講　座

有限要素法の基礎と地盤工学への応用

2.　微分方程式のおさらいと有限要素法の基礎（その１）

田　村　　　武（たむら　たけし）
京都大学教授　大学院工学研究科土木工学専攻

2.1　はじめに

まずはじめに理解すべきは「有限要素法は微分方程式を解く道具である」ということである。有限要素法は釣合い式や浸透流の連続の式を解くのが直接の目的ではない。むろん，解くべき微分方程式が，たまたま釣合い式や連続の式かもしれないが，あくまでも直接に扱うのは微分方程式である。いわば，数学の道具である。有限要素法と聞いて，始めから離散的なトラス構造を思い浮かべるのは適切な連想ではない。したがって，有限要素法が相手とする微分方程式をまず知らねばならない。しかし，微分方程式ならなんでもよいというわけではない。なぜなら，勝手に作った微分方程式にはどのような境界条件のもとで一つの解が存在するかがわかっていないし，また，それに有限要素法を適用した場合，どのような定式化がふさわしいのかも明確でない。逆にいえば，有限要素法が最も得意とする微分方程式がある。それが楕円型[注1)]あるいはそれに近い型の微分方程式である。物理現象でいえば，変位を未知関数とする弾性体の釣合い式や，全水頭を未知関数とする浸透の連続の式である。ここでは，このような微分方程式の誘導方法や性質について述べたあと，いかにしてそれらに有限要素法を適用するのかを次に述べる。

有限要素法の基礎は意外と分かりやすい概念に立脚している。そこでの重要なキーワードは「弱形式」，「ガラーキン（Galerkin）法」および「形状関数（基底関数）」の三つである。それらのうち，はじめの弱形式はしばしば「仮想仕事の式」と呼ばれているものであり，有限要素法による解の意味を考える場合に，極めて大きな役割を果たしている。本章では，有限要素法の基礎概念や基礎理論のみに焦点をあて，「有限要素法とはいったい何なのか」という問いかけに応えることを目的とする。

2.2　簡単な微分方程式の誘導

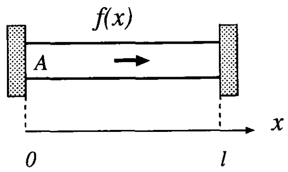
2.2.1　一次元弾性体の基礎式

物体の変形を考察する静力学の解が満足しなければならないのが，以下の三つの関係式と境界条件である。

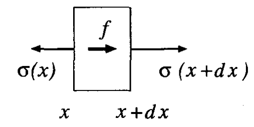
(A)　釣合い条件

(B)　適合条件

(C)　構成式



図―2.1　両端を固定された直線棒



図―2.2　微小区間の釣合い

(D)　境界条件

なお，はじめの三つの関係式が領域全体で成立することとは異なり，最後の境界条件は文字どおり領域の境界だけで与えられる条件である。これらの詳しい内容を簡単な例を用いて説明する。

(A)　釣合い条件

いま，図―2.1のように，長さが l で両端を固定された断面積 A の棒が x 軸に沿っておかれている。棒の左端は $x=0$ に，また，右端は $x=l$ にある。この棒には x 軸方向に単位体積当たり物体力 $f(x)$ が作用する。棒の断面内に作用する引張り応力を σ とする。特に座標 x における σ の値を関数 $\sigma(x)$ のように表示する。$x+dx$ における σ の値 $\sigma(x+dx)$ が $\sigma(x)+d\sigma$ と一次近似されることに注意しながら，図―2.2の x と $x+dx$ の範囲の棒において，x 軸に沿う力の釣合い式を書くと，

$$(\sigma+d\sigma)A-\sigma A+fAdx=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

あるいは

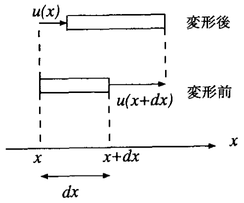
$$\frac{d\sigma}{dx}+f=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

