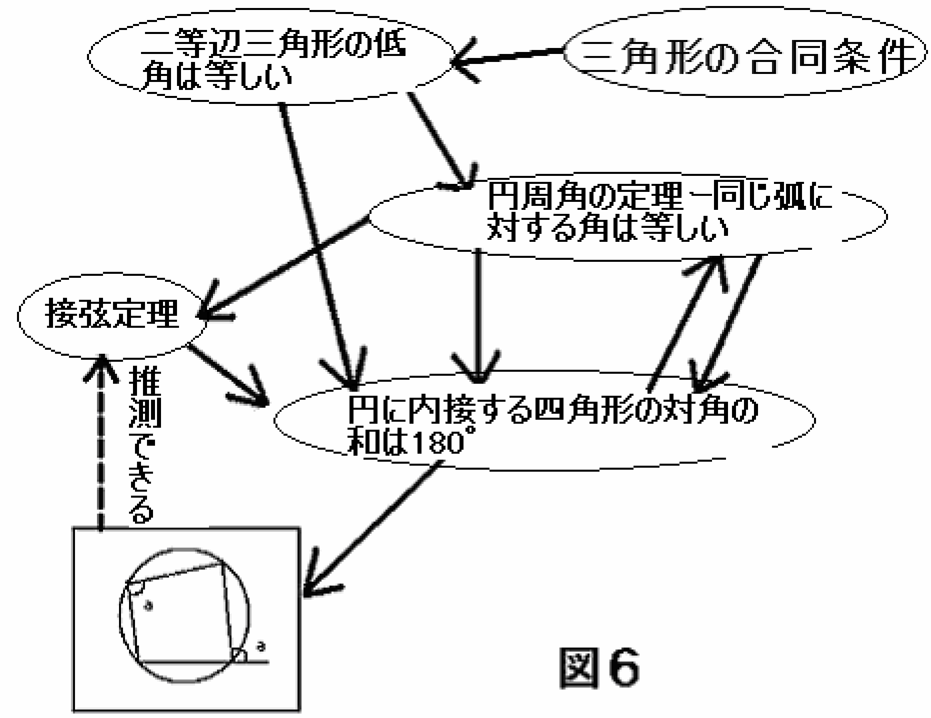


図6

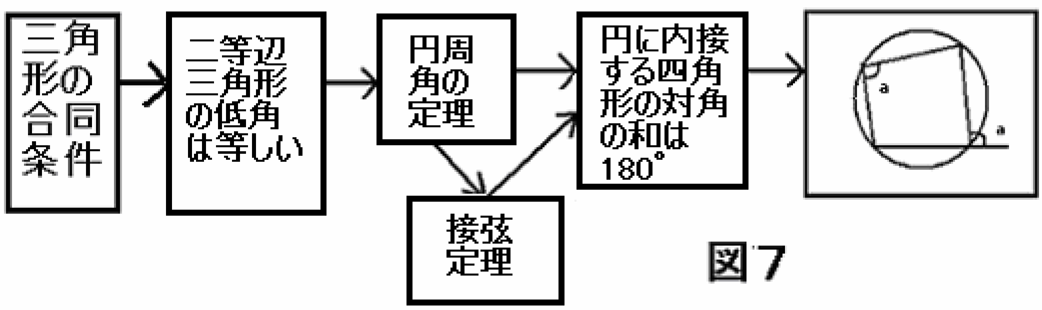


図7

このように論理的な関係に整理組織することはもちろん数学を数学化しているわけであるが、この例は局所的である。なぜなら、上で『幾何的な定理（複数）は一つの混乱であり、それらが局所的に関係付けられていてさえ、それはなお幾何的な章（複数）の混乱である。』と述べたように、（資料２）で挙げた定理やその他数多くの定理など、これら数多くの定理の論理的な関係を含んでいないからである。

よってこの例は、前節の「数学化の対象のレベル」で述べた、「数学的な場面を局所的に数学化する」というレベルとしてみなすことができ、最後のレベルとして位置づけられる「数学的な場面を数学化する」とは、局所的な状況や幾何的な章内に限定された状況の垣根をこえ、大域的に組織することである。

このように「局所的」を量的にとらえることの他に、質的にとらえることが考えられる。それは、上述した厳密さについての観点である。数学者が用いるような厳密な公理などで構成される演繹的な体系を学習することまで要求せず、先の三角形の合同条件を公理とすることからも明らかなように、厳密さに違いがある。つまり、「数学的な場面を局所的に数学化する」とは子ども自身による厳密さにより組織することであり、「数学的な場面を数学化する」とは、万人が認める厳密さにより組織することであるととらえることができる。

残された課題：上述した公理化の方法は、De Villiers が「記述的公理化」と呼んでいるものである。この他にも公理化の方法として、杉山が公理的方法を挙げている。簡潔に述べると、それは、命題から出発し「根拠を探る」という観点から、どんどんさかのぼり公理を定めることにより公理化を行うことである。実際の教授を考えるのであれば、これらについて考えなければならず、課題となりえるであろう。

３－２－３　幾何のプロセスの一般的な解釈

以上、幾何の数学化のプロセスについて述べてきたが、このプロセスは幾何に限定されるかどうかを検討しなければならない。結論から述べると、そっくりそのまま同じというわけではないが、幾何に限定されるプロセスではない。これについて、フロイデンタールは幾何のプロセスを数の指導に適用した例で述べているため、それについて説明する。

フロイデンタールは、分数と正の数・負の数の指導において、分数は代数で扱うべきであり、初等算術の内容でないことを主張している。ここで、代数と初等算術との区別について述べておこう。これについて、フロイデンタールは『初等算術は直観的で現実に近いか、あるいは、そうあるべきである。しかしながら、代数は典型的にその形式的-記号的方法によって特徴づけられる。【課題．P208】』と述べている。つまり、指導内容の配列の面から考えると、今日の学校数学では、分数指導の後に正の数・負の数を指導することが普通であるけれども、その指導順序を入れ替えて、正の数・負の数の指導の後に分数を指導すべきであると主張している。

なぜ、分数を正の数・負の数より後にすべきであるか。フロイデンタールは、分数指導の問題点として「子どもが直観的に分数を扱うことができるようになると、教師はすぐにアルゴリズム的分数へ移行しようとする」と挙げており、直観的分数からアルゴリズム的分数へと移行するとき、一回限りの方法、つまり、operational でない方法で指導されるところに教育的な問題があることを指摘している。この問題点を解決するために、正の数・負の数の指導を分数の指導の前に位置づけているのである。では具体的に以下で述べよう。

（直観的分数とアルゴリズム的分数については資料 3 を参照）

負の数とその演算について、子どもが直観的に認めることができるような指導方法として、－２というような負の数を、例えば３－５の答えとして考えさせることがある。そして、もし負の数を数直線を用いて表示することを指導したとすれば、整

数の領域内での演算、例えば「５を足す」、「５を引く」の意味は、それぞれ数直線を右へ５進む、左へ５進むというように直観的にとらえさせることができる。これにより

－３＋５，　－３＋２，　３－５，　－３－５

というタイプの演算は直観的に答えをだすことができる。問題は以下のような負の数を足すことである。

（±３）＋（－５），　（±３）－（－５）

また、乗法については、上記の負の数を足す指導が進んでいるとすると、正の数あるいは負の数に正の数をかけることを累加の考えにより理解できる。そこで、ここでも問題となるのは以下のような負の数をかける場合である。

（±３）×（－５）

これをどのように指導すればよいか。フロイデンタールは、「帰納的外挿法（inductive-extrapolatory method）」がよいと述べている。それは以下のように、現在の既知の知識体系を未知の領域に拡大して利用することである。

３＋２＝５	３－２＝１	３・２＝６	(－３)・２＝－６
３＋１＝４	３－１＝２	３・１＝３	(－３)・１＝－３
３＋０＝３	３－０＝３	３・０＝０	(－３)・０＝０
3＋(-1)＝□	3－(-1)=□	3・(-1)＝□	(-３)・(-1)＝□

だがこの方法は分数の演算には適用することができない。この点でも正の数・負の数の指導が分数の指導に先行する理由となるが、問題は後続する分数へ拡張するために今の構造をどう変化させるかである。ここで代数が登場する。

例えば、（－２）+（－３）の演算の場合

－２を　x+２＝０・・・①　を満たすx

－３を　y+３＝０・・・②　を満たすyとすると

①+②から　（x+y）+５＝０

したがって　x＋y＝－５

つまり　（－２）＋（－３）＝－５

このような構造に組織することにより、分数も同様に扱うことができる。

例えば7/3＋3/5の演算の場合

7/3を　３x＝７・・・①　を満たすx

3/5を　５x＝３・・・②　を満たすyとすると

①×５から　１５x＝３５・・・③

②×３から　１５y＝９　・・・④

③＋④から　１５（x＋y）＝４４

したがって　x＋y＝44/15

つまり　7/3＋3/5＝44/15

この構造はさらに、整数あるいは分数の減法、乗法、除法にも拡張することができる。

以上で、自然数、整数、分数という限られた数領域における抽象化を述べてきた。もちろんこの数領域の抽象化はこれで終わりではなく、最終的に実数を演繹的な体系にまとめるまで抽象化される。それまでのプロセスにはレベルがあり、それは以下の通りである。

第一レベル「直観的操作」・・・これは上記した数直線を扱い一つ一つ考えるなど、個々の数とその演算を扱うレベルである。

第二レベル「代数的操作」・・・第一レベルで得られた法則に着目して、それを文字を用いて定式化するするレベルである。

第三レベル「局所的組織化」・・第二レベルで得られた多くの関係式を考察の対象とし、それらの間の論理的関係、例えば式Aは式Bと式Cから導くことができる、というような論理的関係を局所的に考察するレベルである。

第四レベル「大域的組織化」・・第三レベルで考察した関係式の間の論理的関係に着目し、厳密な演繹的体系にまとめあげるレベルである。

このレベルは、幾何の数学化のプロセスを数の指導に適用させたものである。このことから、上記した、幾何の数学化のプロセスは幾何に限定されないといえよう。また、同時にフロイデンタールの望むべき洗練方法である拡張についても述べた。

この項の例により、アルゴリズム的分数について少しふれたが、フロイデンタールは望むべき洗練として形式化も挙げている。そこで次項でこれについて説明を加える。

注）ここであげた教材解釈は日本の教材解釈に取って代わるものとしてあげたわけではなく、フロイデンタールが望むべき数学的活動の一例としてとらえることができる。それは指導順序を入れ替えたこの教材解釈に表れている。すなわち、上でも述べたoperationalな方法での組織であるだけでなく、帰納的外挿法を用いることによって、教師からの一方的な教授ではなく、子ども自身が直観を離れても自分の過去の経験をよりどころとして、新しい内容の考え方や方法を発見していくことができるよう意図されているといえよう。

３－２－４　数学化のプロセスである形式化

フロイデンタールは『数学で、アルゴリズムは見事であり、ルーチンは逃れることができない。あるアルゴリズムは、正当にレベルを考慮し、発明し直すことによって、学ばなければならない【課題．P106】』と述べ、数学的な洗練の一つの大切な側面として形式化を挙げている。

だが、なぜアルゴリズムは学ばなければならないか。それは、一回一回計算の意味を考えていたのではあまりに時間がかかりすぎてしまうため、ルーチン（＝決まりきった仕事）として適用できる規則が必要となるからである。かといって、フロイデンタールの「発明し直すことによって」という言葉からも明らかであるが、アルゴリズムを一方的に教授することでは満足に働かない。なぜなら、生徒の必要に関係のない様態で学ばれたことは長く保存されないし、例えば、スイッチがどのように働くかを知ることなく、電灯のスイッチを付けたり消したりすることはできるが、スイッチが適切に働かないとき、それを修理できないように、アルゴリズムもそれがうまく働かないとき修理することはできないからである。

では形式化はどのようなプロセスに従って進行するか。加法を例にとり述べよう。

「すでに８人乗っているバスに、さらに５人乗ってきました。全部で何人になったでしょう。」という問題で考える。

３－２－１（最下位のレベル―現実を数学化すること―）で述べたように、まずは現実を数学化することが行われなければならない。そこで、人数が増えたので加えるという構造により８＋５を組織する。次いで数えだすのであるが、初めは、自分の指やおはじきやそろばんという具体物を使い直観的に数える。ある子は無意識の工夫により（８＋２）＋３を構成するだろう（例えば、指は 10 本しかないため)。だが、無意識のうちは直観的な活動と同じレベルにある。それが生徒の必要により意識されることにより、次のレベルに上昇し、そこでは 10 でまとめて計算するというアイデアのよさを実感できる。このアイデアも筆算に向かうために大切な考え方であるが、もう一つ大切な考え方として位取りの考え方があげられる。それは例えば、２６

の２が 20 を表しているという考え方であり、26+２は６+２を考え、26+20 は２+２を考えなければならないということである。この考え方ができないと、26+3 の答えを 56 としてしまう恐れがあるため重要である。以上から、26 を 20 と６、17 を 10 と７と表現でき、26+17 を 20+10 と６+７、つまり、30 と 13 の和ととらえることから 43 を導くことができる（図８)。そして図８を図９のように表すことにより筆算のアルゴリズムを開発できるのである。

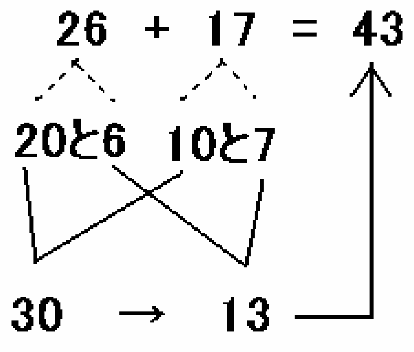


図8

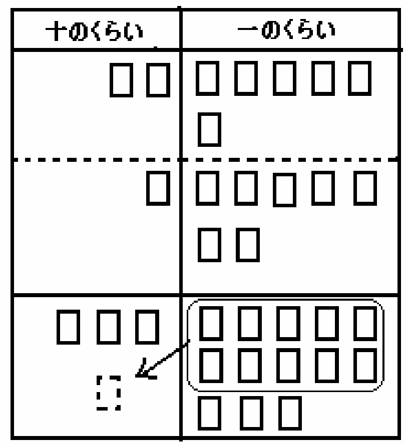


図9

以上で筆算への形式化を述べてきた。そこでは、10 でまとめて数えるレベルと位取りによるレベルを経てアルゴリズムが開発される。他のアルゴリズムについても、フロイデンタールが述べるように『正当にレベルを考慮し、発明し直すことによって、学ばなければならない。』つまり、そのアルゴリズムに必要である考え方を明らかにし、それが生徒に発明し直されるように教材を組織しなければならないのである。また、そこでおこる水準上昇の方法については本章５節である「数学化の教授の手段」で述べよう。

