講座

地盤材料の構成モデル最前線

2. 弾塑性論の解説とカムクレイモデルの適用性

中 井 照 夫（なかい てるお）
名古屋工業大学大学院教授 工学研究科

2.1 はじめに

材料の弾性，塑性および弾塑性挙動のモデル化について1次元で解説した後に，典型的な地盤材料の1次元挙動である1次元圧密特性を弾塑性論的な観点から解説する。その中で，1次元といえども通常の弾塑性論（古典的弾塑性論と呼ぶ）では表せない土の諸特性についても触れる。

Terzaghi（テルツァーギ）以来別々に考えていた地盤材料の圧密特性とせん断特性を一つの考え方で説明した最初の弾塑性モデルがCam clay model[1),2)]（カムクレイモデル）である。ここでは，Cam clay modelがよく知られている正規圧密土の1次元圧縮におけるe–$\log p$の直線関係の単なる多次元化であるという視点でCam clay modelを解説する。さらには，Cam clay modelの適用性について述べ，この後の章で解説される発展型の構成モデルの理解の助けとしたい。

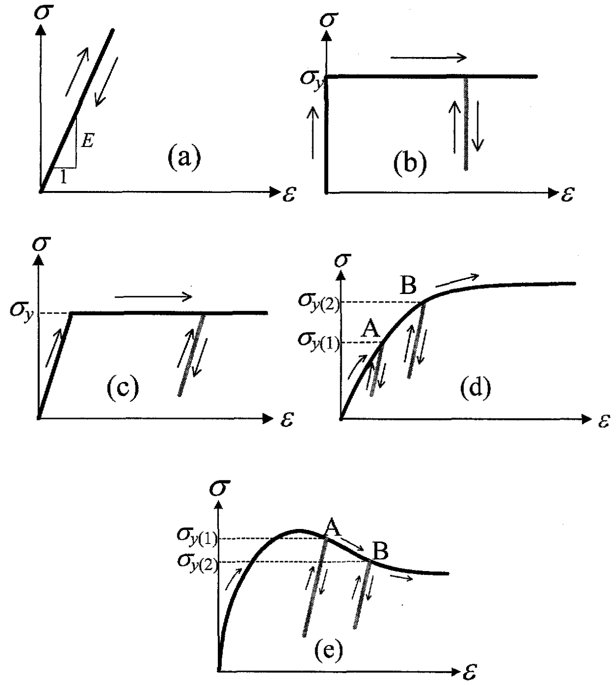
2.2 1次元弾塑性論の概説

図—2.1は様々な材料の特徴的な1次元応力・ひずみ関係を模式的に表したものである。(a)図は弾性体で応力・ひずみ間に，載荷・除荷を問わず

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\sigma \ \text{or}\ d\varepsilon=d\varepsilon^{e}=\frac{1}{E}d\sigma \quad (E:\text{弾性係数}) \cdots(2.1)$$

と表せる。ここに，図に示すように材料の硬さを表す弾性係数Eが一定のものを線形弾性体，Eが応力あるいはひずみの大きさによって変わるものを非線形弾性体という。そして，応力・ひずみ間の剛性を割線弾性係数，応力増分・ひずみ増分間の剛性を接線弾性係数と呼ぶが非線形の場合両者は異なる。

(b)図は剛塑性体の応力・ひずみ関係で応力σがある応力σ_yより小さいところではひずみは発生せず，$\sigma=\sigma_y$となり，それが維持されるときだけひずみが発生する。また，ひずみが発生していても$\sigma<\sigma_y$となると応力の増減にかかわらず図に示すようにひずみは発生しない。このように応力が変化しても戻らないひずみを塑性ひずみといい，(a)図や式(2.1)に示すように応力が決まればひずみが決まる（載荷・除荷にかかわらず応力の変化に応じて発生する）ひずみを弾性ひずみという。したがって，塑性ひずみについては応力とひずみ間に一義的な関係は成り立たずひずみ増分と応力増分間の関係式として次式のように表せる。



図—2.1 1次元状態における特徴的な応力・ひずみ関係の模式図

$$\begin{cases} d\varepsilon=0 & (f=\sigma-\sigma_y<0\ \text{or}\ df<0) \\ d\varepsilon=d\varepsilon^{p}=\dfrac{d\sigma}{h^{p}}=\infty & (f=\sigma-\sigma_y=0\ \&\ df=0) \end{cases} \cdots\cdots(2.2)$$

ここに，括弧で示したひずみが発生するかしないかの基準を負荷基準，そこで使われる関数$f=0$を降伏関数という。また，h^pは塑性成分の硬さを表しており，式(2.1)の弾性係数Eに対応させて塑性係数という。(b)図のような場合，塑性成分の硬さはないので$h^p=0$となり，完全塑性体という。なお，本文では，弾性（elastic）成分および塑性（plastic）成分を上付添え字のeとpで区別する。

さて，いかなる材料にも必ず強度はあるわけであるから，弾性体として扱われることが多い金属材料でもその強度を考えるときには，そのひずみ増分が式(2.1)の弾性成分と式(2.2)の塑性成分の和で表せると考え，(c)図の弾塑性体としてモデル化する。この時，応力増分・ひずみ増分間の関係式が次式で表せることは容易に理解できる。

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e = \dfrac{1}{E}d\sigma & (f=\sigma-\sigma_y<0 \text{ or } df<0) \\ d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \dfrac{1}{E}d\sigma + \dfrac{d\sigma}{h^p} = \infty & (f=\sigma-\sigma_y=0 \ \& \ df=0) \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.3)$$

このように，弾性・完全塑性体であれば弾性係数Eと塑性ひずみが発生するときの応力（降伏応力）σ_yを決めると応力・ひずみ関係は計算出来るが，一般の地盤材料（程度の差はあれ金属材料でも）では(d)図のような弾塑性挙動を示す。同図に示すように，A点（$\sigma=\sigma_{y(1)}$）まで載荷した後除荷すると弾性挙動しかしないのは(c)図と同じであるが，更に載荷すると応力が大きくなりながら弾塑性挙動を示す。そして，B点で除荷をするとこの弾性限界を表すσ_yもB点の応力$\sigma_{y(2)}$まで大きくなる。このように，応力が大きくなりながら塑性ひずみが発生するものをひずみ硬化弾塑性体という。この時弾性限界応力σ_yは，完全塑性体のように一定ではなく，塑性ひずみの関数で$\sigma_y=\sigma_y(\varepsilon^p)$のように与える必要がある。この時，応力増分・ひずみ増分間の関係式は基本的に式(2.3)と同じであるが，降伏応力が塑性ひずみの発生に伴って大きくなるので次式で表せる[3]。

$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e = \dfrac{1}{E}d\sigma & (f=\sigma-\sigma_y<0 \text{ or } d\sigma<0) \\ d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \dfrac{1}{E}d\sigma + \dfrac{d\sigma}{h^p} & (f=\sigma-\sigma_y=0 \ \& \ d\sigma\geq 0) \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.4)$$