のようになる。これは，応力で表現した釣合い条件である。

(B)　適合条件

次に，変位とひずみの関係を述べる。一般に力学を考えるとき，力の釣合い条件ばかりが注目され，ややもすれば忘れがちなのが，この変位とひずみの関係である。その一つの理由は，力の釣合いが直感的に把握できることに比べて，変位-ひずみ関係がやや数学的あるいは幾何学的であるからとも考えられる。図―2.3のように，直線棒の軸に沿って x 軸を設けたとき，座標 x の点において x 軸方向に $u(x)$ だけ変位したとする。x（棒片の尻尾）と $x+dx$（棒片の頭）の範囲を取り上げる。変形前には（棒片の）長さは dx である。変形に伴って $x+dx$ においては $u(x+dx)$ だけ x 軸方向に移動し，x においては $u(x)$ だけ同方向に移動する。したがって，その差である $u(x+dx)-u(x)$ だけ（棒片は）伸びることになる。$u(x+dx)$ を $u(x)+du$ と一次近似すれば，

注1）　数理物理学における偏微分方程式は，熱伝導方程式のような放物型，波動方程式のような双曲型，弾性体の釣合い式のような楕円型の３種類に分類される。



図―2.3　変位とひずみ

その区間における平均的な伸び率が求められる。これかひずみ ε であり,

$$\varepsilon=\frac{du}{dx} \quad\cdots\cdots(3)$$

となる。この式は変位-ひずみ関係であるが，ここではこれを適合条件と呼ぶことにする注2)。

(C)　構成式

いま，簡単のため棒は線形弾性体からなるとし，そのヤング（Young）率を E とする。x 軸方向の引張りひずみ ε と応力 σ とには

$$\sigma=E\varepsilon \quad\cdots\cdots(4)$$

なる関係がある。これは最も簡単な応力-ひずみ関係であるが，一般的には構成式と呼ばれるものであり，材料の特性を記述する式である。弾性に限らず種々のモデルがあるが，この弾性モデルがすべてのモデルの基本となっている。また，有限要素法を理解するうえではこれで十分である。

以上で，境界条件以外の三つの条件を簡単な例を用いて説明した。すると以下に示すように変位 u で表現した釣合い式を導くことができる。まず，構成式(4)に適合条件式(3)を代入すると,

$$\sigma=E\frac{du}{dx} \quad\cdots\cdots(5)$$

のように応力を変位で表すことができる。さらに，この結果を釣合い式(2)に代入すると，変位で表した釣合い式：

$$E\frac{d^2u}{dx^2}+f=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

が導かれる。このように変位で表した釣合い式をナビア（Navier）の式という。したがって，棒の軸に沿う弾性変形問題の支配方程式注3)は2階の微分方程式となる。これは，代表的な一次元の楕円型微分方程式である。なお，式(6)の一般解には二つの積分定数が含まれるが，これを決定するのに必要なものが，以下に述べる境界条件である。

(D)　境界条件

図―2.1に示したように，ここで考える直線の棒は両端で移動しないように x 軸方向に固定されている。すなわち,

$$u(x=0)=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

$$u(x=l)=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

である。このように変位（すなわち未知量そのもの）を指定する境界条件を変位境界条件という。あるいはディリクレ（Dirichlet）条件という。特にこの例のように，その指定された値が0であるような境界条件を斉次境界条件，0でないものを非斉次境界条件という。一方，問題によっては変位ではなく，境界に作用する応力（すなわち未知量の1階微分に相当する量）を指定するような境界条件を与えることもある。これを応力境界条件という。あるいはノイマン（Neumann）条件という。したがって，たとえば右端が自由端であるというのは，作用している力が0であるから