３－３　数学化についてのさらなる考察

数学化をさらに明確にするため、この節を設けた。数学化については前節である「数学化のレベル」で明らかにしたことを基に述べるが、ここではまず、「数学する」とは何か、フロイデンタールは「数学する」に２つの意味があることを述べており、それを明らかにする。その後「数学する」と「数学化する」の差異についてフロイデンタールの数学観に基づき比較考察する。

３－３－１　「数学する」

数学するとは何か。フロイデンタールは【*GEOMETORY BETWEEN THE DEVIL AND THE DEEP SEA*】（以下から【幾何学】とする。）の中で、「What is mathematics ?」（ただし、これが意味する内容は、数学がどのように定義されたかではなく、人間の精神において何であるか、である。）を問い、それを説明するため「What is language ?」について述べている。

【幾何学】の中で、言語は２つの意味で述べられている。『その１つが、単語、接頭語、接尾語、語尾変化、統語法の貯蔵である。もう１つが、話すこと、読むこと、書くこと、自分自身を表現する活動である。これらの言語教授における操作上の特徴は Saussure によって、既成の（ready made）言語と行動に表された（acted out）言語というように区別された。子どもの間は気にも留めないが、彼らは、母親の話す言語であろうと外国語であろうと、活動的に言語を教わったであろう。だが、彼らが合理的であることの中で発達したとき、教授の哲学は、活動から既成の言語の解釈に移り変わった。これはうまく働かない。それが悪い哲学であるからか。そうではない。貯蔵と活動という言語の解釈はどちらも正しいが、異なる人に応用されるところに差異がある。言語学者にとって貯蔵はよく、実際大多数である言語の使用者にとって活動はよい。（【幾何学】より筆者翻訳）』

この例から推測されるように、数学にも２つの意味がある。その１つが、数、公式、計算方法の貯蔵であり、もう１つが数

学するという活動である。もちろんこれら両方が「数学する」ということを表す。前者は暗記することであり、後者は、問題を探す活動、問題を解決する活動である。さらに、フロイデンタールは組織することも活動であると主張しており、これも後者の「数学する」に加えられる。

３－３－２　「数学化する」

同章 2 節である「数学化のプロセス」で述べた内容と重複するところは、簡潔に述べる。

上述したように、フロイデンタールの数学観とは「人間の活動としての数学」である。

また、フロイデンタールは、【数学教授】の中で、『人間が学ばなければならないのは閉じられたシステムとしての数学ではなく、活動としての数学であり、現実を数学化することの過程や可能ならば数学を数学化すること過程である。』と述べていることから、フロイデンタールがいうところの「人間の活動としての数学」とは、「現実を数学化する活動」と「数学を数学化する活動」である。

「現実を数学化」するとは、現実を数学的手段にアクセスでき、数学的洗練にアクセスできる構造に整理-組織する活動である。 「数学を数学化」するとは、現実の数学化に続く数学を数学的手段により、一般化、拡張、形式化、公理化という洗練に向け、整理-組織する活動である。

数学を数学化することについて、本章 5 節の「数学化の教授の手段《学習プロセスのレベル》」で詳しく述べるが、学習の際いっそう高いレベルでは、いっそう低いレベルの行為を分析の対象とし進められる。また、4 章の「ハンス・フロイデンタールの数学化の教育的意義の中の《応用・応用可能性について》」で詳しく述べるが、生徒は応用・応用可能性のある数学を学ばなければならず、これは構成する数学的知識にそれがあるだけでなく、その構成の過程にもそれを目指したものである。

３－３－３　「数学する」と「数学化する」の差異

数学する	数学化する
① 数、公式、計算方法の貯蔵であり、暗記すること。 ② 問題を探す活動、問題を解決する活動、組織する活動。	現実を数学的手段にアクセスでき、数学的洗練にアクセスできる構造に整理-組織する活動であり、現実の数学化に続く数学を数学的手段によって整理-組織する活動である。 前者を「現実を数学化すること」と呼び、後者を「数学を数学化すること」と呼ぶ。

これら２者の比較から、「数学化する」とは「数学する」の②に該当する。つまり、「数学する」と「数学化する」の差異とは、それぞれがまったく別物というわけではなく、「数学する」という大きな枠に「数学化する」が含まれる形をとることがわかる。これにはフロイデンタールの数学観が現れている。つまり、数学を人間の活動としての数学と捉えることであり、数学化するとはこれを強調した言葉といってよい。

３－４　数学化―水平方向と垂直方向

今まで読んだ文献からフロイデンタールが主張する、数学化のプロセス、数学化のプロセスの種類、数学化の対象について述べてきた。この他に、数学化について、Treffers が「水平方向の数学化」と「垂直方向の数学化」について述べており、フロイデンタールも【再考】の中で、明確に記述するために、微妙な差異を加えたことを述べているが、Treffers のこの区別を支持しているため、これについて述べる。

フロイデンタールは、【再考】の中で、『水平方向の数学化は、数学的な取り扱いにアクセスできる問題場面を作ることである。それに対して、垂直方向の数学化は、多かれ少なかれ、洗練された数学的な過程である。』と述べている。それらについて、様々な例をあげ説明している。

加法：加法が次のような場面に用いられたとき、それは垂直的な数学化の印である。：ＡからＢまでの距離、ＢからＣまでの距離が測られた後、Ｂ経由でＡからＣまでの距離は、もう一度測るよりはむしろ、加えることによって得られる。

乗法：５×８は長方形の図式に５と８を当てはめるによって、水平的に数学化されるだろう。垂直的な数学化の中では、例えば、一連の 8、16、24、32、40、として読むことである。

Combinatorics（組合わせ論）:

もし、ＡとＢを３つの線で結び、ＢとＣを４つの線で結んだなら、Ｂ経由でＡからＣへ行く方法は何通りあるか。水平方向の数学化は、問題の構造を識別することである。これは垂直方向の数学化で終わるために、賢く数えることで始められるだろう。違う状況に、この「道の図式」を応用することは、水平的か垂直的な数学化のどちらか、その事例によるだろう。３と４を文字のシステムに置き換えることは垂直方向の数学化である。

除法：対象の数を人の数で分けるとき、（トランプを配る―カードは机のまわりのプレーヤーに配られる）一人ずつ対象を分けるか、もしくは、等しい数の対象がなくなるまで数える。：これは分配する問題の水平方向の数学化である。垂直方向の数学化は簡潔な過程のために（結局は便利であるために）だんだん大きく分けていくことを調べる中で見ることができる。この過程は、進歩的な図式化のわかりやすい例である。

以上の例から、水平方向の数学化と垂直方向の数学化を以下のように捉えた。

水平方向の数学化：

組合わせ論の例と乗法の例からわかるように、水平方向の数学化とは問題の構造を見抜き、数学的な取り扱いにアクセスできる問題場面を創ることである。それにより生活の世界（world of life）から、記号の世界（world of symbols）へ導くことができ、数学的な洗練である垂直方向の数学化へ向かうことができる。

垂直方向の数学化：

除法の例から垂直方向の数学化とは、水平方向の数学化から続く問題の解決である。また乗法の例や組合わせ論の例から明らかなように、解決の一般化も垂直方向の数学化である。

どちらの数学化を扱うべきか。答えは両方であり、それは『教育に興味を持つ数学者が、垂直的に構成するために、狭められた数学化をすることによって、失望させられなかったことは何回あるか。同様に、数学教授を考える教育者が、水平方向に制

限された数学化をすることによってもそうである』という言葉に表れている。だが、例えば 6 歳の子どもと 15 歳の子どもが等しいレベルの数学化を扱えるかどうか、数学教育において水平方向の数学化と垂直方向の数学化の双方を均等に扱うべきか、など、数学教育におけるこれらの使用について、同章 6 節である「生徒の学ぶべき数学化」で検討したい。

残された課題：この水平方向と垂直方向の数学化は、筆者の今の認識では、今まででで述べてきた現実と数学の数学化と同様である。それが同様の意味をもつものなのか、それとも違う意味を含んでいるのかを検討しなければならない。この考察にあたり、Treffers が【*Three Dimensions:A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*, D.Reidel Publishing Company, 1978】の中で数学化について述べているため考察の手がかりとなるであろう。

３－５　数学化の教授の手段

３－５－１　ソクラテスの方法

フロイデンタールはよい教授方法としてソクラテスの方法をあげている。それは、まず教授において、教師が偽であると真の両方全ての場合を想定し、十分準備することから始まる。次に実際の教授において、生徒に十分準備されたものを「はい」か「いいえ」で言わせ、ねらい通りであるが、それがあたかも、みんなによって作り上げられたかのように見せることである。教師は話しているが、その話が終わったとき、誰もが自分自身で何が正しいかを決める。この方法は、教材が厳格な論理的システムにしたがって提示されるよりは、生徒の目前に起源を持つところをよしとしている。生徒自身の活動は、ソクラテスの方法では作り事であるけれども、その生徒は、教えるものが教授の間に出現し、それがレッスンの間に誕生したという感情を残されるべきであり、その教師は実質的に一人の産婆にすぎないのである。

この方法の反対は、『フランス人が落下傘で降りる人と呼ぶものである。【課題．P77】』これについてフロイデンタールは「反教授学的逆転」という言葉で表している。それは上でも少し述べたが、厳格な論理的システムによって受動的に教授されることである。

３－５－２　発明し直すこと（コメニウスの方法からのアプローチ）

フロイデンタールは、ソクラテスとコメニウスの間には教師（複数）がいたが、教育学について、コメニウスは、以前の誰よりも多くを書き、生産性において、それ以来の誰にも殆ど追い抜かれなかったとしてコメニウスの方法を取り上げている。それは、『ある活動を教えるための最善の方法は、それを示すことである。【課題．P85】』という方法であり、「例」、「規則」、「真似」というプロセスの順序で進行する。「例」は静的ではなく、それは見る、聞く、感ずる、味わう、においを感じることの活動である。それに続く「規則」は、教師の経験から抜き出された理論的な結果である。つまり「規則」は理論であり、教師か

ら教えられなければならないが、それは教師が「この仕方でしなさい」と告げることではなく、例に対し、上記した五感によりアプローチする活動のように、行為することにより生徒によって示されるべきであるということである。次に規則を使った例の「真似」が行われる。この３つすべては教師と生徒によって作り上げられるべきであると主張している。それを、時計がどのように作られるかという例で説明している。

時計をばらばらにすることが「例」であり、それを生徒の目の前で集めることが「規則」にあたり、他の時計と比較するのが「真似る」ことである。また、このとき教師の課題は、どのように真似るかを告げることであると述べている。

コメニウスの方法の特徴は、「例」と「真似」の間に理論を置いていることである。理論を生徒にコミュニケートできるのは教師であり、そこでの生徒は受動的である。

フロイデンタールは、このコメニウスの方法を今日どのように言うかを考えることは、有用であると述べており、それについて『ある活動を学ぶための最良の活動は、それを成し遂げることである。【課題．P85】』と言い換えている。この方法はコメニウスの方法と大きく異ならないが、強調は、教えることから学ぶことへ、教師の行為から生徒の行為へ、感覚的な効果から運動の効果へと変更されることである。この裏には、例えば「水泳を教えるためには、例と理論に大きな効用がなく、生徒はその行為をしなければならない」ということがある。つまり、数学という活動において、理論が必ずしも行為に先行する必要はなく、理論は生徒に泳ぐことを教えている人の心の中で働いていればよいということである（教えている人が、正しく泳ぐ運動ができる条件を知っているべきである）。このとき教師の課題は、成功に有利な条件をつくることであり、コメニウスの方法との一番の差異は、生徒の行為により理論が作り上げられなければならないということである。

また、以上から、フロイデンタールが考えることと行為することを同一視していることが伺える。生徒は自身の活動により、数学的知識や数学的な見方・考え方を構成していかなければならないのである。そのような教授方法がフロイデンタールの主張するものであり、用語「発明し直す方法」で表される。この

用語には根本的な制約があり（今まで述べてきたことからも明らかであるが）、それは、予期されない、驚くべき、驚かすような、目立つという底音を伴って発音される「発明」ではないということである。

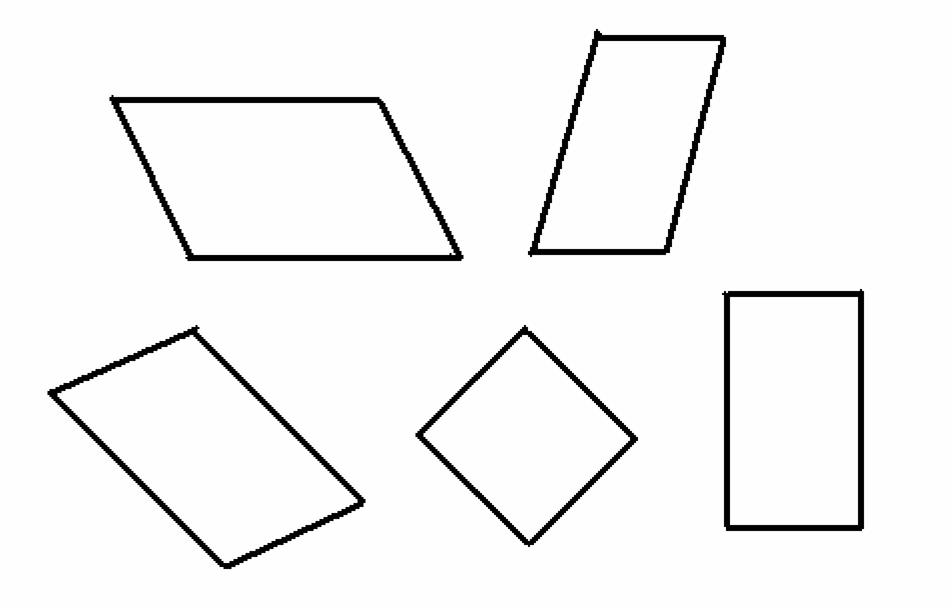
要点は、この方法をどのような教材に適用するかであるが、それを余りに狭い教材から出発することは表面的な解釈である。逆に、いっそう深く根ざしている解釈として、ファン・ヒーレの発明し直すことの解釈があげられる。このファン・ヒーレの発明し直す方法は、学習プロセスにしたがって進行するため、次に学習プロセスのレベルについて述べることとする。