同式から，塑性ひずみが発生するときはσ_yが変化しても常に$\sigma=\sigma_y(f=0)$を満たすことが判るが（後続負荷条件），これは$d\sigma=d\sigma_y(df=0)$を満足することも意味する（適応条件）。ひずみ硬化弾塑性体では$\sigma_y=\sigma_y(\varepsilon^p)$のように降伏応力が塑性ひずみの関数で与えられるので，適応条件より式(2.4)中のh^pは次式で与えることができる。

$$d\sigma = d\sigma_y = \frac{\partial\sigma_y}{\partial\varepsilon^p}d\varepsilon^p = h^p d\varepsilon^p \quad \cdots\cdots(2.5)$$

さて，弾塑性体が(c)図や(d)図のように，応力が一定もしくは増加しながら塑性ひずみが発生するだけでなく，(e)図のように応力が減少しながら塑性ひずみが発生することもある（ひずみ軟化）。このようなとき，塑性ひずみが生じる負荷基準は式(2.4)に示した$f=0$ & $d\sigma\geq 0$では与えられず，(e)図に示すように除荷（弾性）側も載荷（弾塑性）側も$d\sigma<0$となり応力だけでは負荷基準を決められない。したがって，ひずみ軟化挙動を含むより一般的な負荷基準は，正の塑性ひずみしか生じないという条件より，次式で与えることができる[3]。

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = 0 & (f=\sigma-\sigma_y<0 \text{ or } d\varepsilon^p\leq 0) \\ d\varepsilon^p \neq 0 & (f=\sigma-\sigma_y=0 \ \& \ d\varepsilon^p>0) \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.6)$$

上述したひずみ硬化（軟化）型の弾塑性モデルの定式化では，降伏関数を式(2.4)のように，応力σと降伏応力σ_yを使って$f=\sigma-\sigma_y=0$と表し，降伏応力を塑性ひずみと関係づけている。しかし，同じ意味であるが，応力の関数Fと塑性ひずみの関数Hを使って

$$f = F(\sigma) - H(\varepsilon^p) = 0 \quad \cdots\cdots(2.7)$$

のような形でより一般的に降伏関数を表す方がこの後の地盤材料のモデル化や多次元化の説明がしやすい。この場合，適応条件（$df=0$）より，

$$dF = \frac{\partial F}{\partial\sigma}d\sigma = \frac{\partial H}{\partial\varepsilon^p}d\varepsilon^p \quad \cdots\cdots(2.8)$$

が得られ，ひずみ増分は次式のように表せる。

$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e = \dfrac{1}{E}d\sigma & (f=F-H<0 \text{ or } d\varepsilon^p\leq 0) \\ d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \dfrac{1}{E}d\sigma + \dfrac{dF}{\partial H/\partial\varepsilon^p} & (f=F-H=0 \ \& \ d\varepsilon^p>0) \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.9)$$

2.3　地盤材料の1次元弾塑性挙動

弾塑性論に基づいて地盤材料の1次元力学挙動（1次元圧密や等方圧縮）を定式化してみよう。

2.3.1　正規圧密土

図—2.2は，多くの教科書でも解説されている正規圧密粘土の1次元圧密時の間隙比（e）～$\ln\sigma$関係を模式的に描いている。I点を初期状態，P点を現状態としたとき，この間の間隙比の変化（$-\Delta e$）は

$$(-\Delta e) = e_0 - e = e_{N0} - e_N = \lambda \ln\frac{\sigma}{\sigma_0} \quad \cdots\cdots(2.10)$$

ここに，λは自然対数目盛の応力軸をとったときの圧縮指数で通常の常用対数目盛での圧縮指数C_cを使って$\lambda=0.434C_c$で与えられる。また，除荷時の間隙比変化は弾性成分と考えられるので，弾性成分$(-\Delta e)^e$は膨潤指数$\kappa=0.434C_s$を使って次式となる。

$$(-\Delta e)^e = \kappa \ln\frac{\sigma}{\sigma_0} \quad \cdots\cdots(2.11)$$

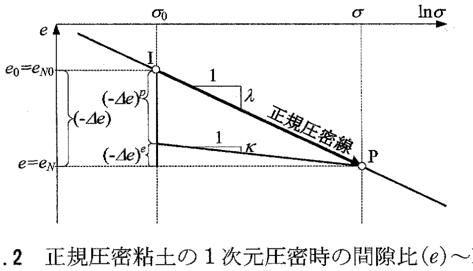
また，再載荷時もP点の応力（過去の最大応力）までは除荷時と同じ挙動をし，その後は式(2.10)と同じ弾塑性挙動をすると考える。これは，前に述べた典型的なひずみ硬化弾塑性挙動なので，その塑性成分は次式で与えられる。

$$(-\Delta e)^p = (-\Delta e) - (-\Delta e)^e = \lambda\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} - \kappa\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} \quad \cdots\cdots(2.12)$$

式(2.12)を降伏関数の形で表現すると

$$f = F - H = 0 \quad \text{or} \quad F = H \quad \cdots\cdots(2.13)$$

と表せる。ここに，FおよびHは応力項と塑性ひずみ（間隙比変化の塑性成分）項を表し，次式で与えられる。



図—2.2　正規圧密粘土の1次元圧密時の間隙比(e)～$\ln\sigma$関係

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

$$F=(\lambda-\kappa)\ln\frac{\sigma}{\sigma_0}\cdots\cdots(2.14)$$

$$H=(-\Delta e)^{\mathrm{p}}\cdots\cdots(2.15)$$

ところで，ひずみ硬化（軟化）する弾塑性体では，Fは応力σの関数でHは塑性ひずみの関数なので，$F=H$を満足しながら塑性ひずみが発生する。したがって，式(2.13)と適応条件式（$df=0$）より

$$df=dF-dH=(\lambda-\kappa)\frac{d\sigma}{\sigma}-d(-e)^{\mathrm{p}}=0\cdots\cdots(2.16)$$

同式より，間隙比増分の塑性成分は

$$d(-e)^{\mathrm{p}}=(\lambda-\kappa)\cdot\frac{d\sigma}{\sigma}\cdots\cdots(2.17)$$

また，間隙比変化の弾性成分は式(2.11)より，

$$d(-e)^{\mathrm{e}}=\kappa\frac{d\sigma}{\sigma}\cdots\cdots(2.18)$$

したがって，正規圧密土の1次元圧密時の構成モデルは式(2.4)に対応させて次式のように表せる。

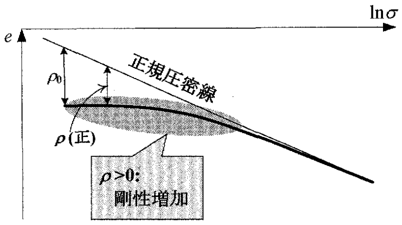
$$\begin{cases} d(-e)=d(-e)^{\mathrm{e}}=\kappa\dfrac{d\sigma}{\sigma} & (f=F-H<0 \text{ or } dF<0) \\ d(-e)=d(-e)^{\mathrm{p}}+d(-e)^{\mathrm{e}} & \\ \quad=\{(\lambda-\kappa)+\kappa\}\dfrac{d\sigma}{\sigma} & (f=F-H=0 \text{ \& } dF\geq 0)\end{cases}\cdots\cdots(2.19)$$