$$\frac{du}{dx}(x=l)=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

という斉次応力境界条件ということができる。

与えられた領域のすべての境界において，変位あるいは応力境界条件のいずれかを指定しなければ問題の解は一意的に定まらない。ただし，同一の境界点において変位境界条件と応力境界条件を同時に与えることは不可能である。すなわち，境界で変位を指定すれば，そこでの応力注4)は問題を解くことによって自動的に定まり，また，応力を指定すれば，そこでの変位は問題を解くことによって自動的に与えられる。むろん，一部が変位境界条件で，残りが応力境界条件であってもよい。なお，応力境界条件ばかりを与える場合には，全体で釣合い条件を満足するような境界応力の設定が必要である。たとえば，ここで取り上げている例題のように，物体力の作用している棒の問題においては，物体力の総和に釣合うだけの力を両端の境界力として与えなければならない。これを満たす場合においても，棒を左右に平行移動することは可能であるので，絶対的な変位の値は不定となる。

式(6)の物体力を $f(x)=f_0$ のように一定の大きさとすると，この微分方程式は容易に解けて

$$u(x)=-\frac{f_0}{E}\left(\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2\right) \quad\cdots\cdots(10)$$

となる。ここに C_1, C_2 は未知の積分定数である。図―2.1の境界条件に合わせて積分定数を決定すれば

$$u(x)=\frac{f_0}{2E}x(l-x) \quad\cdots\cdots(11)$$

となる。図―2.4には，$l=1, f_0=1, E=1$ の場合の厳密解を示す。

2.2.2　二次元浸透の基礎式

浸透流問題において，満足させなければならないのが，以下の三つの関係式と境界条件である。

(A)　連続条件

(B)　全水頭と動水勾配の関係式

(C)　ダルシー（Darcy）則

(D)　境界条件

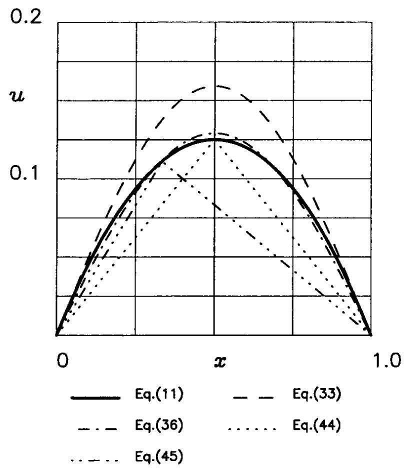
これらのもつ数学的な構造は，先述した一次元弾性棒の場合と同様であることに注意してほしい。

(A)　連続条件

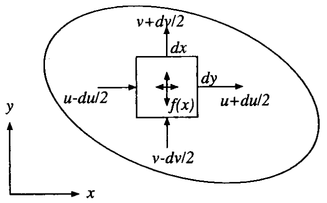
注2)　一般に適合条件とは，変位やひずみなどの変形量が満たさなければならない幾何学的条件のことを指す。

注3)　基本となる未知量を求めるためにその未知量のみで表現した方程式を支配方程式という。

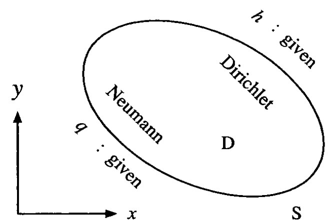
注4)　正確には応力成分ではなく，境界に作用する単位面積当たりの力を指し，応力ベクトルという。



図—2.4　直線弾性棒の変位



図—2.5　浸透流の連続条件



図—2.6　浸透問題の境界条件

いま，**図—2.5**のように (x, y) 平面内である飽和地盤の領域を考える。なお，間隙水ならびに土粒子はともに非圧縮性とする。この領域の各点に浸透水が流れているとし，そのx, y方向の単位面積（長さ）当たりの平均速度をそれぞれu, vとする。また，各点では単位時間，単位面積当たり質量fの水の湧出しがあるとする。このとき，点 (x, y) を中心とする横，縦dx, dyの微小な長方形をとり，そこでの浸透水の収支を考える。x方向に流れる速度により，この矩形内部から単位時間に

$$\rho\left\{-u\left(x-\frac{dx}{2}, y\right)+u\left(x+\frac{dx}{2}, y\right)\right\}dy \approx \rho\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy \quad\cdots\cdots(12)$$