３－５－３　学習プロセスのレベル

ファン・ヒーレが教授に出発したとき、それをどのようにするべきかを告げる人は誰もいなかった。そこで彼らは、教授のとき、自身を観察し、彼らのしたことを思い起こし、それを分析し、自身の行為を反省し、他の人とその教授を討議した。その結果、思考することは連続して行為することであるが、相対的なレベルがあり、いっそう高いレベルでは、いっそう低いレベルの行為は分析の対象になることを明らかにした。さらに、この特徴を、数学を学習している生徒の学習プロセスへ転移させた。

このレベルとはどのようなプロセスをふむか。（局所的な例であるが）フロイデンタールは、【課題．P95】で、数学化のプロセスの一つである概念場の数学化がどのように進行するかを、平行四辺形の例で説明しており、それが学習プロセスのレベルにもあてはまるため、それを示す。

例）生徒に様々な平行四辺形を与える。



すると生徒は、非常に多くの共通の性質：対辺の平行、対辺の相等、対角が等しいこと、対角線が中点でまじわること、対角線によって分けられる三角形の合同、隣り合う角が補角であること、などを発見するだろう。また、生徒はその原理を把握するため、いっそう複雑な場合に適用する。これらは多数の性質であり、それぞれが他と同じく大切である。その生徒は、これらの性質の間のつながりを発見する。それらがどのようにつながっているかを考えることにより、最終的に、他の性質がすべて引き出されえる一つの性質を発見する。多分、異なる生徒は異なる基本性質を選ぶ。これらの選択の事実によって、その生徒は定義の意味、その相対性、定義の同値の概念を把握したろう。生徒は、生徒に課されたいくつかの定義を持つよりは、定義する行為を学習した。

この例からわかるように、概念場の数学化は以下の学習プロセスにしたがって進行する。

最低レベル：必然性を持ち行動すること
次のレベル：共通の原理により組織すること
次のレベル：その原理を把握するため、いっそう複雑な場合に適用する。
次のレベル：言語により定式化すること
高いレベル：公理化すること

また、このレベル分けされた学習プロセスから明らかであるが、水準上昇は、いっそう高いレベルでは、いっそう低いレベルの行為を分析の対象とし、上昇していく。つまり、ある水準における活動を「意識化」し「反省」するという方法により水準の上昇が図られる。実際思考することは連続して行為することであるが、１つの水準から次の水準に移行するとき、学習の対象が全く変わってくることから、学習プロセスは不連続であると特徴付けれる。

ではこの学習プロセスのレベルは全てのプロセスを踏まなければならないか。つまり、レベルを飛び越すことは可能だろうか。実際それは可能である。例えば、『分数が何を意味するかを告げることなしに、幼い子どもを分数の算術で訓練し、あるいは、年長の子どもを、彼らが微分商と積分が何であるか知らないけれども、微分することと積分することに訓練できるように。【課題．P95】』このように、その行為の意味を何ら参照することなく、アルゴリズムを使って教授することができる。だがこのような方法で獲得された能力は、生徒にしてみると何ら必要を感じず、すぐに忘れられてしまう能力であろうし、極めて狭い応用しかないであろう。これに対し、かなり多くの量の応用パターンを教授することにより防ぐことはできるが、それでは記憶に負担がかかることはもちろんのこと、教師依存の生徒を育成することになる。これはファン・ヒーレの主張する発明し直すことの精神、つまり、数学的知識や技能を生徒の主体的（必要感を感じての）な活動により作り上げさせ、それにより応用のある知識や技能を獲得させたいということに反する。ゆえに発明し直すことは上記した学習プロセスにしたがい、レベルを飛び越すことなしに進行するのである。

残された課題：「model of」と「model for」について。
上述した水準上昇のための方法である「意識化」と「反省」に加え、水準上昇のための道具として着目され、研究されてきた「モデル」に対し、RME では「model of」と「model for」を用いている。RME はフロイデンタールの考えをもとにしていることから、発明し直す際の水準上昇において新たな視点を与えてくれると考えられるため、課題となりえるであろう。

３－６　生徒の学ぶべき数学化

生徒の学ぶべき数学化とは何か。それは上述した『学生は数学化することを学ぶべきである―私が意味するのは、始めるのに、現実の場面を数学化することである。数学的な場面を数学化することは終点であって、出発点ではない。【課題．P55】』という主張からよみとれる。また、フロイデンタールは【Didactical Phenomenology of Mathematical Structures(以下【現象学】とする)】の中で、『数学的概念、数学的構造、数学的アイデアの現象学が意味するのは、私の用語では、この noouumena（＝上述した 3 語を総称しての用語）を、それが整理し組織する手段であるとは何かの phainomenon（＝現象〔ギ〕）との関係で記述することであり、それは、どんな現象を組織し整理するためにそれが創り出されるか、それが何にまで拡張され得るか、それがどのように整理-組織の手段としてこれら現象に作用されるか、それがこれらの現象の上のどんな力を我々に与えうるかを示している。【現象学．P27】』つまり、整理し組織されることを懇願する現象から出発し、その出発点から、生徒に整理し組織するこれらの手段を取り扱うことを教授するべきである（現象に対して生徒が働きかけ、手段を見出し、それによって現象を整理していかなければならない)。という内容からも、数学化を現実の現象から始めなければならないこと、そして、この現実を数学化することから続く、数学を数学化することを学ばなければならないことがうかがえる。

だが双方を均等に扱うべきか。フロイデンタールは【数学教授】の中で『生徒は現実を数学化することを学ぶべきであり、可能ならば数学を数学化することも学ぶべきである。』と述べており、さらに【課題】の中で『初めのうちは、外部関係の費用で内部関係を買うべきではない。』とも述べている。確かに、小学生が高校生と同じだけ数学を数学化できるか、と考えると疑問に感じる。また、生徒が数学を発明し直すためには必ず現実の数学化が行われなければならない。なぜなら、そうでなければ数学的な手段によるアプローチが不可能だからである。このような意味合いで、「可能ならば」を用いたのではないかと考える。

さて問題は年齢の違いにより学習に差異が生じるかどうかで

ある。さきほど、数学を学習するすべての子どもが現実を数学化しなければならない、つまり、現実を数学的手段によるアプローチが可能な構造に組織しなければならないことを述べた。これは現実をどのように認識できるかに強く依存しており、それに続く数学を数学化することにも大いに関わっている。そこで、年齢の違いによる認識の差異について説明している、J.ピアジェの段階従属理論をとりあげ、この観点から生徒の学ぶべき数学化についての考察を進めることとする。

ピアジェによると、認知構造の斬進的変化は、人それぞれで速さが異なるが、それは不変の系列にしたがって、常に同じ順序で移行する。これを段階従属理論と呼び、具体的には以下にあげる４つである。

感覚運動期（Sensorimotor Period）	０－２歳
前操作期（Preoperational Period）	２－７歳
具体的操作期（Concrete Operations Period）	７－11 歳
形式的操作期（Formal Operations Period）	11－大人
	【新思考心理学入門、P207 より引用】

本研究は、算数・数学が授業として行われている子ども、つまり小学生以上の子どもを対象としているため、感覚運動期についての説明は省くこととする。

《前操作期》

前操作期について、子どもはそのはじめに、事物を表象する能力、シンボルによる問題解決の初歩を成し遂げる。けれども、『この段階の子どもは、静的で具体的なイメージを処理しているのであり、次の六つの問題によって限界を置かれている（Phillips,1969)。【P211】』

具体性（concreteness）―子どもは、ここ、および、いま、に存在している具体的な事物だけを取り扱うことができる。

非可逆性（irreversibility）―子どもは、事物を心的に再配列すること、あるいは、なにか別なふうに配列された事態を想像することができない。

自己中心性（egocentrism）―子どもは、だれもが、その子どもの眼をとおして世界を見ているということ、また、その子どもが経験していることを、だれもが経験しているのだということを信じている。

中心化（centering）―子どもは、一時に、事態のたった一つの次元あるいは側面にだけ注目する。

状態と変換（state VS. transformation）―子どもは状態に焦点を合わせる。すなわち、その状態を生みだした操作よりもむしろ、事物の知覚的な見え方に焦点を合わせる。

転導的推理（transductive reasoning）―子どもは、もしAがBの原因となるならば、BはAの原因となる、と推理する。

このような限界をおかれている前操作期の子どもは、どのような数学化ができるだろうか。例えば、足し算で考えると、具体性と非可逆性から、「ケーキ5ことケーキ3こ、あわせてなんこか」という問題に対し、この今ある問題を解決できたとしても、「かき2ことなし2こ、あわせてなんこか」という問題に出くわしたとき、中心化や状態と変換から、問題を心的に操作することができないため、前問題と同じ構造をもつ問題とみなすことはできないだろう。つまり、その問題という現実ごとに数学化することは可能であるが、それは問題の本質をとらえた構造に整理組織されたとはいえない。また、自己中心性から論理的に思考する必要もなく（そもそも中心化からできないが）、以上から、この前操作期の子どもに同時に2つ以上の数学的現象を扱わなければならない数学を数学化することを教授すること

はできないと考えられる。
　これが具体的操作期に入ることによりどう変化するだろうか。その認識の変化を述べ、そこからこの時期の年齢による数学化の限界を定めていく。

　《具体的操作期》
　具体的操作期について、ピアジェは、『子どもの心的構造と操作に、基本的な変化が生じることに注目した。前操作期の終わりまでには、子どもは、逆転あるいは脱中心化する能力（すなわち、同時に二つ以上の次元をいっしょに考えること）を達成するか、あるいは達成しはじめて、静的な知覚的な状態よりもむしろ、変換に焦点を合わせるようになり、自己中心性と転導的推理を失いはじめる。世界を、一組の静的なイメージとしてではなく、むしろ、心的にはたらきかけ、論理的に変化させることのできる具体的な事物として、表現（象）するようになる。可逆性こそ新たに獲得される心的操作であり、それによって子どもは、ものの見え方による支配から脱するのだ。具体的操作という名称は、具体的な事態を心的に操作する、あるいは変化させるという、また、頭のなかの事態に論理的操作をほどこすという、この新たに獲得される能力に由来している。【新思考心理学入門．P214】』

　ここでの表現（象）は以下の意味で用いている。

表現：心的状態・過程または性格・志向・意味など総じて精神的・主体的なものを、外面的・感性的形象として表すこと。また、この客観的・感性的形象そのもの、すなわち表情・身振り・動作・言語・手跡・作品など。
＊内的対象から外的対象へ。

表象：〔哲・心〕知覚に基づいて意識に現れる外的対象の像。対象が現前している場合（知覚表象）、記憶によって再生される場合（記憶表象）、想像による場合（想像表象）がある。感覚的・具体的な点で概念や理念と区別される。
＊外的対象から内的対象へ。

また、この時期に達することにより、ピアジェが、保存（conservation）とよぶ心的操作を達成することができる。これは、逆転あるいは脱中心化する能力のあらわれであり、それには、数の保存、物質の保存、量の保存、が含まれている（図 10）。

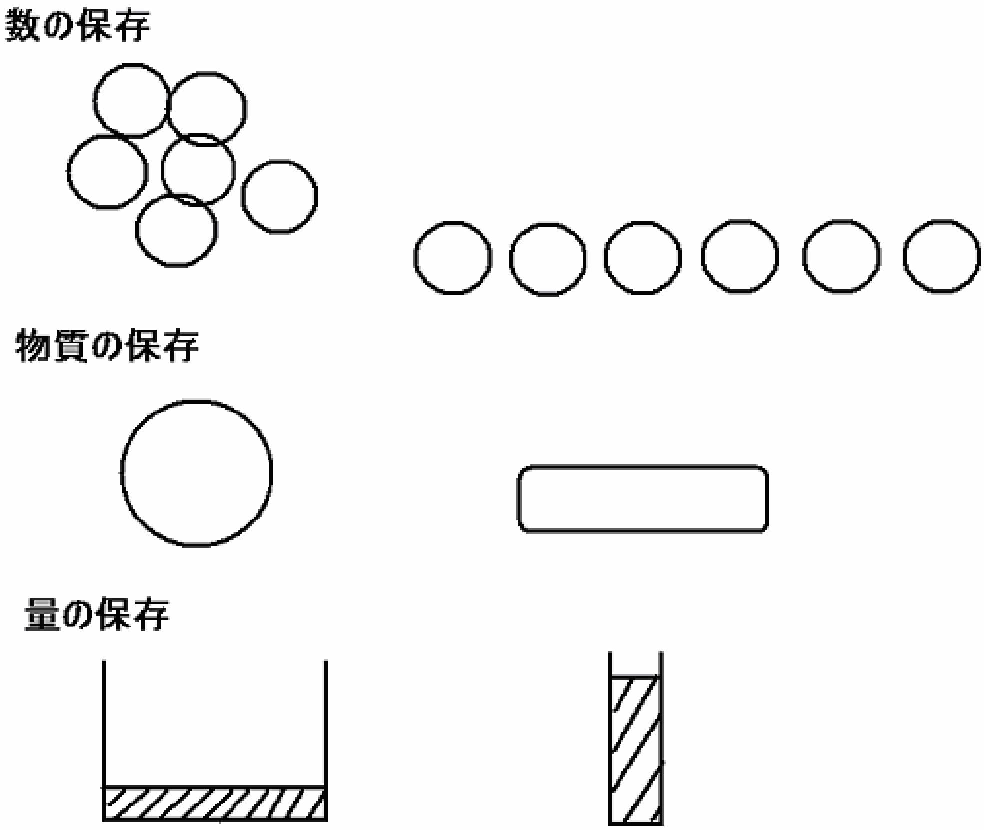


図10

たとえば、ひとにぎりの小銭を、前操作期の子どもに見せると、その子どもの量の判断は、知覚的なみえに基づき、小銭を一緒に集めたときよりも、ばらまいたときのほうが多くの小銭がある、というだろう。その前操作期の子どもは、範囲という次元に中心化していて、小銭を集めたり、ばらまいたりする操作を心的に逆転できないのである。だが、具体的操作期の子どもは、事態を心的に逆転させ、頭のなかで小銭を再配列できるのである。

このように、具体的操作期の子どもは、前操作期の子どもと

比べると以上の点で進歩しているが、依然欠点はもっている。それは、具体性が失われないということである。つまり、『ものの見え方という知覚イメージからは自由であるが、依然として、ここ、および、いま、において思考され、操作される具体的な事物に結びつけられているのである。』これは、抽象的な事態にそれら操作を応用できないことを表す。