ここに，土の1元挙動を表すのに，ひずみではなく間隙比を用いた理由であるが，この後(この章に限らず)の議論でも判るように同じ土でも間隙比によってその弾塑性挙動が大きく異なるからである。大変形を考えないのであれば間隙比変化やその増分を（$1+e_0$）で割れば容易にひずみやひずみ増分が求められるのは言うまでもない。

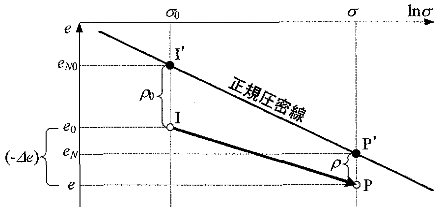
2.3.2　過圧密土

前小節で示したように，1次元の正規圧密土は典型的なひずみ硬化型の弾塑性挙動を示す。そこでは，過圧密土（例えば**図―2.2**のP点から除荷した土）は再載荷時に過去の最大応力（P点の応力）になるまで，弾性ひずみしか生じないし，P点の応力になるとその後は急に勾配λの弾塑性挙動に移行することになる。**図―2.3**は過圧密土の1次元圧密特性を模式的に描いている。このように，過圧密領域でも再載荷時に弾塑性挙動を示し，応力の増加とともに正規圧密土の関係（正規圧密線）に徐々に近づくことは実験でも知られている。このような過圧密土の1次元変形特性はこれまで述べてきた古典的弾塑性論では説明出来ないので，古典的弾塑性論では弾性域と扱っていた領域の弾塑性変形も併せて説明する発展的弾塑性論について過圧密土を例に説明する[4]。これはこの後の章でも解説がある下負荷面モデル[5),6)]の考え方の1次元的解釈に相当する。

図―2.3に示すように，ある応力状態の間隙比と同じ応力状態の正規圧密線上の間隙比の差ρを土の密度を表す指標とする。これは土の一番緩い状態は正規圧密線上にあるので，それからの間隙比の差は締まり方の程度（密度）を表すといえる。また，ρは過圧密比（OCR）



図―2.3　過圧密粘土の1次元圧密時の間隙比（e）～ln σ 関係



図―2.4　過圧密土の初期状態（I点）と現状態（P点）の応力および間隙比

と次式で関係づけられる。

$$\rho=(\lambda-\kappa)\ln(\mathrm{OCR})\cdots\cdots(2.20)$$

図―2.4は過圧密土の初期状態（I点）と現状態（P点）の応力および間隙比を表している。ここに，(σ_0, e_0）および（σ, e）は初期状態および現状態の応力と間隙比を表す。また，e_{N0}およびe_{N}は応力がσ_0およびσ時の正規圧密線上の間隙比である。したがって，同図から密度を表す変数ρの初期状態および現状態の値はそれぞれ$\rho_0=e_{\mathrm{N0}}-e_0$, $\rho=e_{\mathrm{N}}-e$と定義できる。また，この間の間隙比変化の弾性成分は正規圧密土と同じ式(2.11)で与えられる。**図―2.4**を参考に，間隙比変化の塑性成分は次式のように表せる。

$$\begin{aligned}(-\Delta e)^{\mathrm{p}}&=(-\Delta e)-(-\Delta e)^{\mathrm{e}}\\&=\{(e_{\mathrm{N0}}-e_{\mathrm{N}})-(\rho_0-\rho)\}-(-\Delta e)^{\mathrm{e}}\\&=\lambda\ln\frac{\sigma}{\sigma_0}-(\rho_0-\rho)-\kappa\ln\frac{\sigma}{\sigma_0}\end{aligned}\cdots\cdots(2.21)$$

式(2.14)，(2.15)のFおよびHを用いて上式を書き直すと，過圧密土の降伏関数は次式で与えられる。

$$f=F-\{H+(\rho_0-\rho)\}=0 \quad \text{or} \quad F+\rho=H+\rho_0\cdots(2.22)$$

ここでも，適応条件（$df=0$）を考えると次式が得られる。

$$\begin{aligned}df&=dF-\{dH-d\rho\}\\&=(\lambda-\kappa)\frac{d\sigma}{\sigma}-\{d(-e)^{\mathrm{p}}-d\rho\}=0\end{aligned}\cdots\cdots(2.23)$$

さて，応力を増やしていったとき，前述したように過圧密土（$\rho>0$）は塑性変形が進むにつれ正規圧密線に近づき（$d\rho<0$)，やがては正規圧密状態（$\rho=0$）になる。また，正規圧密線への近づき方は密度が大きい（ρが大きい）ほど急激に近づくと考えられるので，ρの変化は間隙比増分の塑性成分（もしくは塑性ひずみ増分）と次式のような形で関係づけられる。

$$d\rho=-G(\rho)\cdot d(-e)^{\mathrm{p}}\cdots\cdots(2.24)$$

上述の条件を満たすためには，関数$G(\rho)$は$G(0)=0$となるρの増加関数であればよい。このように，密度等の状態を表す変数を状態変数（state variable）とい

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

い，その変化の仕方を決める関係式（例えば式(2.24)）を状態変数の発展則（evolution rule）という。式(2.23)，(2.24)から過圧密土の間隙比増分の塑性成分は次式で与えられる。

$$d(-e)^{p}=\frac{\lambda-\kappa}{1+G(\rho)}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma} \quad\cdots\cdots(2.25)$$

したがって，式(2.18)で与えられる弾性成分を考え，過圧密土の1次元構成モデルは次式で与えられる。同式と式(2.19)の比較から判るように塑性係数が正規圧密粘土のそれの（1+G(ρ)）倍になる。

$$\begin{cases} d(-e)=d(-e)^{e}=\kappa\dfrac{d\sigma}{\sigma} & (dF<0) \\ d(-e)=d(-e)^{p}+d(-e)^{e} & \cdots\cdots(2.26) \\ \quad=\left\{\dfrac{\lambda-\kappa}{1+G(\rho)}+\kappa\right\}\dfrac{d\sigma}{\sigma} & (dF\geq 0) \end{cases}$$

さて，ここで説明した発展型弾塑性論（橋口の下負荷面モデル（Subloading surface model）の考え方を1次元変形問題で簡単に解説した）では過去の最大応力（古典的弾塑性論の降伏応力）よりも現応力が小さくても再載荷時には塑性ひずみが発生する。これは弾性除荷時にも $f=0$ を満足することを意味するので，dF の正負だけで載荷，除荷を区別する。なお，過圧密土の1次元挙動ではひずみ軟化はないので，式(2.26)に示した負荷規準で通常は問題ないが，1次元でも軟化挙動がある場合には前述したように塑性ひずみは正の方向にしか生じないという条件から1次元の発展型弾塑性論ではより一般的に以下の負荷規準を採用する。

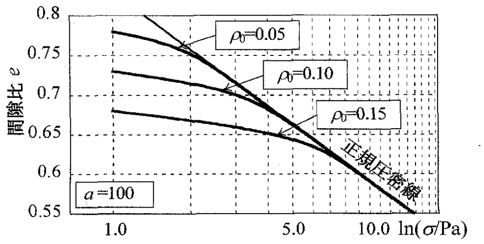
$$\begin{cases} d(-e)^{p}=0 & (d(-e)^{p}\leq 0) \\ d(-e)^{p}\neq 0 & (d(-e)^{p}>0) \end{cases} \quad\cdots\cdots(2.27)$$