だけの水量が流出し，y方向に流れる速度により

$$\rho\left\{-v\left(x, y-\frac{dy}{2}\right)+v\left(x, y+\frac{dy}{2}\right)\right\}dx \approx \rho\frac{\partial v}{\partial y}dx\,dy \quad\cdots\cdots(13)$$

だけの水量が流出する。ρは間隙水の密度である。また，この矩形には単位時間内に$f(x, y)\ dx\,dy$だけの水が湧き出る。間隙水と土粒子は非圧縮的なので，流出する水は湧き出る水と収支しなければならない。

$$\rho\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right\}=f \quad\cdots\cdots(14)$$

これは浸透水の質量保存則であるが，伝統的に「連続条件」あるいは「連続の式」と呼ぶ。また，力学の問題における釣合い条件に相当する。

(B)　全水頭と動水勾配の関係式

一般的な水の流れと同様に，土中水はある条件下で流れようとする。初学者には，しばしば「水圧差pがあるとき土中水は流れる」という誤解がある。「それではバケツの水はなぜ流れないのか」と反論されるであろう。バケツの底と表面では圧力差があるにもかかわらずバケツの水は静止している。一般に水の塊は表面に水圧を受けるとともに，その質量に応じて重力も受けている。両者の効果を合わせた全水頭hが浸透問題の基本量注5)となる。その定義は

$$h=\frac{p}{\rho g}+z \quad\cdots\cdots(15)$$

である。ここにzは任意の定点を基準とした水の高さ（位置水頭），gは重力の加速度である。全水頭は，先の弾性棒の場合の変位のように浸透問題における基本となる未知量である。2点間の全水頭の値に差があると水はその間で動き出そうとする。その差を局所的に表したものが，その勾配であって，いま考えている二次元問題では

$$i_x=\frac{\partial h}{\partial x},\quad i_y=\frac{\partial h}{\partial y} \quad\cdots\cdots(16)$$

のように2成分あることになる。これらを動水勾配という。これらはむろん，無次元量である。また，式(16)は力学の問題における適合条件に相当する。

(C)　ダルシー則

経験によれば浸透水の動きは慣性項を無視できるほど緩慢で，その速度は近似的に動水勾配に比例するといわれている。これをダルシー（Darcy）則という。また，その比例定数は透水係数kと呼ばれ，「速度」と同じ次元をもつ。透水係数を用いると，浸透水の速度は

$$u=-ki_x,\quad v=-ki_y \quad\cdots\cdots(17)$$

となる。注意すべきは負号が付くことである。つまり，間隙水は，全水頭の大きい領域から，全水頭の小さい領域に向かって流れる。式(17)は力学の問題における構成式に相当する。

ところで，ダルシー則に動水勾配の定義式(16)を代入すると，

$$u=-k\frac{\partial h}{\partial x},\quad v=-k\frac{\partial h}{\partial y} \quad\cdots\cdots(18)$$

のように浸透水の速度を全水頭で表すことができる。さらに，この結果を連続条件に代入すると，全水頭で表した連続の式：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{f}{k\rho}=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

が導かれる。したがって，二次元浸透問題の支配方程式は，2階の偏微分方程式となる。これは，ポアソン（Poisson）の方程式といわれる代表的な楕円型偏微分方程式である。また，これは力学の問題におけるナビアの式に相当する。楕円型の偏微分方程式の解を決定するには次に述べる境界条件が必要である。

(D)　境界条件

図—2.6のように，領域Dの境界Sの一部において，未知関数である全水頭hを与えるような境界条件をやはりディリクレ条件という。つまり，先述した弾性棒の

注5)　地下水の運動方程式において慣性項を無視し，圧力勾配項と自重項の和を空間積分したものが全水頭である。zの項は重力に起因する。

場合と同じく，未知関数そのものを境界で与えることをいう。一方，残りの境界で流出（あるいは流入量）を与える境界条件をやはりノイマン条件という。この特殊な場合が，「非排水条件」であってその条件が与えられた境界からの浸透水の出入りをまったく許さない場合である。一般にはその境界からの質量フラックス[注6] q は

$$q=-k\rho\left\{\frac{\partial h}{\partial x}n_x+\frac{\partial h}{\partial x}n_y\right\}=-k\rho\frac{\partial h}{\partial n} \quad \cdots\cdots(20)$$