以上から、２つ以上の問題を提示することにより、また、２つ以上の要素をもつ問題（さまざまな形など）を提示することにより、そのなかの変換、あるいは脱中心化されたさまざまな側面に着目し、それら２つ以上のものから成る構造に現実を数学化することは可能である。また、１つの構造に整理組織した構造を子どもの必要により、再構造化することも可能である。

例えば、掛け算の拡張という数学的洗練を目指すのであれば、初めに累加の構造で整理組織した現実を、割り算の概念も含む構造にするために再構造化しなければならない。だが、この時期では具体性という限界があるため、両者が具体的に現れなければならず、一般的に掛け算と割り算を統合することには限界がある。

これは、上述した前操作期に行われる現実を数学化することよりも高いレベルに位置づけられ、形の上では、この時期より上の年齢の人間が行う現実を数学化することと同じである。だが、同じ構造に組織したとしても、その構造に付随する意味において異なるため、この時期より上の年齢の人間が行う、現実を数学化することとまったく同じではないことを注意しておく。この意味においてのレベルがどのように分類されるかは明かさなければならない課題として残る。

続いて、この数学化された現実から続く数学を数学化することが始まるわけであるが、抽象的な事態を考察することはできないため、すべての抽象を含む一般的知識を習得することや高いレベルの一般化や拡張を行うことはできない。

だが例えば、足し算や引き算で 10 を基準として計算することやそれらの筆算など、よりてぎわのよい解決を考えだしたり、その延長にある筆算というアルゴリズムを考えだしたりするような数学化は行うことができると考えられる。

《形式的操作期》

続いて、ピアジェ理論の最後に位置づけられる形式的操作期にはいる。この時期にはいることにより、具体性は失われ、ある一つの事態が生じると、それに代わるべき、すべての可能な事態を発見することができる。

数学化についてであるが、この時期はピアジェ理論の最後であるため、フロイデンタールが定める全ての数学化を行うことができると考えられる。

以上で、ピアジェの定めた年齢の差異において教授可能な数学化をみてきたが、この年齢区分は適切であるか。

ピアジェの研究方法は臨床的であった。つまり、観察に基づいて理論を展開するというもので、この方法は、実験的統制（すべての実験を同じ条件で行うこと）を欠いている。例えば、実験者の表情やしぐさ、幼児と大人とでは同じ方法で用いられていないかもしれない言語概念に強く依存している。また、理論はあまりに一般的で漠然としているためテストすることができない。この 2 点から、ピアジェの方法は批判を受けていた。このことから、ピアジェ理論の年齢区分は個人差にかなり依存し、必ずしも上記した年齢区分となるわけではない。

だが、ピアジェによると、4 つの段階は必ずその順序で進行するため、いくらか年齢の違いにより、教授することが可能な数学化を区分することはできるといえよう。

第３章まとめ

数学化には大きく分けて「現実を数学化すること」と「数学を数学化すること」があり、数学化のプロセスとは、現実を数学化することに始まり、数学を数学化することへ続く。ではそれぞれの数学化とはどのようなものか。

「現実を数学化すること」とは、生活の世界から記号の世界へ導くことであり、数学的な方法にアクセスでき、数学的に洗練できる構造に整理・組織することである。

「数学を数学化すること」とは、現実の数学化に続く数学を数学的手段により、一般化、拡張、形式化、公理化、演繹的な体系化という洗練に向け、整理-組織する活動である。

また、この「数学化する」を「数学する」と比較することにより、数学化とは、数、公式、計算方法の貯蔵や暗記ではなく、あくまでもフロイデンタールの数学観で明らかにしたような活動であることを強調した。

では、この「数学化」をどのように教授すべきか。フロイデンタールは発明し直すように学ぶべきであると強調している。それは、生徒が新たな数学的知識を「発明」するわけではなく、過去において作り上げられてきた数学を、生徒自身によりもう一度発明し直すということである。実際に、この発明し直すことは、どのように水準上昇していくか。それは、いっそう高いレベルでは、いっそう低いレベルの行為を分析の対象とし、上昇していく。つまり、ある水準における活動を「意識化」し「反省」するという方法により水準の上昇が図られるのである。

最後に、生徒はどこまでの数学化を扱うべきかについて、ピアジェの段階従属理論を取り上げ考察したが、年齢による発達段階によって、教授可能な数学化をいくらか分類することはできそうだ、という見通しを得たにすぎず、この節で述べたかったことは課題として残っているしだいである。

第4章 ハンス・フロイデンタールの数学化の教育的意義

本章では、課題Ⅳであるフロイデンタールの数学化の教育的意義と課題Ｖである今日の数学の学習指導における数学化の意義を明らかにする。４－１では、フロイデンタールの生きた時代における一般的な数学教育では、数学をどう用い、何を目指すべきであるかを明らかにするため、まず、その効用と目的について述べ、その中で数学化を考える意義について述べる。４－２では、これまでに述べたことから数学化を今日の目標に照らし合わせ、創造的な学習指導の面から数学化をどういかすかについて考察する。

４－１　数学化の教育的意義

４－１－１　数学教育の効用と目的

数学教育の大きな問題は、効用と目的の間のずれである。なぜなら、効用が目的に近いだけでなく、目的がどれだけ効用から離れているか、どこで直接の効用が終わり、間接の目的が始まるかをつげることができないからである。

1900 年の初めの頃は、計算者が生計を立てることができたので、最も初等的な算術が一つの目的と成りえた。だが、算術において誰もコンピュータに勝つことができない現代においてそれはナンセンスである。

では、（フロイデンタールのいう）現代においてどのような目的を定めるのがよいか。フロイデンタールがいうには、『数学教育の目的がなんであるかを建設的に語るどんな仕方も、存在しない。我々全てが理解するのは、数学が数多くの応用を認めること、かつてよりいっそう多くの生徒が数学を応用しなければならないことである。【課題．P53】』よって、応用する、または応用可能な数学を教えたいと願い、「応用」を数学教育の目的とすることに意義がありえるが、生徒が最終的にどんな種類の数学を応用するかはわからない。だが、『数学は非常に柔軟であるので、我々は、個別的にも集団的にも、その応用と応用可能性に関して、そのいっそう鋭い輪郭を、一かたまりの一般性にまで与えることができない。【課題．P53】』つまり、この数学はこれに応用されるというように 1 対 1 対応ではなく、1 つの数学に多くの応用・応用可能性があるということであり、生徒が最終的にどんな種類の数学を応用するかはわからなくてもよいということを意味する。

しかし、数学に数多くの応用・応用可能性があるとはいえ、それはカリキュラムの自由を意味するということではない。なぜなら、応用・応用可能性は、教材がどのように組織されるかに依存するからである。これについて、フロイデンタールは、いっそう自然でいっそう大切であるつながりとして、内部関係のつながりよりも数学外部のつながり、つまり、生徒の生き抜かれた現実（lived-through reality）とのつながりを強調している。ここでも、現実から続く数学化を強調しているわけである。このことから、教えられた教材は深く固定されることができ、

それが活動的であり続けるのである。かといって、生徒の生き抜かれた現実に関係していればよいというわけではなく、応用という目的のためにはもちろん内部関係のつながりも重要である。以上をふまえて次項でさらに説明をくわえよう。

４－１－２　応用・応用可能性とは

上記の数学教育の目的としての「応用」とはどうゆうことか。それは、一般的な公式の中のパラメータに数値を代入することを意味する用語ではない。そうではなく、もし数学が応用されるべきなら、数学を応用することが教えられ、学ばれるべきである。数学は、それぞれの度に新しく、それを創造することによって応用され、その過程に、更なる自主的な応用を意図している。これは、フロイデンタールが数学の演繹体系に従ってなされる学習を「反教授学的逆転」と呼んで問題視していることからも明らかであるが、数学を既成の所産として学ぶことによっては決して練習することができず、まさに生徒自身の活動である数学化が行われなければならないのである。また、アルゴリズムをドリルすることは不可欠かもしれないが、アルゴリズムをドリルするために問題を発明するような、いわいる応用数学について述べているわけでもないことは明らかであろう。

上記したように、応用することが教えられ、学ばれるためには、数学をそれぞれの度に新しく、それを創造しなければならない。

以上の内容をふまえた応用という目的に対し、組織された例として【数学を鑑賞する】の中から負の数の応用について述べる。

例えば、負の数はてこに応用される。

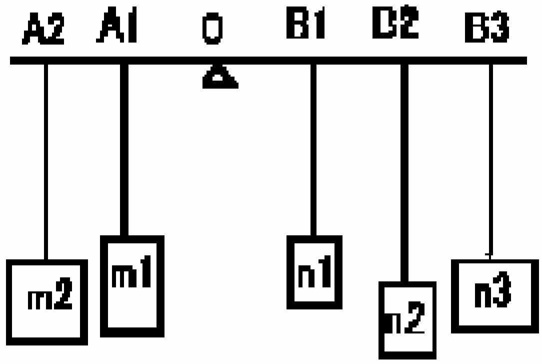


図１１

てこという現実を数学的手段にアクセス可能な構造に整理組織することから始めるのである。
点 O から A1 までの距離を a とすると、点 A1 における力（重さ）m と腕の長さ a との積 ma を能率という。
この天秤を、点 O からみて

左の能率の総和＝右の能率の総和

と（平衡について）教えたのでは負の数は応用されないし、左右２つの平衡しか考えられない構造である。つまり、数学的な洗練にアクセス可能な構造ではないのである。

　そこで、応用・応用可能性をもつ構造に整理組織しなければならず、点 O から右は時計まわりに回転しようとし、左は反時計まわりに回転しようとすることから能率に符号を与える。これはまた、点 O より右の距離は正、左の距離は負とすることと同様である。

　こうすると、平衡は

　「すべての能率の和は 0 でなければならない。」

　とすることができる。このとき、重さのつけられた天秤の重心を決定する問題があったとする。X を（任意に定めた原点から）重心までの距離、M を能率の総和、m を重さの総和とすると、X=M / m が成り立つ。さらに、重さにも符号を与えることによ

り、重心が決定できない場合を定義することができる。（m＝0のとき）

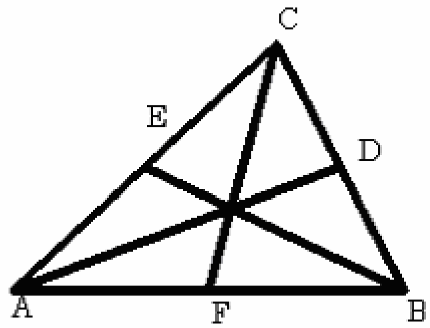


図12

さらにこれは平面へと応用される。
例えば、1 kg の三つの重さが一つの三角形 ABC の頂点へ置かれたとする。上の内容により、A と B における 1 kg の重さを AB の中点 F における 2kg の重さで置き換えることができ、同様に C と F における重さの重心をとることにより、

CS：SF = 2：1

を得ることができ、幾何学においての重心と一致する。この方法はどんな n 角形においても有効である。三角形のときと同じように、二つの重さをその和で置換え、それをその重心におく。これをすべての重さがただ一点における重心になるまで続けるとその図形の重心を得ることができる。

また、今までは一点に関して定義された能率をもとに考えていたが、能率を軸とよばれる一つの直線に関して定義することにより、どのような図形も二つの軸からの距離により重心を決定することができる（図 13)。より手際のよい解決ができる構造に整理組織されたといえよう。

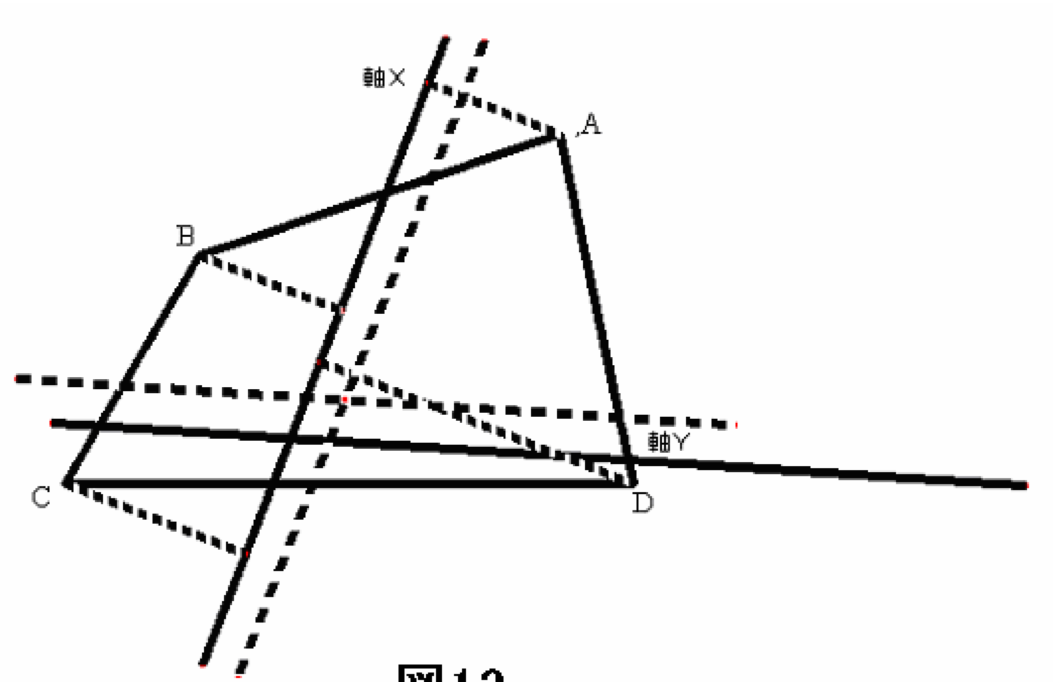


図13

以上の例で、応用の面から組織された教材と数学のつながりをみてきた。そこでは、実際の教授における生徒の解決活動や教師のてだてを示していないが、フロイデンタールの数学化に基づいてこの流れが進行するため、生徒の必要から生じた新たな問題意識によってこれまでの構造を変化させ、新たな活動を創造していく流れがみてとれる。これにより生徒は応用を学ぶことができ、したがって数学教育の目標を達成できるのである。

４－２　今日の数学の学習指導における数学化の意義

４－２－１　目標に対する観点と今日の算数・数学教育における目標

数学の学習指導における目標とはなんであろうか。もちろんどの教科も教育課程全般のうちの一環として行われる活動であるから、小学校なり、中学校なりの教育として、共通の基盤の上に立って行われるものであることは確かだが、それぞれの教科で重点をおいて行われるべき固有の役割も当然あるはずである。本節は後者の目標における数学化の意義を検討するものである。