図―2.5に過圧密土を1次元圧密した時の解析結果を示す。ここに，ρ の発展則を表す増加関数 $G(\rho)$ は簡単な1次関数で与えている。

$$G(\rho)=a\rho \quad\cdots\cdots(2.28)$$

解析は藤の森粘土を想定し，材料パラメーターは $\lambda=0.104$，$\kappa=0.010$，$N=0.83$，$a=100$ とした（N は $\sigma=98$ kPa 時の正規圧密線の間隙比）。過圧密土が応力の増加に伴い正規圧密線（NCL）に徐々に近づく実験でみられる挙動をよく表現していることが判る。

ここでは，1次元で下負荷面モデルの説明をしたが，次号以降では多次元下での下負荷面の解説がなされる。多次元でもその考え方の基本は同じである。また，古典的弾塑性論では説明出来ない過圧密土の挙動を説明するよく似たコンセプトのモデルとしてDafaliasらによる境界面モデル（Bounding surface model）[7]があるが，モデルの物理的意味や単純さにおいて下負荷面モデルに勝るものではない。

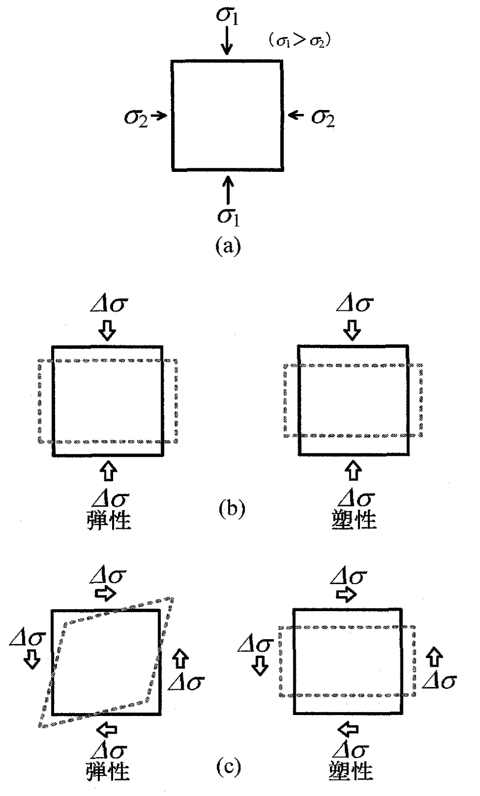


図―2.5　過圧密粘土の解析結果

2.4　多次元弾塑性論の概説

通常弾塑性論と言えば多くの本に書かれているように，始めに降伏関数，ひずみ硬化パラメーター，流れ則などの言葉が出てくるが，ここでは1次元弾塑性論の延長として多次元の弾塑性論の基本について解説する。

1次元では，除荷したときにひずみ（変形）が戻るか戻らないと，塑性体では正のひずみしかでないことが弾性体と塑性体の違いであったが，多次元ではこれらに加えて次に述べる塑性体の特徴を考慮する。図―2.6(a)に示すように，主応力 σ_1, σ_2 ($\sigma_1>\sigma_2$) が作用している弾性体と塑性体を考える。ここに，σ_1 方向に微小な応力増分 $\Delta\sigma$（主応力増分）を与えたとき，(b)図に示すように弾性体と塑性体はともに主応力方向が変化しないので σ_1 方向に圧縮し σ_2 方向に膨張する同じような変形モードである（ひずみの大きさやひずみ増分の比 $d\varepsilon_1/d\varepsilon_2$ は問わない）。次に，同じ初期状態で微小なせん断応力増分 $\Delta\sigma$ を与えたとき，それぞれの変形モードは(c)図のようになる。すなわち，弾性体では主ひずみ増分の方向は主応力増分の方向と一致するが，塑性体では主ひずみ増分の方向は主応力と一致する（共軸性と呼ばれる）。また，(b)，(c)図の塑性変形のモードから判るように，塑性体では応力状態が同じであれば，応力増分の与え方によらずひずみの出方（変形のモード）は同じとなる。すなわち，現在の応力状態が同じで塑性ひずみが発生する時には，ひずみの発生の仕方（例えば塑性ひ



図―2.6　多次元における弾性と塑性の変形モード

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

ずみ増分の比 $d\varepsilon_1/d\varepsilon_2$）は応力増分のかけ方によらない（流れ則と呼ばれる)。この塑性ひずみ増分の発生の仕方がその時の応力だけで決まり，応力増分の与え方によらない理由であるが，塑性変形はある意味物が壊れていくプロセスといえる（だから変形は戻らない)。例えば，ヒビが入り壊れかけた花瓶を上から押そうが斜めから押そうが壊れ方に変わりがないことと同じである。以上説明したように，多次元においては弾性変形と塑性変形のこのようなひずみの発生の仕方の違いさえ理解すると後は１次元の弾塑性変形と同じように扱える。後はその定式化である。

多次元でも降伏関数は式(2.7)と同じ形で与えられるが，次式に示すように，F や H は多次元の応力および塑性ひずみの関数で与える。

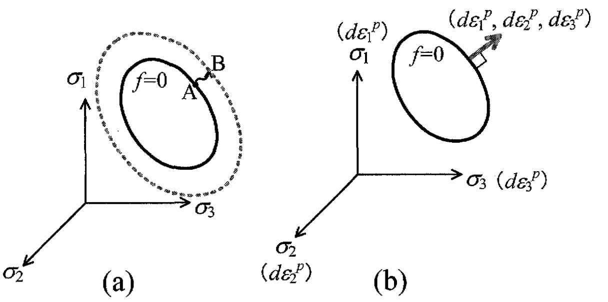
$$\begin{cases} f=F(\sigma_{ij})-H(\varepsilon_{ij}^{p})=0 \\ \text{ここに，等方性を仮定し，主値で表すと} \\ f=F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)-H(\varepsilon_1^{p},\varepsilon_2^{p},\varepsilon_3^{p})=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.29)$$

その結果，**図—2.7**(a)に示すように降伏関数は，応力の空間の一つの曲面として描くことができる（降伏曲面と呼ぶ)。また，１次元の場合塑性ひずみが発生しながら応力が変化したとき降伏応力もそれに応じて変化したのと同様，多次元では例えば応力状態がＡ点からＢ点まで変化したときそれに応じて降伏曲面も変化する。さて，その時の塑性ひずみの発生の仕方であるが，前述したように塑性ひずみ増分の主軸の方向は応力の主軸と一致する（共軸性）ので，(b)図に示すように主応力軸にあわせて主ひずみ増分軸をとり，応力増分の向きにかかわらず塑性ひずみ増分の向きは降伏曲面に垂直な方向となる（流れ則)。また，その時塑性ひずみ増分の向きは降伏曲面の外側を向いて内側には向かない。これは１次元で正の塑性ひずみしか発生しないことと同意味である。ここで，(b)図に示すように，塑性ひずみ増分の方向がなぜ降伏曲面に垂直な方向になる必要があるのかという疑問がわくかも知れないが，これは塑性ひずみ増分の方向が応力増分の方向の影響を受けないとしたとき塑性仕事増分が最大になるように塑性ひずみが発生するとした最大塑性仕事の原理（仮定)[3]から導かれる。この原理（仮定）からは降伏曲面は凸形でなければならないことも導き出されるが，詳細は多くの弾塑性論の本や文献で説明されている。