と表される。したがって，ノイマン境界条件とはそこの境界において未知関数の法線微分 $\partial h/\partial n$ を与えることにほかならない。弾性棒のときにも述べたように，境界全体にわたってノイマン条件を任意に課することは許されない。なぜならここで考えているような浸透の場合には，領域内の湧出し量と境界全体からの流入量の総和は0でなくてはならないからである。

2.3　近似解とその意味

2.3.1　近似解の意味

一般に微分方程式と適切な境界条件が与えられたとき，それに一切の近似や仮定を設けず，主として積分演算を用いながら求められる解を解析解という。解析解のなかには，フーリエ級数や多項式展開のように無限項の和として表現されるものもある。先にあげた例題では，弾性係数 E や物体力 f が初等関数である場合には，式(11)のように解析解を求めることができる。しかし一次元問題でも，少し複雑な条件を伴ったりする場合や，二次元あるいは三次元の問題のほとんどの場合には，まず解析解は求められない。むしろ，求められるのが例外的である。そのような場合に近似的に解を求めるのであるが，そのとき，数値的に求められる近似解を数値解といい，それを求める方法を数値解法という。

さて，はたして近似解の「近似」とはどのような意味なのであろうか。じつは，それにはいろいろな答え方がある。さらにいえば，厳密解ですらその定義の仕方によっては，解が存在しなかったり，あるいは存在しても一つでないこともある。例えば，弾性係数 E や物体力 f が特異な関数である場合には，そのような問題が生じる。むしろ逆に，「どのように解析解を定義すれば，その解析解がただ一つ存在するか」という問いかけもありえる。まして近似解には，いろいろな定義があっても不思議ではなく，また，それにより近似解が異なることも当然である。ところで一般に解析解（厳密解）には種々の属性がある。例えば，

a.　境界条件を満足する，

b.　必要な階数だけ微分が可能である，

c.　支配方程式をいたるところ満足する，

などの性質を有している。これらはすべて，解析解であるための必要条件である。つまり，解析解であるならばこれらすべてを満足するはずである。近似解というのは，これらのうち，幾つかを弱くした条件を満足するものであるが，その弱くさせる方法はむろん一意的ではない。しかし多くの場合，a. のうちディリクレ条件は常に要求する。したがって，「支配方程式など無視して，ディリクレ条件のみを満たすものをすべて解と定義する」というのが最も広い近似解の定義と思われる。いうまでもなく，このように乱暴な宣言をすれば解は容易に求められるが，それにどのような意味があるかは，それを宣言する人の主観的な価値判断による。逆に狭い範囲で定義された近似解は求めにくいが，それだけ多くの価値を有している。詳しい議論はさておき，数値計算で求めた解がどのような意味での解であるかは，ある程度理解しておく必要がある。例えば，あとで述べる有限要素法による解は，a. のうちディリクレ条件を満たすものの，b. はまったく満足しないし，c. も弱い意味でのみ満足するような解である。

2.3.2　近似解の原型

微分方程式の解は一つのなめらかな関数[注7]である。関数を正確に表現するためには，無限の多くの点におけるその値を決定しなければならない。それは実際上，数値計算では不可能であるので，未知関数を有限の未知数で表現することを考える。簡単のため，棒の長さ $l=1$，そして式(6)で $E=1$ と仮定した微分方程式：

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+f(x)=0 \quad \cdots\cdots(21)$$