中島健三は、教科の目標を考えるにあたって、４つの観点を挙げている。その観点は以下の通りである。

①人間が社会の一員として生活するのに必要な知識や能力を育成すること。〔実用的な目的〕

これは、「実用的」ということを単に狭く考えるかどうかで話は変わってくる。狭く考えるならば、数学的知識の修得そのものが、社会生活上重要であり、直接的な応用を目的とすることである。

だが、数学的知識が応用される社会はいまや広大であり、『それをカバーするだけの知識を学校段階で修得させることは、精神的にも時間的にも限界があることは明白である。また、他方で、電卓、コンピュータなどの機器の発達に象徴されるように、従前は人間の力に頼っていた部分がしだいに機械におきかえられ、いわば「数学」はそれほど知らなくても、それを使うことはできる方向へ』発展してきている。しかし、コンピュータといえども、ソフトを含めて、それを設計し活用するのは人間であることから、『コンピュータに限らず、こうした新しく発達した機器やシステムの有効な活用のために必要なことがら、また、新しい事態に対処するための創造的な判断や問題解決』もこの「実用的」に含まれる。

これらを目標とすることが実用的な目的である。

②人間がこれまでに創り上げてきた学問や文化を、（生活上の必要という立場だけでなく）それ自体、人間にとって価値あるものとして、理解し鑑賞することができるようにすること。〔文化教養的な目的〕

『これは①であげた実用という立場とちがって、数学を、人間がある価値観のもとに長い歴史を経て築きあげてきたものとして、理解し、そのよさを鑑賞できるようにしようというものである。』これは、結果として完成された知識やその体系を知らせることをねらった指導だけではなく、むしろ『人間が本質的にどんな点に価値を認め、どのような考えや手法によってその実現を図ってきたかといった点が、よく理解されるような指導の方法を工夫することがぜひ必要である。この点がうまくいってはじめて、人間が創った文化としての数学のもつよさが理解できよう。』つまり、指導において当面の教材の必要感を感じさせること、数学的な考え方の意義を引き出すことをねらいとしている。

これが文化教養的な目的である。

③人間が本来そなえているべき、また、そなえることが望まれる諸能力を、可能なかぎり引き出しそだてること。〔陶冶的な目的〕

『この観点は、さきの①、②の観点の達成とも密接なかかわりをもっているが、学校における算数・数学の教育が、いわば、現在また将来の生活の必要とか文化遺産としての数学的な知識の習得というような立場ではなく、人間本来の能力の引き出しと育成という目的からも、じゅうぶん考えるべきだということである。』これは、必要に即応して数理的に事象をとらえたり、適切に推論し判断したり、また、鑑賞すること、さらにそれらにもとづいて数理的に新しい創造を行ったりすること、これらを支える一般的、精神的な能力の育成が重要であることを主張している。

これが陶冶的な目的である。

また、中島健三は、『①や②に関して必要と考えられる数学的な知識や技能を授けるための教育を「実質陶冶」といい、これに対して、論理的に厳密に思考するというような、一般的な思考力を育成することを目指したものを「精神的能力陶冶」または「形式陶冶」』という用語で表している。

以上で述べた①、②、③から明らかであるが、①や②については、前者に関することがらだけでなく、後者に相当することがらも含んでおり、③については、後者にかかわることがらを端的にねらいとしているものである。

④創造的な活動を実践し、体験させ、その過程の中に、文化の創造や問題の解決の美しさ楽しさを認め、味わうことができるようにすること。〔創造的実践の体得と鑑賞〕―人間性を豊かにするための価値観の多様化―

これは③の方法論としても位置づけられるが、創造的な活動を体験しそれを楽しむこと自体を、教育の目的としてみようということでもある。そのような活動を通して、『数学の創造を促した価値観、たとえば、明確、統合などに、創造的な学習の体験を通して目を向けさせ、その意味で価値観の多様化を図ることは、算数・数学において目指す人間性の育成という点で極めて重要な』目的となりえるだろう。

以上の観点から、現行の学習指導要領における算数・数学科の目的を検討し、その目的に対し、フロイデンタールの数学化の持つ意義について考察する。

＜小学校学習指導要領（平成 10 年 12 月告示、 15 年 12 月一部改正）＞
目標
数量や図形についての算数的活動を通して，基礎的な知識と技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに，活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活に生かそうとする態度を育てる。

小学校で学習する内容は（低学年では）直接応用できる数学が多く、（中学校、高等学校に比べ）実用的な目的に重きが置かれていることがうかがえる。だが、文化教養的な目的や陶冶的な目的がないわけではなく、基礎的な概念・原理をもとに、例えば、２けたの計算を学習したら、３けた、４けたの場合はどうかと、自分で創造的に工夫するような数学的な考え方の育成が行われなければならない。そのためには、日々の学習の中で生徒が数学的な考え方により数学を創造する活動が行われなければならない。また、学習指導要領内の『進んで生活に生かそうとする態度』の育成のためには、現実を数学的に処理するよさについて実感しなければならず、現実を数学化し、上記した数学的な考え方を生徒が行う活動の中でこそ実現すると考える。これには結局上記の④でもある、活動を楽しむことも含まれる。

＜中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月告示、 15 年 12 月一部改正）＞
目標
数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。

ほぼ、小学校での目的と同じである。つまり、数学的な見方・考え方の育成を目的とすることである。重複する内容はさけるが、異なる点は、中学校で学習する内容において、狭い意味で

の実用的な目的は、小学校ほどないということと、『事象を数理的に考察する能力を高める』をいう表現から、現実を数理的な処理にアクセスできる構造に組織することを伴い、小学校よりも高いレベルでの数理的考察（一般化、拡張、体系化など）を目的とする、つまり、小学校よりも④の活動を伴い、陶冶的な目的にウェイトを置いているのではないかと考えられる。

＜高等学校学習指導要領（平成 11 年 3 月告示、14 年 5 月、15 年 4 月、15 年 12 月一部改正）＞
目標
数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。

（数学基礎）
数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。

中学校の目的とほぼ同じであり、中学校からの学習の継続と更なる教材に対する多様な観点が要請されることを目的としている。

４－２－２　創造的な学習指導における数学化の意義

以上、小学校、中学校、高等学校の学習指導要領からその目的について述べてきたが、共通していえることは、どれも「数学的な考え方」の育成を目的としているということである。

では、この数学的な考え方の育成に対してフロイデンタールの数学化はどのように働くか。ここで数学化についてもう一度述べておこう。それは、「現実」と「数学」を対象とし、「現実を数学化」するとは数学的手段にアクセスでき、数学的洗練にアクセスできる構造に現実を整理-組織する活動であり、その現

実は生徒の生き抜かれた現実（＝lived-through reality）に関係していなければならない。「数学を数学化」するとは、現実の数学化に続く数学を「数学的手段」によって整理-組織する活動であり、応用・応用可能性のある数学に組織されなければならない。いづれにしてもその根底には、フロイデンタールの数学観である「人間の活動としての数学」があり、生徒の主体的な活動である「発明し直すこと」によって学ばなければならないのである。

数学的な考え方つまり、算数・数学にふさわしい創造的な活動ができるようにするということはどのように育成されえるか。それは先に述べたように、教師から一方的に知識を与えられ、それを機械的に学習することでは達成されない。これについて R.R.スケンプは、『この方法で学習したことは、次の学習に何の助けにもならない。数学的な学習内容が増えてくるにつれて記憶すべき量は、記憶に大変負担になる。また、これらの規則はある限られた範囲の問題に対してしか働かない。数学的な考えが欠落しているから、学習者はこれらの規則を、同じ数学的考えに基づく、関連した問題に適用できない。そこで、子どもは数学的に成長することに失敗し、自信と自尊心を失っていく。』と述べている。これはフロイデンタールが反教授的逆転とよび問題視したことで意味することと本質的に差異はない。このような方法ではなく、日々の学習の中で生徒が数学的な考え方により数学を創造する活動が繰り返し行われなければならない。すなわち、このようなねらいに立った指導は、どの内容かで、または、どの学年かで、1 回やればよいというわけではなく、つねに、そのような立場に立って学習指導を行うことによって、はじめてその効果が期待できるような性格のものである。

この「創造的な学習指導」の前に算数・数学の指導でいう「創造的」とはどのようなことかを述べておく。それは、確かに、何かしら新しいものをつくりだすことであるが、新しいものといっても、実際、指導内容としてのカリキュラム上で取り上げられていることは、学問的にはすでによく知られた数学的な内容にすぎないため、世間の人がまったく知らない数学的な内容を新たに創り出すことを期待しているのではない。

算数や数学で、子どもにとって新しい内容を指導しようとする際に、教師が既成のものを一方的に与えるのではなく、子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出すように、教師が適切な発問や助言を通して仕向け、結果において、どの子どもも、いかにも自分で考え出したかのような感激をもつことができるようにする。これが「創造的」ということである。

創造的な学習指導において、まず実際の事象を目的に応じて数学的に捉えることから始めなければならない。これは上で述べた、「子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出す」ということにも関連するが、目的の一つである数学的な見方・考え方を進んで活用しようとする（もちろん現実に対しても）態度を育てることに根ざしている。これは、抽象的な数学的知識を与えられるまま習得することで達成されるのではなく、日常の事象を自分で理想化したり条件付けをするなどの主体的な活動によって、そこから続く問題の解決によって達成されうるものである。これは、フロイデンタールが反教授学的逆転と呼んで問題視している観点と同じであり、フロイデンタールの主張する「現実の数学化」が行われなければならない。

次いで、現実の数学化から続く問題の解決に移るわけであるが、中島健三は、統合的発展的に考察することが数学的な考え方の育成に対して有効に働く一つの手段であると主張している。ここでの統合的発展的考察は、統合的と発展的が並列して並ぶのではなく、統合という観点による発展的な考察を表すことを注意しておく。この統合には以下の 3 点が挙げられる。

① 集合による統合
② 拡張による統合
③ 補完による統合

①集合による統合

これは、目的に合ったものについて共通の観点をとり出してそれでまとめ、その集まりを一つの思考対象と見なすということである。例えば、二等辺三角形という概念を学習させる際、図 14 から共通の観点をとり出し、構成する。これはまさに、空間的な対象 gestalt を図形として把握することに他ならない。

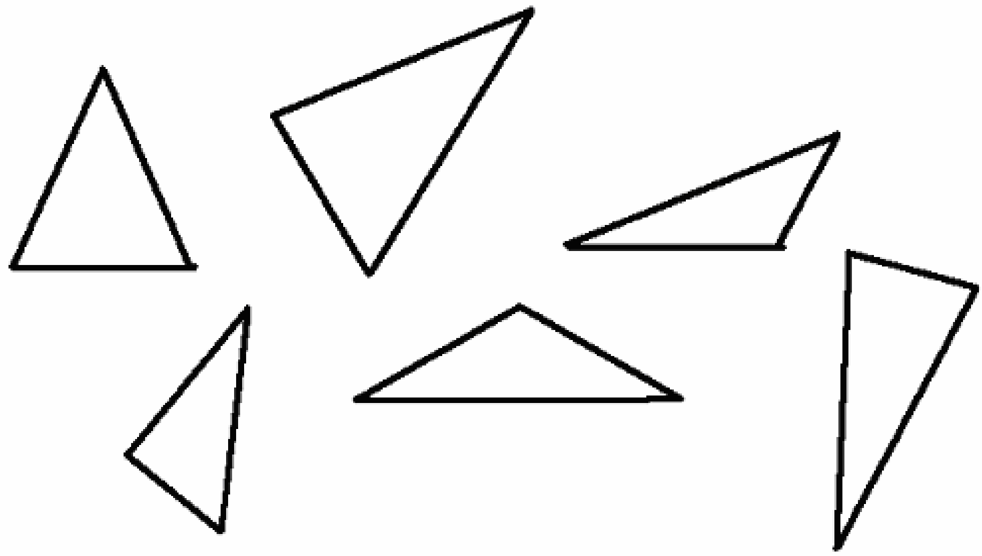


図14

また、この活動は、操作を通して子どもが主体的に抽象する活動であり、観点をはっきりさせることで、その概念を数学にふさわしい論理的な考察にたえうるようにしている。つまり、数学的な洗練にアクセス可能な構造に整理・組織しているのである。これは創造的な活動であり、フロイデンタールの考えから歩をはずさないといえよう。

②拡張による統合

これは、新しい学習内容に直面したとき今までの認識枠組みでは対応できず、そのため、今までの認識枠組みの構造をより広い構造に変化させ、新しい学習内容も一貫した構造で捉えようとすることである。（図 15）

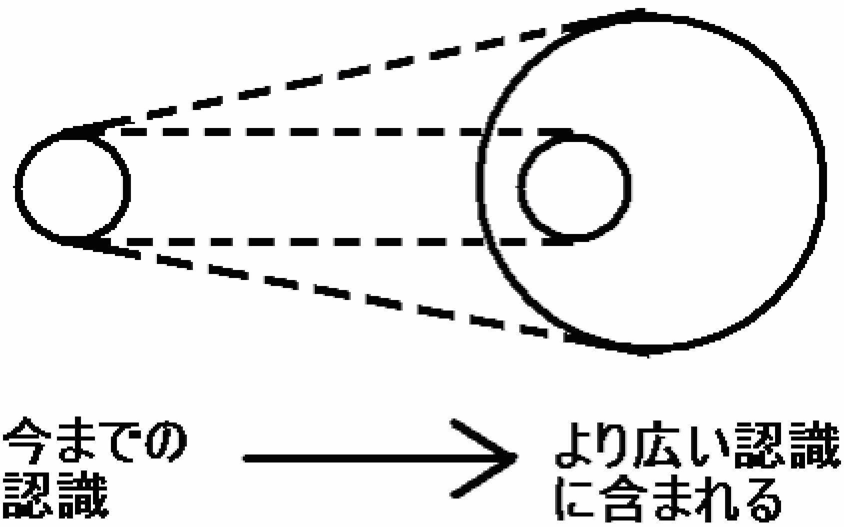


図15

これについて、乗法の意味の拡張をとりあげ、さらに詳しく説明を加える。

例）整数×整数を累加の考えで構造化している生徒を考える。つまり

3×2　→　3+3
3×3　→　3+3+3　　と捉えているということである。

この構造はそれ自身ですばらしい構造であるが、新しい問題「整数×分数、整数×少数」に出会ったとき、今までの考え方では説明できない。そこで今までの認識の修正が行われる。つまり、以前は組織する手段であった構造が、今回は分析の対象となり、それにより新たな数学的知識を獲得しようとしているのである。これはフロイデンタールが教授の際に主張する水準上昇の方法と同じである。