塑性ひずみ増分方向が降伏曲面に垂直でかつ外向きであるとことから，塑性ひずみ増分は次式のように表現できる。

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{p}=\Lambda\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \quad (\Lambda:\text{正のスカラー}) \\ \text{ここに，等方性を仮定し，主値で表すと} \\ d\varepsilon_1^{p}=\Lambda\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_1},\ d\varepsilon_2^{p}=\Lambda\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_2},\ d\varepsilon_3^{p}=\Lambda\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_3} \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.30)$$

上式は例えば等方性地盤の透水問題で等ポテンシャル線に直交する方向に流れが生じることを，スカラー関数（流れの問題では等ポテンシャル線）の勾配（gradient）をとって定式化するのと同じである。



図—2.7　降伏曲面と流れ則

さて，正のスカラー Λ は塑性ひずみ増分の大きさを表すことになるが，１次元の場合と同様適応条件（$df=0$）から決めることができる。

$$\begin{aligned} df&=dF-dH=dF-\frac{\partial H}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}d\varepsilon_{ij}^{p} \\ &=dF-\frac{\partial H}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}\cdot\Lambda=0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.31)$$

したがって，塑性ひずみ増分の大きさを表すスカラー関数 Λ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \Lambda=\dfrac{dF}{\dfrac{\partial H}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}}=\dfrac{dF}{h^{p}} \\ \text{主値で表すと} \\ \Lambda=\dfrac{dF}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial\varepsilon_1^{p}}\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_1}+\dfrac{\partial H}{\partial\varepsilon_2^{p}}\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_2}+\dfrac{\partial H}{\partial\varepsilon_3^{p}}\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_3}\right)}=\dfrac{dF}{h^{p}} \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.32)$$

ここに，dF は降伏曲面の変化（**図—2.7**(a)では広がり）を表しているので，分母（h^p）が塑性ひずみの硬さを表すことになり１次元と同様塑性係数と言う。

なお，古典的弾塑性論では降伏曲面の内側に応力が変化するときや降伏曲面内に応力状態があるとき塑性ひずみは発生せず，降伏曲面も変わらない。したがって，１次元の式(2.4)同様次式で負荷規準が与えられる。

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{p}=0 \quad (f=F-H<0 \text{ or } dF<0) \\ d\varepsilon_{ij}^{p}\neq0 \quad (f=F-H=0 \ \&\ dF\geq0) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.33)$$

１次元でも述べたように，上式ではひずみ軟化時の負荷と除荷の判別ができないので，式(2.6)に対応させてより一般的にひずみの大きさを表すスカラー Λ を使って次式で負荷規準を与える。

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{p}=0 \quad (f=F-H<0 \text{ or } \Lambda\leq0) \\ d\varepsilon_{ij}^{p}\neq0 \quad (f=F-H=0 \ \&\ \Lambda>0) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.34)$$

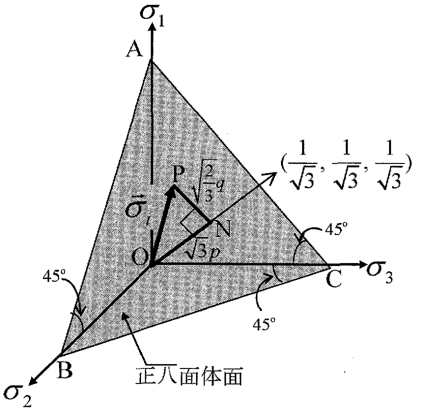
2.5　カムクレイモデル概説

Cam clay model が**2.3.1**で解説した正規圧密土の１次元の古典的弾塑性モデルの多次元版であるとの観点から説明する。

前節で説明したように，等方性を仮定しても一般には多次元の降伏関数は３主応力もしくは三つの不変量で決められる。しかし，三つの変数を使った降伏関数は決めにくいので，通常は実験事実を参考に一つないしは二つの応力パラメーターで定義する。**図—2.8**は主応力空間で現応力の主応力ベクトル（$\overrightarrow{OP}$）と現応力を通る正

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



図―2.8　金属材料やCam clay modelで使われる応力パラメーターの説明

八面体面（静水圧軸に直交する面ABC）を描いている。同図に示すように，$\overrightarrow{OP}$は正八面体面に垂直な成分$\overline{ON}$と平行な成分$\overline{NP}$に分けられる。そして，次式で示す応力パラメーターが定義される。

$$\begin{cases} p=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,\overline{ON}=\dfrac{1}{3}\,(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \\ q=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\overline{NP}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \end{cases} \cdots\cdots(2.35)$$

上式から判るように，pは平均応力を意味し，qは偏差応力と呼ばれ応力差を表す指標となる。なお，三軸圧縮条件$(\sigma_2=\sigma_3)$ではそれぞれ$p=(\sigma_1+2\sigma_3)/3$, $q=\sigma_1-\sigma_3$となる。さて，金属材料の構成モデルの多くでは式(2.29)の降伏関数を

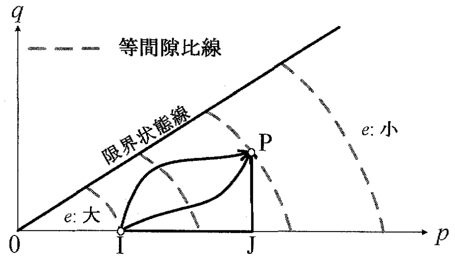
$$f=F(q)-H(\varepsilon_d{}^p)=0 \cdots\cdots(2.36)$$

の形で与えることが多い。ここに，$\varepsilon_d{}^p$は塑性偏差ひずみを表す不変量である（ひずみも正八面体面に垂直な成分と平行な成分に分けられ，垂直成分は大きさの変化を表す体積ひずみε_vに，平行な成分は形の変化を表す偏差ひずみε_dに相当する)。これは，金属材料では，塑性変形が拘束応力（平均応力）の影響を受けないことや，塑性的な体積変化がないことによる。

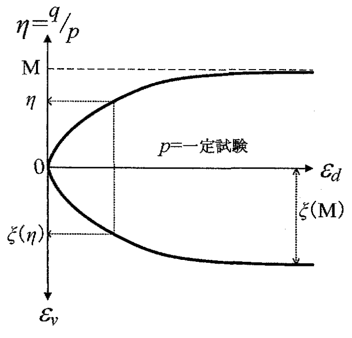
一方，地盤材料では，強度特性を考えても判るように，塑性変形は拘束応力の影響を受ける。また，圧密でもせん断でも塑性的な間隙比変化（言い換えれば塑性体積ひずみ）が生じることは周知のことである。その結果地盤材料の降伏関数は次式の形で与えられることが多い。

$$\begin{cases} f=F(p,q)-H(\varepsilon_v{}^p, \varepsilon_d{}^p)=0 \\ or \\ f=F(p, \eta=q/p)-H(\varepsilon_v{}^p, \varepsilon_d{}^p)=0 \end{cases} \cdots\cdots(2.37)$$