さて、どのような構造に修正するか。それには、A×ｐ＝Bという乗法を、「A を1としたときｐに相当する大きさで表すこと」すなわち「割合の考え方（ｐに比例する)」が挙げられる。それを関数尺として表すことにより、乗数ｐが少数、分数の場合は、下側の目盛りで、整数点以外のところをよめばよい（図 16)。

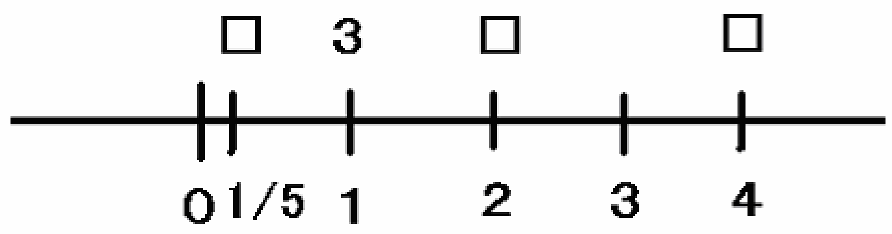


図16

これにより、数学的知識の広がりや形式的な方法である計算の仕方をまさに「発明し直すこと」によって学習する。また、フロイデンタールは内部関係よりも外部関係を重視している。かといって、内部関係をないがしろにしてよいというわけではない。この点で統合はどちらの関係も重視でき（外部関係のある数学に統合することにより、その統合された数学も外部関係をもつことになる)、その中にある数学的な考え方も応用・応用可能性のある考え方である。以上から、「拡張による統合」は拡張という数学的手段により数学を数学化することであると捉えることができる。

③補完による統合

これは、『すでに知っている概念や形式だけでは、適用できない場合が起こるとき、補うものを加えて、「完全になる」ようにまとめる場合である。【p129】』（図 17）

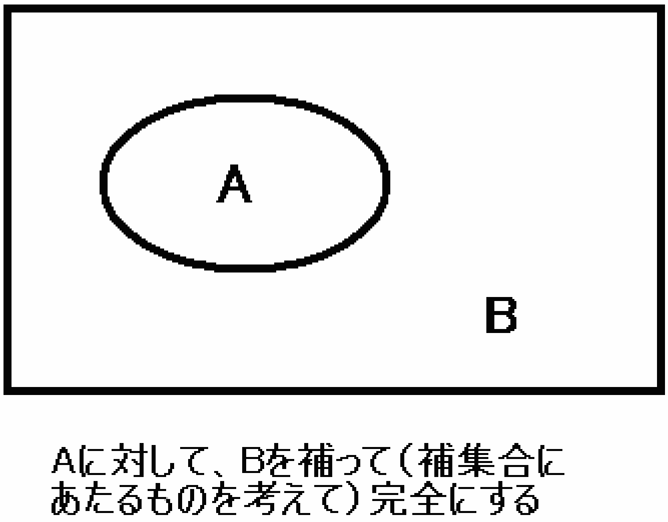


図17

例えば、加法、乗法に対して、減法、除法を考えだすようなときがこれにあたる。具体的に、除法に関して述べよう。

問題）24 本のえんぴつを一人に 6 本ずつくばる。何人にくばれるか。

この問題に対し、かけ算はすでに学習している計算であるため、それを用いて、□人に配れるとすると、次の式で表される。

6 ×□＝24

だがこれは、これまでのたし算やかけ算のように与えられた数値だけで端的に答えを表せる算法ではない。

□＝6+8　（えんぴつを 6 本もっていたが、さらに 8 本もらった。全部で何本か。）

□＝6×4　（えんぴつを 6 本ずつもっている人が 4 人いる。みんなで何本か。）

そこでこの除法も与えられた 24 と 6 で端的に答えを表せる算法を考え出し「同じ大きさのものがいくつかあるとか、同じ大きさのものに分けるとかいう場合」の表現と処理が、完全にできる（そのときだけが例外にならない）ようにしようというのがこの補完による統合の考えである。
このことも大事であるが、統合という考え方からは、除法を乗法の一部ととらえる（逆数をかけたものとしてとらえる）考え方ができることが重要である。これは、先の乗法の拡張で述べた、割合の構造がこの除法にも適用できることにより拡張される。（図 18）統合の考えと数学化の関連は先に述べたとおりである。

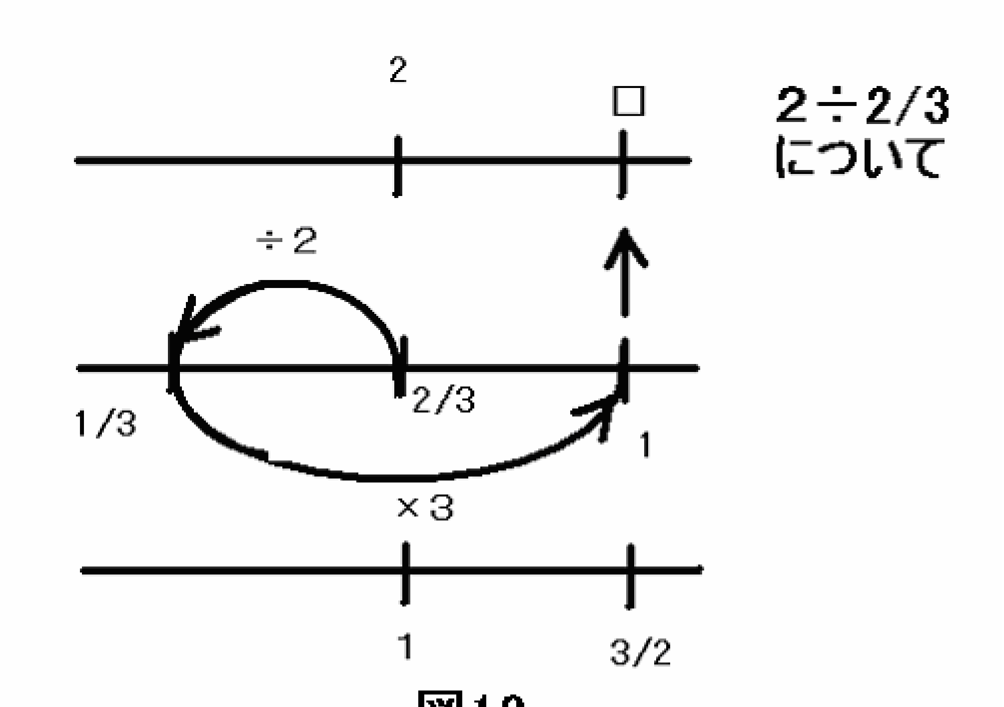


図18

以上から、今日の数学教育の目標である「数学的な考え方」の育成、つまり、創造的な授業の実践には、フロイデンタールの述べる数学化が大いに関わっており、この点から、今日の数学の学習指導において数学化を用いる意義がある。

残された課題：本研究においては、数学的な見方・考え方の育成に対し、統合という観点で考察を進めてきた。だが、中島健三が『有効に働く一つの手段である』と述べているように、数学的な見方・考え方の育成に対する手段は他にもある。実際の教授を目的として考えるのであれば、この「他の手段」に着目した考え方も必要となってくるのではないか。よって、このことが課題として考えられる。

第４章まとめ

フロイデンタールがいうところの数学教育の目的とはなんであるか。それは応用である。数学は非常に柔軟であり、１つの数学に多くの応用・応用可能性がある。それは、生徒が最終的にどんな種類の数学を応用するかはわからなくてもよいことを意味するが、かといってそれはカリキュラムの自由を意味するということではない。なぜなら、応用・応用可能性は、教材がどのように組織されるかに依存するからである。

もし数学が応用されるべきなら、数学を応用することが教えられ、学ばれるべきである。数学は、それぞれの度に新しく、それを創造することによって応用され、その過程に、更なる自主的な応用を意図している。まさに生徒自身の活動である数学化が行われなければならないのである。これにより、生徒は自身の必要感から活動し、数学化という方法をとることから生徒の生き抜かれた現実に関係づけることができる。よって、教えられた教材は深く固定され、それが活動的であり続ける。以上から数学化には教育的意義があるといえよう。

続いて、今日の数学の学習指導における数学化の意義について述べよう。小学校、中学校、高等学校の学習指導要領を、実用的な目的、文化教養的な目的、陶冶的な目的、創造的実践の体得と鑑賞という観点から、それらの目的とすることを考察した。その結果、今日の数学の学習指導の目標として全てに共通することは、数学的知識や技能を習得することはもちろんのこと、数学的な見方・考え方の育成、つまり、算数・数学にふさわしい創造的な活動ができるようにすることに重きをおいているということである。

では、このような能力を育成するためにはどうすればよいか。それには、日々の学習の中で生徒が数学的な考え方により数学を創造する活動が繰り返し行われなければならない。そのためにはまず、実際の事象を目的に応じて数学的に捉えることから始めなければならない。これは４－２－２で述べた、「子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出す」ということにも関連するが、目的の一つである数学的な見方・考え方を進んで活用しようとする態度を育てることに根ざ

している。これは、抽象的な数学的知識を与えられるまま習得することで達成されるのではなく、日常の事象を自分で理想化したり条件付けをするなどの主体的な活動によって、そこから続く問題の解決によって達成されうるものである。これは、フロイデンタールが数学の演繹体系に従ってなされる学習を「反教授学的逆転」と呼んで問題視している観点と同じであり、フロイデンタールの主張する「現実の数学化」が行われなければならない。

次いで、現実の数学化から続く問題の解決に移るわけであるが、中島健三は、統合的発展的に考察することが数学的な考え方の育成に対して有効に働く一つの手段であると主張している。その統合には、集合による統合、拡張による統合、補完による統合がり、このそれぞれについて数学化とからめて述べよう。

集合による統合について、これは、目的に合ったものについて共通の観点をとり出してそれでまとめ、その集まりを一つの思考対象と見なすということである。例えば、二等辺三角形という概念を学習させる際、４－２－２の図 14 から共通の観点をとり出し、構成する。これはまさに、空間的な対象 gestalt を図形として把握することに他ならない。この活動は幾何に限られたことではなく、操作を通して子どもが主体的に抽象する活動であり、観点をはっきりさせることで、その概念を数学にふさわしい論理的な考察にたえうるようにしている。つまり、数学的な洗練にアクセス可能な構造に整理・組織しているため、フロイデンタールの考えから歩をはずさないといえよう。

拡張による統合について、これは、今までの構造では解くことができない問題に出会ったとき、今までの構造をその問題にも耐えうる構造に整理組織し、その問題と既習事項も含めて一つの構造に統合するということである。これについては、３章でも述べており、まさに数学を数学化する活動であるといえよう。

補完による統合について、これは、すでに知っている概念や形式だけでは、適用できない場合が起こるとき、補うものを加えて、「完全になる」ようにまとめる場合である。これについては、直接的に数学化と関わりをもつわけではないが、その延

長に拡張を根ざした考え方であるため、数学化と間接的な関連をもつといえよう。

以上から、今日の数学教育の目標である「数学的な考え方」の育成、つまり、創造的な授業の実践には、フロイデンタールの述べる数学化が大いに関わっており、この点から、今日の数学の学習指導において数学化を用いる意義があるといえる。

第５章　研究のまとめ

本章では、５－１で本研究の目的を達成するために定めた課題についての各章での考察とそれによる答えについて述べる。５－２では、本研究で今後に残された課題について述べる。

５－１　研究のまとめ

本研究の目的は、ハンス・フロイデンタールの数学化とは何か、その教育的意義とは何かを明らかにすることである。

目的を達成するための方法として以下の５つの課題を設定した。

課題１　ハンス・フロイデンタールとはどのような人物か
課題２　ハンス・フロイデンタールの考える「数学をする」と「数学化する」の差異とは
課題３　生徒の学ぶべき数学化とは
課題４　ハンス・フロイデンタールの考える数学化の教育的意義とは
課題５　今日の数学の学習指導における数学化の意義とは

このような課題に対する答えは次のようになる。

課題１「ハンス・フロイデンタールとはどのような人物か」ということの解決を２章で行った。

２章では、数学化を考える際、ハンス・フロイデンタールがどういう立場で語っているかを明らかにするため、２－１において、課題Ｉについて述べた。２－２では、課題Ｉにも関係するが、数学化を考える際、フロイデンタールの数学観を明らかにしておくことは有効に働くと考えられ、そのためこれについて述べ、２章全体を通して課題Ｉの解決をはかった。具体的には以下の通りである。

フロイデンタールははじめ数学者であったが、長年数学教育に関心をもっており、数学教授の際、教師から一方的に数学的知識を教えられることを問題視し、望ましい方法として、数学を「人間の活動としての数学」とみる考え方、つまり、生徒自身が数学的知識や数学的な考え方を発明し直さなければならないこと、現実の問題から出発し、生徒自身により数学化するという活動を行わなければならないとし、数学化と発明し直すことを提唱した人物である。また、数学化について述べる際、以上の立場に立ち述べている。

課題２「ハンス・フロイデンタールの考える「数学をする」と「数学化する」の差異とは」と課題３「生徒の学ぶべき数学化とは」の解決は３章で行った。

３章では、まずフロイデンタールの数学化がいかなるものかを明らかにするため、３－１において、数学化とは何に対して行うかについて考察してきた。実際には、「現実」と「数学」に対して数学化を行うことを明らかとし、この事実をもとに、３－２では、数学化がどのようなプロセスで進行するか、どのような洗練を目指すかについて明らかにした。そのプロセスとは、現実を数学化することに始まり、数学を数学化することへ続くプロセスである。ではそれぞれの数学化とはどのようなものか。

「現実を数学化すること」とは、生活の世界から記号の世界へ導くことであり、数学的な方法にアクセスでき、数学的に洗練できる構造に整理・組織することである。

「数学を数学化すること」とは、現実の数学化に続く数学を数学的手段により、一般化、拡張、形式化、公理化、演繹的な体系化という洗練に向け、整理-組織する活動である。

さらに数学化について明確にするため３－３の節を設けた。ここでは「数学する」と「数学化する」を比較し述べることにより課題Ⅱを解決する。３－３－１である「数学する」については【GEOMETORY BETWEEN THE DEVIL AND THE DEEP SEA】の中から考察し、３－３－２である「数学化する」については３－２をもとにまとめた表が以下の通りである。