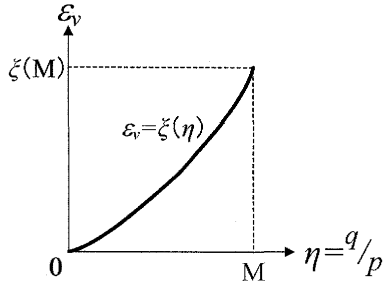
式(2.37)の降伏関数を具体的な形で与えるため，次に述べる正規圧密土の二つの実験事実に着目する。一つはHenkelが見いだしたもので**図―2.9**に示すように，ある応力状態（ここではp軸上のI点）から任意の応力状態P点までどのような経路で応力が変化してもその間に生じる間隙比の変化$(-\Delta e)$は同じであるという実験結果である（その結果，式(2.37)の降伏関数のHは間隙比変化の塑性成分$(-\Delta e)^p$もしくは塑性堆積ひずみ$\varepsilon_v{}^p$



図―2.9　Henkelの等間隙比（含水比）線



図―2.10　正規圧密粘土の応力比～偏差ひずみ～体積ひずみ関係



図―2.11　正規圧密粘土の応力比～体積ひずみ関係

だけの関数とできる)。もう一つは例えば平均応力(p)一定で正規圧密土をせん断したとき応力比～偏差ひずみ～体積ひずみ関係が平均応力の大きさにかかわらず**図―2.10**のように描けるという実験結果である。応力比が大きくなるにしたがい，正の体積ひずみε_v（体積圧縮）が生じ，最終的には応力比が$\eta=q/p=\mathrm{M}$でそれ以上体積変化が起こらない状態（限界状態；CSL）に至る。同図から，体積ひずみは増加関数$\xi(\eta)$で次式のように表せる（**図―2.11**)。

$$\varepsilon_v=\xi(\eta)\quad（ここに，\xi(0)=0）\cdots\cdots(2.38)$$

$\xi(\eta)=D\eta$のようにηの一次式で体積ひずみを表した時，係数Dを柴田のダイレイタンシー係数[8]という。

さて，これらの実験事実と1次元圧密時（もしくは等方圧密時）の間隙比の変化が式(2.10)で与えられることを考慮すると，**図―2.9**で応力状態がどのような経路で初期応力状態I点$(p=p_0, \eta=0)$から現状態P点$(p=p, \eta=\eta)$まで変化しても，その間の間隙比の変化はIJ間（等方圧縮時）とJP間（せん断時）の間隙比変化の和で表せることになる。

$$(-\Delta e)=e_0-e=\lambda\ln\frac{p}{p_0}+(1+e_0)\xi(\eta)\cdots\cdots(2.39)$$

一方，せん断（応力比の変化）時の体積変化（ダイレイタンシー）はすべて塑性成分と考えると，この間の間隙

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

比変化の弾性成分は式(2.11)同様次式で与えられる。

$$(-\Delta e)^{e}=\kappa\ln\frac{p}{p_0} \quad \cdots\cdots(2.40)$$

したがって，間隙比変化の塑性成分は次式となる。

$$(-\Delta e)^{p}=(-\Delta e)-(-\Delta e)^{e}=(\lambda-\kappa)\ln\frac{p}{p_0}+(1+e_0)\xi(\eta)$$

$$=(\lambda-\kappa)\left\{\ln\frac{p}{p_0}+\zeta(\eta)\right\} \quad \cdots\cdots(2.41)$$

ここに，$\zeta(\eta)=\{(1+e_0)/(\lambda-\kappa)\}\xi(\eta)$ となるので，$\zeta(\eta)$ も $\zeta(\eta)=0$ を満たす増加関数である。式(2.41)を書き直すと，多次元の降伏関数として1次元の式(2.13)～(2.15)と同じ形式で表すことができる。

$$f=F(p,\eta=q/p)-H((-\Delta e)^{p})=0 \quad \cdots\cdots(2.42)$$

$$F=(\lambda-\kappa)\left\{\ln\frac{p}{p_0}+\zeta(\eta)\right\}=(\lambda-\kappa)\ln\frac{p_1}{p_0} \quad \cdots\cdots(2.43)$$

$$H=(-\Delta e)^{p}=(1+e_0)\varepsilon_v^{p} \quad \cdots\cdots(2.44)$$

すなわち，1次元の関数 F（式(2.14)）の σ_0, σ を p_0, p_1 に置き換えているだけである。式(2.43)で表せる関数（降伏曲面）の形状は図―2.12に描いているように，p～q 空間で原点を通る凸形であり，その大きさを表す p 軸上の値が p_1 となる。また，塑性主ひずみ増分の方向が主応力の方向に一致すること（共軸性）より，p 軸および q 軸方向に塑性体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v^{p}$ および塑性偏差ひずみ増分 $d\varepsilon_d^{p}$ の方向が対応し，塑性ひずみ増分方向は図に示すように降伏曲面に垂直な方向となる（流れ則）。

塑性ひずみ増分は流れ則より

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\Lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}=\Lambda\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\sigma_{ij}}+\frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_{ij}}\right) \quad \cdots\cdots(2.45)$$

と表され，適応条件（$df=0$）より正のスカラー Λ は次式で与えられる。

$$\Lambda=\frac{dF}{(1+e_0)\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_{kk}}}=\frac{dF}{h^{p}}\quad\left(\text{ここに } dF=\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}\right) \quad \cdots\cdots(2.46)$$

ところで，塑性ひずみ増分比は式(2.43)，(2.45)より，次式で求められる。

$$\frac{d\varepsilon_v^{p}}{d\varepsilon_d^{p}}=\frac{(\partial F/\partial p)+(\partial F/\partial\eta)(\partial\eta/\partial p)}{(\partial F/\partial\eta)(\partial\eta/\partial q)}$$

$$=\frac{1-\zeta'(\eta)\cdot\eta}{\zeta'(\eta)} \quad \cdots\cdots(2.47)$$

同式から，応力比（η）が決まれば塑性ひずみ増分比（$d\varepsilon_v^{p}/d\varepsilon_d^{p}$）が一義的に決まることが判る。これは，図―2.12に示すように，降伏曲面が形を変えず原点を中心に相似的に大きさを変えることを意味する。この関係式を，ストレス・ダイレイタンシー関係と呼ぶこともある。

さて，original Cam clay model[1]および modified Cam clay model[2]では限界状態（図―2.10参照）の応力比Mを使って，それぞれ次式で $\zeta(\eta)$ を与えている。

$$\zeta(\eta)=\frac{1}{M}\eta \quad \text{(original)} \quad \cdots\cdots(2.48)$$

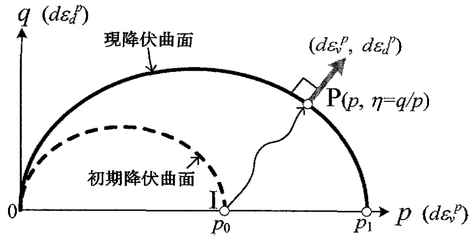
$$\zeta(\eta)=\ln\frac{M^2+\eta^2}{M^2} \quad \text{(modified)} \quad \cdots\cdots(2.49)$$

その結果，両モデルの降伏関数の（p, q）平面での形状は図―2.13に示すようなかたちになる。また，式(2.47)を使って，original および modified Cam clay models の応力比（q/p）～塑性ひずみ増分比（$d\varepsilon_v^{p}/d\varepsilon_d^{p}$）を求めると，次式のようになる（図示すると図―2.14のように描ける）。

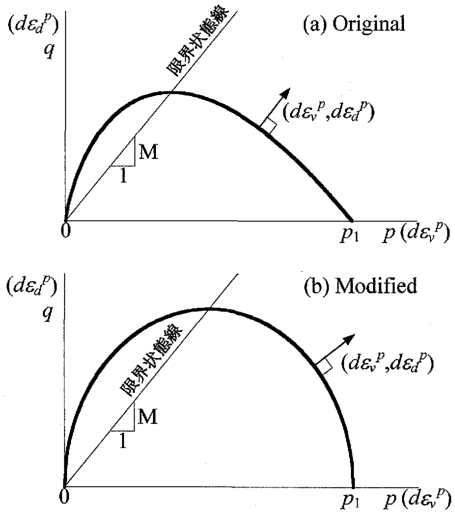
$$\frac{d\varepsilon_v^{p}}{d\varepsilon_d^{p}}=M-\eta \quad \text{(original)} \quad \cdots\cdots(2.50)$$

$$\frac{d\varepsilon_v^{p}}{d\varepsilon_d^{p}}=\frac{M^2-\eta^2}{2\eta} \quad \text{(modified)} \quad \cdots\cdots(2.51)$$

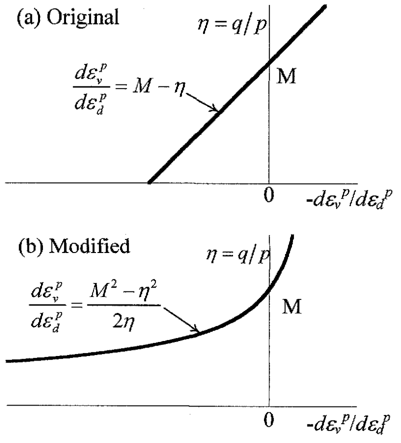
上式（図―2.14）から，式(2.48)，(2.49)で与えた $\zeta(\eta)$



図―2.12　(p, q) 面上で表した Cam clay 型モデルの降伏曲面と塑性ひずみ増分方向



図―2.13　(p, q) 面上で表した original および modified Cam clay model の降伏曲面



図―2.14　original および modified Cam clay model による応力比～塑性ひずみ増分比関係

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

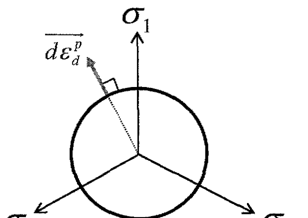
を使った降伏関数が $\eta=\mathrm{M}$ で $d\varepsilon_v^p=0$ となる限界状態を満たしていること判る。

これまでの議論から，降伏関数の形が決まることと，応力比～塑性ひずみ増分比が一義的に決まることは同じであることが判る。ところで歴史的にいえば，Cam clay model は上述のように誘導されたのではなく，逆に応力比～塑性ひずみ増分比関係を与えそれから降伏関数の形状を決めるというプロセスで定式化されている（むしろ original Cam clay model と等価な太田モデル[9]がここで説明したプロセスで誘導されている）。なお，Cam clay model では応力比～塑性ひずみ増分比関係（式(2.50)あるいは式(2.51)）を決めるため，エネルギー消散式なるものを使って理屈付けをしているが，その物理的な意味は怪しいので，後述するように応力比～塑性ひずみ増分比関係式は一つの実験的事実として捉えた方がよい。

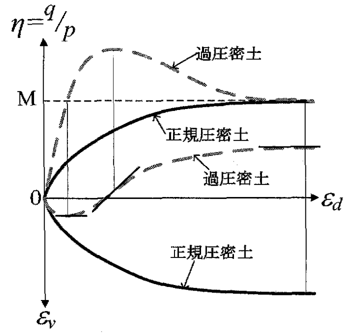
ところで，応力パラメーター（p, q）は図―2.8からも判るように，応力の静水圧軸方向成分と静水圧軸に直交する正八面体面上の半径方向成分に対応するので，これらの応力パラメーターを使って降伏関数を作ると，（p, q）面では図―2.12に示すような形状になるが，正八面体面上の形は必然的に原点を中心とする円（図―2.15）となる。したがって，その面上の塑性ひずみ増分（$d\varepsilon_d^p$）の方向も流れ則より半径方向にならざるを得ない。図―2.12と図―2.15の両方の面内でひずみ増分方向が実際の土のそれと一致して初めて3主応力下での土の挙動が説明できたことになるが，図―2.15の妥当性にはあまり注意が払われていない（実際は，この面上での塑性ひずみ増分（$d\varepsilon_d^p$）の方向のわずかなズレが応力・ひずみ関係には思いの外影響する）。

図―2.16は正規圧密粘土と過圧密粘土あるいは極端に緩い砂と密な砂の応力比～偏差ひずみ～体積ひずみ関係を模式的に描いている。正規圧密粘土あるいは極端に緩い砂（実線）では応力比が大きくなるにしたがいダイレイタンシー曲線の接線勾配に相当するひずみ増分比（$-d\varepsilon_v/d\varepsilon_d$）がマイナス側（圧縮側）からゼロに近づき最終的にゼロになる（$\eta=\mathrm{M}$ で $d\varepsilon_v=0$）。ここで，弾性ひずみが十分小さいとすると，全ひずみ増分比は塑性ひずみ増分比とほぼ同じと考えられ，図―2.14の実線で示すような関係が成り立つことが判る。ところで，図―2.16の破線で描いた過圧密粘土あるいは密な砂の応力・ひずみ関係は緩い土のそれと極端に違っていても，その応力比～ひずみ増分比関係は緩い土のそれとほとんど変わらない。すなわち，密な土ではせん断応力（応力比）が大きくなるに伴い体積圧縮し応力比 $\eta=\mathrm{M}$ となったときには $d\varepsilon_v=0$ となるが，その後は応力比の増加に伴い膨張側に転じピーク強度でダイレイタンシー曲線の接線勾配（$-d\varepsilon_v/d\varepsilon_d$）が最大となる。ピーク後は（$-d\varepsilon_v/d\varepsilon_d$）が小さくなりながらひずみ軟化を示し最終的には緩い土の最終状態，すなわち同じ限界状態（$\eta=\mathrm{M}$ で $d\varepsilon_v=0$）に至る。式(2.50)，(2.51)や図―2.14の関係は緩い土だけでなく，せん断により体積膨張する密な土にも適用できることになる（厳密に言えばそれなりに密度や応力履歴の影響はあるが，モデル化を複雑にしないためここでは認める）。これは図―2.12（式(2.43)）や図―2.13で与えた降伏関数は $\eta>\mathrm{M}$ の膨張側でも有効であることを意味する。この後の章で述べられる発展型の構成モデルでも基本的には式(2.43)の形状で降伏関数を定義するゆえんはここにある。