数学する	数学化する
③ 数、公式、計算方法の貯蔵であり、暗記すること。 ④ 問題を探す活動、問題を解決する活動、組織する活動。	現実を数学的手段にアクセスでき、数学的洗練にアクセスできる構造に整理-組織する活動であり、現実の数学化に続く数学を数学的手段によって整理-組織する活動である。 前者を「現実を数学化すること」と呼び、後者を「数学を数学化すること」と呼ぶ。

この比較から、課題Ⅱについて、数学化とは、数、公式、計算方法の貯蔵や暗記ではなく、あくまでもフロイデンタールの数学観で明らかにしたような活動であり、「数学する」と「数学化する」の差異とは、それぞれがまったく別物というわけではなく、「数学する」という大きな枠に「数学化する」が含まれる形をとると解答した。

また、数学化について、Treffersが「水平方向の数学化」と「垂直方向の数学化」について述べており、フロイデンタールも【revisiting mathematics education】の中で、明確に記述するために、微妙な差異を加えたことを述べているが、Treffersのこの区別を支持しているため、３－４でこれについて述べた。だが、実際には現実と数学の数学化との同質であるとしかとらえられなかったため、明確な差異については課題として残っているしだいである。

以上で数学化について述べてきたが、では数学化をどのように教授すべきか、実際の教授において学習の水準がどのように上昇していくのか。これを３－５で明らかにした。その教授の方法として、フロイデンタールは発明し直すように学ぶべきであると強調している。それは、生徒が新たな数学的知識を「発明」するわけではなく、過去において作り上げられてきた数学を、生徒自身によりもう一度発明し直すということである。この発明し直すことは、どのように水準上昇していくか。それは、いっそう高いレベルでは、いっそう低いレベルの行為を分析の対象とし、上昇していく。つまり、ある水準における活動を「意識化」し「反省」するという方法により水準の上昇が図られるのである。

続いて、課題Ⅲである「生徒の学ぶべき数学化とは」について、ピアジェの段階従属理論を取り上げ３－６で考察したが、年齢による発達段階によって、教授可能な数学化をいくらか分類することはできそうだ、という見通しを与えたにすぎず、この節で述べたかったことは課題として残っているしだいである。

課題４「ハンス・フロイデンタールの考える数学化の教育的意義とは」と課題５「今日の数学の学習指導における数学化の意義とは」の解決は４章で行った。

４章では、課題Ⅳを明らかにするため４－１のはじめに、その効用と目的について述べ、そのことから、一般的な数学教育では、数学をどう用い、何を目指すべきであるかを明らかにした。その中で数学化の教育的意義について検討した。

数学教育の目的とはなんであるか。それは応用である。数学は非常に柔軟であり、１つの数学に多くの応用・応用可能性がある。それは、生徒が最終的にどんな種類の数学を応用するかはわからなくてもよいことを意味するが、かといってそれはカリキュラムの自由を意味するということではない。なぜなら、応用・応用可能性は、教材がどのように組織されるかに依存するからである。

もし数学が応用されるべきなら、数学を応用することが教えられ、学ばれるべきである。数学は、それぞれの度に新しく、それを創造することによって応用され、その過程に、更なる自主的な応用を意図している。まさに生徒自身の活動である数学化が行われなければならないのである。これにより、生徒は自身の必要感から活動し、数学化という方法をとることから生徒の生き抜かれた現実に関係づけることができる。よって、教えられた教材は深く固定され、それが活動的であり続ける。以上から数学化には教育的意義があるといえ、課題Ⅳが解決される。

また、続く４－２では、課題Ⅴを解決するために、まず、４－２－１において、小学校、中学校、高等学校の学習指導要領を、「実用的な目的」、「文化教養的な目的」、「陶冶的な目的」、「創造的実践の体得と鑑賞」という観点から、それぞれについて今日の目標を定めた。その結果、今日の数学の学習指導の目標として全てに共通することは、数学的知識や技能を習得することはもちろんのこと、数学的な見方・考え方の育成、つまり、算数・数学にふさわしい創造的な活動ができるようにすることに重きをおいているということを明らかとした。

次いで、４－２－２において、このような能力を育成するためにはどうすればよいか、数学化に照らし合わせ考察を進めた。

数学的な見方・考え方ができる能力の育成のためには、日々の学習の中で生徒が数学的な考え方により数学を創造する活動が繰り返し行われなければならない。そのためにはまず、実際の事象を目的に応じて数学的に捉えることから始めなければならない。これは４－２－２で述べた、「子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出す」ということにも関連するが、目的の一つである数学的な見方・考え方を進んで活用しようとする態度を育てることに根ざしている。これは、抽象的な数学的知識を与えられるまま習得することで達成されるのではなく、日常の事象を自分で理想化したり条件付けをするなどの主体的な活動によって、そこから続く問題の解決によって達成されうるものである。これは、フロイデンタールが数学の演繹体系に従ってなされる学習を「反教授学的逆転」と呼んで問題視している観点と同じであり、フロイデンタールの主張する「現実の数学化」が行われなければならない。

次いで、現実の数学化から続く問題の解決に移るわけであるが、中島健三は、統合的発展的に考察することが数学的な考え方の育成に対して有効に働く一つの手段であると主張している。その統合には、集合による統合、拡張による統合、補完による統合がり、このそれぞれについて数学化とからめて述べよう。

集合による統合について、これは、目的に合ったものについて共通の観点をとり出してそれでまとめ、その集まりを一つの思考対象と見なすということである。例えば、二等辺三角形という概念を学習させる際、４－２－２の図 14 から共通の観点をとり出し、構成する。これはまさに、空間的な対象 gestalt を図形として把握することに他ならない。この活動は幾何に限られたことではなく、操作を通して子どもが主体的に抽象する活動であり、観点をはっきりさせることで、その概念を数学にふさわしい論理的な考察にたえうるようにしている。つまり、数学的な洗練にアクセス可能な構造に整理・組織しているため、フロイデンタールの考えから歩をはずさないといえよう。

拡張による統合について、これは、今までの構造では解くことができない問題に出会ったとき、今までの構造をその問題にも耐えうる構造に整理組織し、その問題と既習事項も含めて一つの構造に統合するということである。これについては、3章でも述べており、まさに数学を数学化する活動であるといえよう。

補完による統合について、これは、すでに知っている概念や形式だけでは、適用できない場合が起こるとき、補うものを加えて、「完全になる」ようにまとめる場合である。これについては、直接的に数学化と関わりをもつわけではないが、その延長に拡張を根ざした考え方であるため、数学化と間接的な関連をもつといえよう。

以上から、今日の数学教育の目標である「数学的な考え方」の育成、つまり、創造的な授業の実践には、フロイデンタールの述べる数学化が大いに関わっており、この点から、今日の数学の学習指導において数学化を用いる意義があるといえる。ゆえに課題Vが解決された。

５－２　今後の課題

①課題Ｉである「フロイデンタールとはどのような人物か」
について

これについては、読むことができた文献が少なく大まかにしか明らかにすることができなかった。そのため、この課題の目的である本研究主題に対する有効な指針をあたえることができなかった。この課題は今後研究を進めていく上で重要な課題であり、文献を読み進め明らかにする。

②教授を考える際の公理化について

＜公理化＞で述べたその方法は、De Villiers が「記述的公理化」と呼んでいるものである。この他にも公理化の方法として、杉山が公理的方法を挙げている。簡潔に述べると、それは、命題から出発し「根拠を探る」という観点から、どんどんさかのぼり公理を定めることにより公理化を行うことである。実際の教授を考えるのであれば、これらについて考えなければならず、課題となりえるであろう。

③「現実の数学化」と「水平方向の数学化」、あるいは、
「数学の数学化」と「垂直方向の数学化」の差異について

３－４で「水平方向の数学化」と「垂直方向の数学化」について述べたが、筆者の今の認識では、３－４以前で述べてきた「現実の数学化」と「数学の数学化」と同じ意味でしかとらえられなかった。それが同質の用語なのか、それとも異質な用語なのかを検討しなければならない。この考察にあたり、treffers が【Three Dimensions:A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project, D.Reidel Publishing Company, 1978】の中で数学化

について述べているため考察の手がかりとなるであろう。

④学習プロセスの水準上昇の方法である
「model of」と「model for」について

本研究の考察にあたり、３－５－３である「学習プロセスのレベル」において、Van Hiele の学習水準理論を取り上げた。その水準上昇のための方法とは「意識化」と「反省」という方法であるが、RME では「model of」と「model for」というモデルを用いている。RME はフロイデンタールの考えにもとづいていることから、この新たなモデルは、発明し直す際の水準上昇において新たな視点を与えてくれると考えられる。そのため課題となりえるであろう。

⑤数学的な見方・考え方に対する視点

本研究においては、数学的な見方・考え方の育成に対し、統合という観点で考察を進めてきた。だが、中島健三が『有効に働く一つの手段である』と述べているように、数学的な見方・考え方の育成に対する手段は他にもある。実際の教授を目的として考えるのであれば、この「他の手段」に着目した考え方も必要となってくるのではないか。よって、このことが課題として考えられる。

＜引用・参考文献＞

Freudenthal, H. (1967) 数学を鑑賞する　平凡社　昭和 45 年 7 月 4 日　訳）矢野健太郎

Freudenthal, H. (1968) *Why to Teach Mathematics so as to be Useful* E.S.M　Volume 1　No.1/2 May

Freudenthal, H. (1971) *Geometry Between the Devil and the Deep Sea* E.S.M　Volume 3　No.3/4 June

Freudenthal, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task* D.Reidel 出版社

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* D.Reidel 出版社

(1990) *IN MEMORIAM : HANS FREUDENTHAL* E.S.M Volume 21　No.6 December

Freudenthal, H. (1990) *Revisiting mathematics education*

R.R.スケンプ（1992） 新しい学習理論にもとづく算数教育 ―小学校の数学―　平林　一榮　監訳 東洋館出版社

溝口　達也(2003) 問題解決と評価

小林　廉(2006) 「数学化すること」を重視した授業設計に関する研究 ― Realistic Mathematics Education を手がかりとして―

伊藤　伸也(2006) H.フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同

岡田　ヨシ（衣偏に韋）雄　H.Freudenthal の教授学的現象学の概念

岡田　ヨシ（衣偏に韋）雄(1977)　H.Freudenthal の数学教育論（Ⅰ）

岡田　ヨシ（衣偏に韋）雄(1978)　H.Freudenthal の数学教育論（Ⅱ）

杉山　吉茂（1987）　算数教育講座＝1987 年―今日的課題と発展のための考察―第 5 章　東洋館出版社

中島　健三(1981)　算数・数学教育と数学的な考え方―その進展のための考察―　金子書房

R.E.メイヤー（1979）　新思考心理学入門－人間の認知と学習へのてびき―　訳）佐古　順彦　サイエンス社

和田　義信（1997）　和田義信 1　著作・講演集　著作集　東洋館出版社

和田　義信（1997）　和田義信 6　著作・講演集　著作集(4)　東洋館出版社

和田　達次（2000）　数学教育における証明の機能に関する研究

和田　達次（2002）　学校数学における証明の機能としての体系化に関する研究-記述的公理化に基づく体系化による結果の経済性に焦点をあてて-

佐々木　力（2001）　二十世紀数学思想　みすず書房

小学校学習指導要領解説　算数編（1999）文部科学省

中学校学習指導要領解説　数学編（1999）文部科学省

高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編(1999)文部科学省

資料

資料１　数学的活動についての図【島田】

資料２　中学校において公理として定められている事柄やそれらから導かれた定理のネットワーク

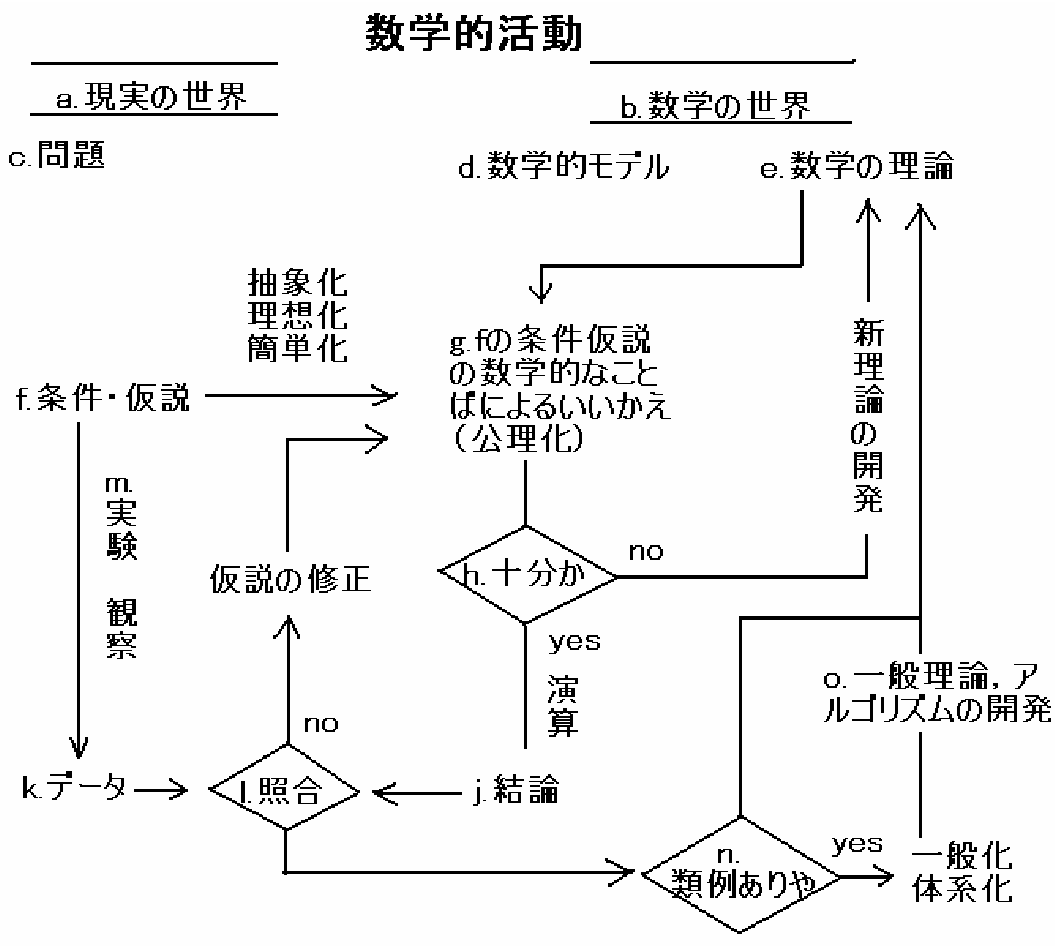
資料３　直観的分数とアルゴリズム的分数

資料４　前操作的思考についての具体例【R.E.メイヤー（1979）ｐ212-ｐ214】

資料５　形式的操作期の思考についての具体例【R.E.メイヤー（1979）ｐ218】

資料１は、数学化を考える際に重要な用語であり、今日の数学教育を考えるうえでも重要な用語である「数学的活動」について、島田茂先生が用いた、現実の問題から始まる数学的活動についての図である。資料２は、公理化を考える際に参考にした定理のネットワークについて、和田達次の論文から引用した図である。資料3は分数の教授を考える際に必要であった用語「直観的分数」と「アルゴリズム的分数」について、岡田　ヨシ（衣偏に韋）雄先生の論文より引用した内容である。資料４は３－６でピアジェ理論の前操作期を扱う際、主要な限界についての具体例である。資料５も、３－６でピアジェ理論の形式的操作期を扱う際、そこで行われる思考について振動問題を例にとり示すものである。

（資料１）
＜数学的活動についての図＞



（資料 2）

＜中学校において公理として定められている事柄やそれらから導かれた定理のネットワーク＞

この資料における注意は以下の通りである。

中学校では公理として定められている事柄

公理などから導かれた事柄(定理)

（）の数字は学習する学年

この資料については最後に記載。

（資料 3）

＜直観的分数とアルゴリズム的分数について＞

直観的分数とは初等算術に属する分数であり、子供が分数の意味を直観的に、しかも現実の世界に密着して理解することができる分数を意味している。具体的に言えば、測定の結果得られるところの分母が 10 の巾である分数であるとか、分割分数といわれている分数がそれであると考えられる。たとえば、1/3,1/4 などの、単位分数 2/3 を 1/3 の 2 つ分とみる場合の 2/3 などは、直観的分数の範囲にあると考えられる。一方、たとえば 8/47 とか、7÷3 を 7/3 と書き表したような分数は、Freudenthal のいうアルゴリズム的分数の範囲にある分数と考えられる。前者は分割分数の意味を一般化したもので、分母、分子を任意の正の整数にしたものの一例である。したがって、8/47 を 1/47 が 8 つ分と見ることはできるけれども、現実の世界では、少なくともこのような分数を考える必要はなく、また直観的であるとは言えないのである。後者は、7÷3 を 7/3 という記号で表記するという考えであり、この考え方がすでに代数的な考え方である。この考え方は、「7/3 のような分数は、方程式 3x=7 を解くために発明せられた。このように、7/3 は 3x=7 となる x として働く」という考え方のことであり、Freudenthal はこれを、代数的原理（algebraic principle）と名付けている。

（資料 4）

＜前操作的思考についての具体例＞

非可逆性

4 歳児の被験者に質問する―

「あなたは兄弟がいますか？」彼の答え「はい」

「彼の名前はなんといいますか？」「ジム」

「ジムには兄弟がいますか？」「いいえ」

フィリップス（Phillips,1969）から引用

転導的推理

2 歳と 14 日のときに、ジャクリーヌは、2 階に置いてある人形のドレスをほしがった。彼女は、「ドレス」といって、彼女の母がそれを拒むと、「おとうちゃんドレスとってきて。」私もまた拒むと、彼女は自分に行かせようとしていった、「おかあちゃんの部屋へ。」これを何度か繰り返した後で、彼女は、そこが寒すぎるといわれた。長い間黙ったままでいて、それから「そんなに寒くない。」私がたずねた、「どこが？」「その部屋のなか。」「なぜそんなに寒くないの？」「ドレスとってきて。」

ピアジェ（Piaget,1951）から引用

自己中心性

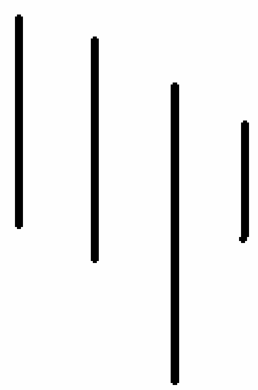
オハジキのゲームの遊び方について、子どもたちにインタヴューした後で、ピアジェは、次のように結論した。「・・・・・・学校では同じクラスにいて、同じ住宅に住み、お互いに遊ぶことになれている子どもたちでも、この年齢では、お互いに理解できる子どもが、なんと少ないことか。彼らは、私たちに全く異なる規則を話すばかりか・・・・・・いっしょに遊ぶときは、お互いを見ないで、各自の規則を、ゲームを続けるためにすら、統一しようとしない。実は、どちらも、他者のもっている良いところを得ようとしないのである。すなわち、それぞれの子どもは、自分でゲームをしているだけなのであって、オハジキを正方形のなかに命中させようとする。すなわち、自分からみて『勝とう』とするのだ。〔砂遊び箱

のまわりにすわっているような、ほかの事態では〕２歳から６歳までの子どもには、特徴的なタイプの擬似会話あついは『集団的独語（collective monologue)』がみられ、その間、子どもたちは、自分自身のためにだけ話す・・・・・・それぞれの子どもは、自分自身だけに関係している。」

ピアジェ（Piaget,1965）から引用

中心化

子どもに長さのちがう一組の棒を順に並べさせると、次のような配列を構成する。



明らかに、その子どもは、問題の一つの側面だけに「中心を置いている」（たとえば、棒の上端）、そしてほかの側面（たとえば、棒の下端）を同時に考慮することができない。

具体性・非可逆性・中心化・状態

4 歳児に質問する。「あなたは友だちがいますか？」

「はい、オデット。」

「さあ、見てごらん、クレレット、あなたに１ぱいのオレンジエード（A1、3／4 みたされている）をあげよう。オデットには１ぱいのレモネード（A2、同じく 3／4 みたされている）をあげよう。あなたたちのどちらかが、もう一人よりも飲物をたくさんもっていますか？」

「同じ。」

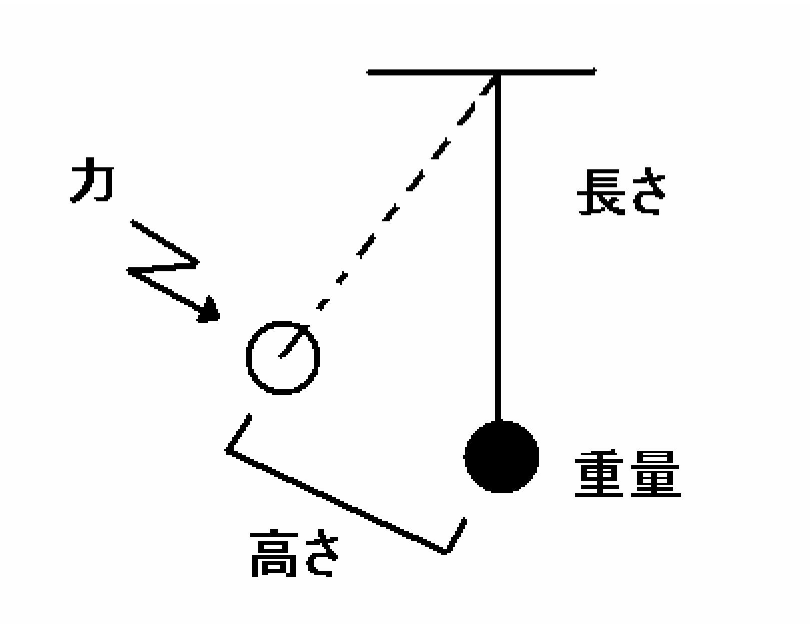
「クレレットはこうしなさい（彼女に飲物を二つの別のグラスに移させる）（B1 と B2 したがって半分だけみたされてい

る。）クレレットはオデットと同じだけもっていますか？」
「オデットのほうが多い。」
「なぜ？」
「少なくしたから。」（彼女は、二つのグラスがあるという事実を考えないで、B1 と B2 の水準を指さす。）
（次に、オデットの飲物を B3 と B4 にそそぐ。）「同じだ。」
「それでは、今度は？」（クレレットの飲物を B1 と B2 から L、長く細い容器、に移す。ほとんどいっぱいになる。）
「私のほうが多くなった。」
「なぜ？」
「そのグラス（L）に入れて、こっち（B3 と B4）はそうしなかった。」
「でも、前は同じだった？」
「はい。」
「今度は？」
「多くなった。」
「でも余分はどこからきた？」
「そのなかから。」（B1）

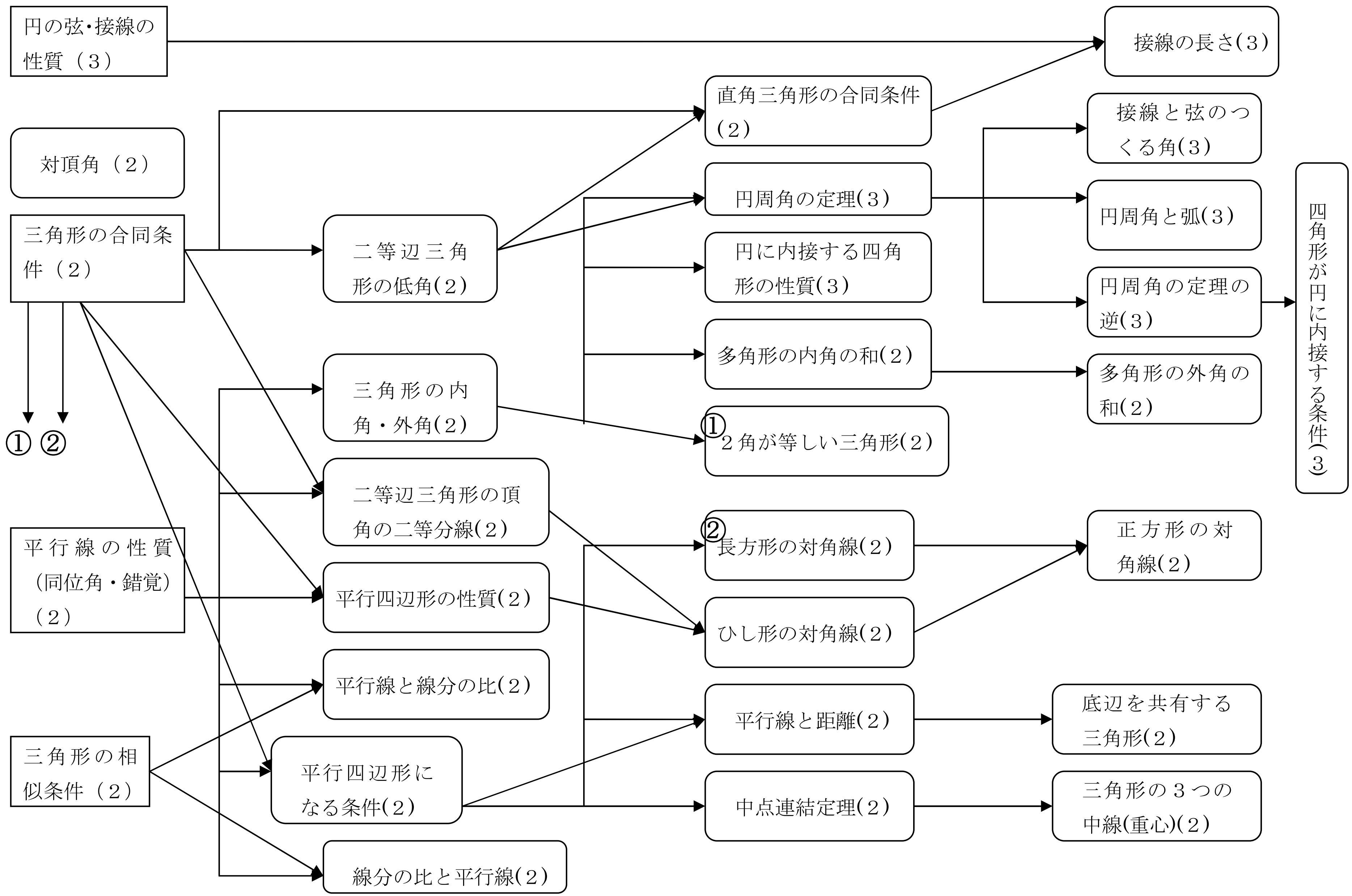
ピアジェ（Piaget,1952）から引用

（資料 5）
＜形式的操作期の思考についての具体例＞

振動問題
振子を与えて、被験者に、糸の長さ、つるされた物体の重さ、離される物体の高さ、物体が離れるときの力、を変化させる。これらのうちの、どれが振動の速さに影響するのか、すなわち、振子はどのくらい速く揺れるか？



ピアジェは、典型的な青年（15 歳 1 ヶ月）の反応を、次のように報告している。「・・・・・・100 g の重りをつけた長い糸と中間の長さの糸でたしかめてから、20 g の重りをつけた長い糸と短い糸でためし、最後に、200 g の重りをつけた長い糸と短い糸でためして、次のように結論した。『糸の長さこそ、速くしたり、遅くしたりするものであり、重さはどんな役割も演じていない。』彼女は、落下の高さと押す力とを、同様の方法で、しりぞけた。」
インヘルダーとピアジェ（Inhelder & Piaget, 1958）から引用


円の弦･接線の性質（３）
対頂角（２）
三角形の合同条件（２）
①②
平行線の性質（同位角・錯覚）（２）
三角形の相似条件（２）
二等辺三角形の低角(２)
三角形の内角・外角(２)
二等辺三角形の頂角の二等分線(２)
平行四辺形の性質(２)
平行線と線分の比(２)
平行四辺形になる条件(２)
線分の比と平行線(２)
直角三角形の合同条件(２)
円周角の定理(３)
円に内接する四角形の性質(３)
多角形の内角の和(２)
①２角が等しい三角形(２)
②長方形の対角線(２)
ひし形の対角線(２)
平行線と距離(２)
中点連結定理(２)
接線の長さ(３)
接線と弦のつくる角(３)
円周角と弧(３)
円周角の定理の逆(３)
多角形の外角の和(２)
正方形の対角線(２)
底辺を共有する三角形(２)
三角形の３つの中線(重心)(２)
四角形が円に内接する条件(３)

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881−6134

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

投稿規定

- ❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。
- ❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/