正規圧密粘土および過圧密比（OCR）が1.5および4の過圧密土の p 一定せん断試験および非排水試験の解析結果（original Cam clay model）を図―2.17，図―2.18に示す。計算に用いた材料パラメーターは藤の森粘土を想定し1次元の解析と同じ $\lambda=0.104$, $\kappa=0.010$, $N=0.83$ と限界状態の応力比 $\mathrm{M}=1.36$ と弾性成分のポアソン比 $\nu_e=0.2$ である。(a)図は応力・ひずみ関係を，(b)図は応力経路図を表し，図中にはせん断前の降伏曲面を細い実線で限界状態の降伏曲面を細い波線で示す。(c)図はせん断中の間隙比変化を $e\sim\ln p$ 関係で表している。同図より，よく知られているように，Cam clay model が正規圧密土の排水せん断時の応力・ひずみ・ダイレイタンシー特性や非排水せん断時の応力・ひずみ特性や有効応力経路の特徴を表せるモデルであることがわかる。一方，過圧密土については排水せん断におけるピーク強度後のひずみ軟化挙動は表せるものの，その前の正のダイレイタンシーを示しながらひずみ硬化する（応力比が大きくなる）過圧密粘土や砂特有の応力・ひずみ特性は表現できない（なお，Cam clay model によるひずみ硬化・軟化挙動の表現に関しては，その負荷規準を含めたきちんとした形での定式化は浅岡ら[10]によってなされている）。このように，古典的弾塑性論に基づく Cam



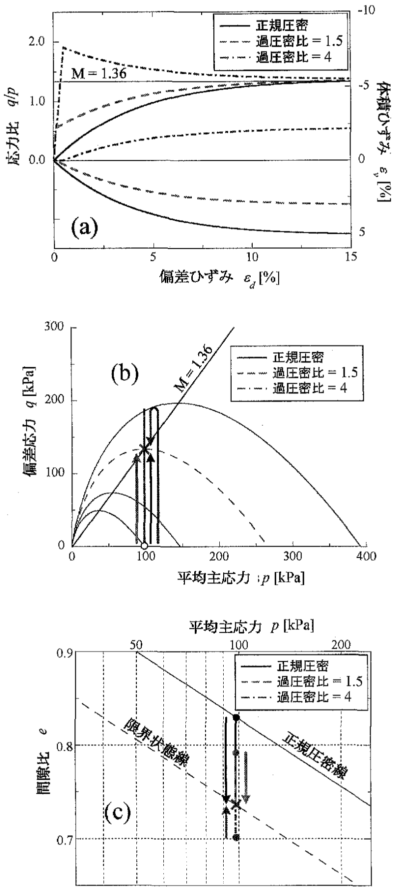
図―2.15　正八面体面上で表した Cam clay 型モデルの降伏曲面と塑性ひずみ増分方向



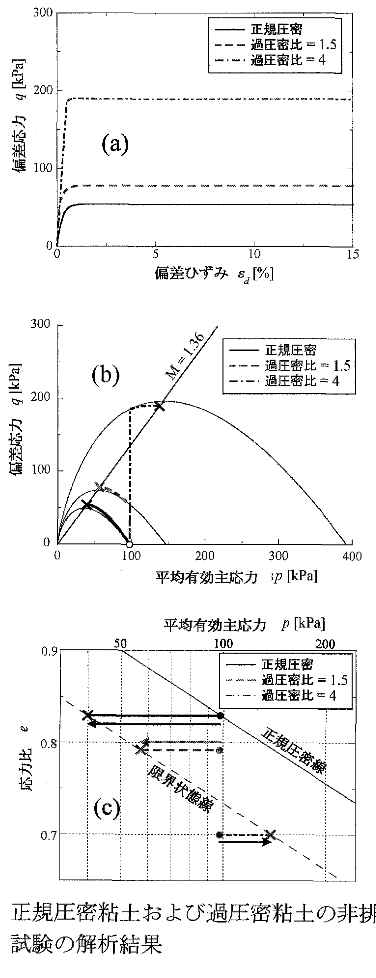
図―2.16　正規圧密粘土・極端に緩い砂（NC）と過圧密粘土・密な砂（OC）の応力比～偏差ひずみ～体積ひずみ関係

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



図—2.17　正規圧密粘土および過圧密粘土の平均応力（p）一定せん断試験の解析結果



図—2.18　正規圧密粘土および過圧密粘土の非排水せん断試験の解析結果

clay model では降伏関数の内側では弾性挙動しか示さず，図—2.16に示すような密な砂や過圧密粘土の応力・ひずみ関係や繰返し載荷時の応力・ひずみ挙動は表せない。これは，1次元問題を例に2.3.1で説明したように，古典的弾塑性論では過圧密領域の弾塑性挙動が説明出来ないことと同義であり，その説明には2.3.2で概略を説明したように古典的弾塑性論の降伏関数の内側での塑性ひずみの発生を説明する考え方（例えば下負荷面的な扱い）が必要となる。

2.6　おわりに

本講座のはじめとして，地盤材料の構成モデルを記述するための弾塑性論を判りやすく説明するために，1次元でその考え方と定式化の基礎を述べた後に，多次元の弾塑性論に拡張する方法を解説した。また，教科書に載っている圧密挙動は典型的な1次元の弾塑性挙動であり，それを多次元化したものが Cam clay model であることを示した。その上で，Cam clay model の定式化を解説すると共に，その適用性について述べた。また，Cam clay model ではその応力・ひずみ挙動が説明できない過圧密土のモデル化についても理解しやすいように1次元で解説した。Cam clay model で説明できない土の他の力学挙動のモデル化についてはこの後の章で順次解説される。

参　考　文　献

1) Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: *Critical State Soil Mechanics*, McGrow–Hill, London, 1968.
2) Roscoe, K. H. & Burland, J. B. (1968): On the generalized stress–strain behavior of wet clay. Heyman and F. A. Leckie (eds.), *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press, pp. 535～609, 1968.
3) Hill, R.: *The Mechanical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
4) 中井照夫：1次元モデルを例とした土の弾塑性挙動の記述，地盤工学会誌，Vol. 56, No. 9, pp. 6～9, 2008.
5) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elasto–plastic constitutive laws for granular materials, constitutive equations for soils, *Proc. Specialty Session 9, 9th ICSMFE*, Tokyo, pp. 73～82, 1977.
6) Hashiguchi, K.: Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto–plastic transition, *Jour. Appli. Mech,. ASME*, Vol. 102, No. 2, pp. 266～272, 1980.
7) Dafalias, Y.: Bounding surface formulation of soil plasticity, *Soil Mechanics—Transient and Cyclic Loads*, Chapter 10, Edit. by G. Pande and O. C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, pp. 253～282, 1982.
8) 柴田　徹：粘土のダイラタンシーについて，京都大学防災研究所年報，第6号，pp. 128～134, 1963.
9) Ohta, H.: Analysis of deformation of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankment, *Dr. Eng. Thesis*, Kyoto University, 1971.
10) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil–water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol. 34, No. 1, pp. 91～105, 1994.

NII-Electronic Library Service