と斉次ディリクレ境界条件：

$$u(x=0)=0 \quad \cdots\cdots(22)$$

$$u(x=1)=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

をとりあげる。近似関数の一つの自然な表現は未知関数 $u(x)$ を以下のように有限個の異なる既知関数 $g_i(x)$ の線形和で表す方法である。

$$\tilde{u}(x)=\sum_{i=1}^{N}a_i g_i(x) \quad \cdots\cdots(24)$$

ここに，$g_i(x)\,(i=1, 2, \cdots, N)$ は，解 $u(x)$ と同じ斉次境界条件：

$$g_i(0)=g_i(1)=0 \quad \cdots\cdots(25)$$

を満たす N 個の既知のなめらかな関数である。この $g_i(x)$ の選び方により解の近似の度合が異なるかもしれないが，基本的には自由に選ぶことができる。また，個々の $g_i(x)$ が（斉次の）境界条件を満足することから，いかなる未知係数 a_i に対しても，近似関数 $\tilde{u}(x)$ はやはり斉次境界条件を満たす。もしも，非斉次のディリクレ境界条件が与えられている場合には，その非斉次の境界条件を満たす適当な既知関数 $g(x)$ を式(24)の右辺に加えて

$$\tilde{u}(x)=g(x)+\sum_{i=1}^{N}a_i g_i(x) \quad \cdots\cdots(26)$$

とすれば，やはり，いかなる未知係数 a_i に対しても，近似関数 $\tilde{u}(x)$ はその非斉次境界条件を満たす。ノイマ

注6)　一般に流体とともに流れる物理量をフラックスという。なお，水の流量は体積で計ることが多い。その場合は式(20)の ρ は不要である。

注7)　微分方程式に対応して必要な階数だけの導関数が連続であること。

ン条件の場合も同様にすればよい。未知関数 $u(x)$ の近似である式(24)や式(26)で重要なことは，未知関数 $u(x)$ 自体が N 個の未知数に置き換わっていることである。だから，いったんこのような近似式を用いれば，あとは何らかの方法で N 個の方程式を見つければよいことになる。以下で，その代表的な方法を述べる。なお，ここでは $g_i(x)$ のことを基底関数[注8)]と呼ぶことにする。

2.3.3 重み付き残差法

式(24)の $\tilde{u}(x)$ が厳密解であると仮定すると，このとき任意の関数 $v(x)$ に対して，

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2\tilde{u}(x)}{dx^2} + f(x) \right) v(x)\, dx = 0 \quad \cdots\cdots(27)$$

すなわち，

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d^2 g_i(x)}{dx^2} + f(x) \right) v(x)\, dx = 0 \quad \cdots\cdots(28)$$

が成立しなければならない。すなわち，解ならば各点ごとに式(21)を満たすことから，当然，上式の積分値は0でなければならない。つまり，この式は $\tilde{u}(x)$ が厳密解であるための一つの必要条件である。ただ，近似解は各点ごとで式(21)を満たすのは困難であるので，式(27)や(28)のように（重み付きの）平均的な意味で支配方程式を満たすことで我慢をする。いわば，方程式の誤差（残差）を重み付きの意味で0にしようとする方法で，これを重み付き残差法という。むろん，なるだけ多くの数の $v(x)$ について上式を満足すれば，より精度のいい近似解といえるし，わずかの数の $v(x)$ についてのみしか成立しないのであれば精度が悪いといえよう。このような意味で関数 $v(x)$ のことを試験関数と呼ぶことがある。ところでいま，近似解 $\tilde{u}(x)$ を決定するには，N 個の未知係数 a_i を決定すればよいのであるから，いろいろな $v(x)$ を N 個（$v_1(x), v_2(x), \cdots, v_N(x)$）選び，上式に代入して N 個の方程式を作成すれば a_i を決定する以下のような連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \int v_1(x) g_1''(x)\, dx & \cdots & \int v_1(x) g_N''(x)\, dx \\ \int v_2(x) g_1''(x)\, dx & \cdots & \int v_2(x) g_N''(x)\, dx \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int v_N(x) g_1''(x)\, dx & \cdots & \int v_N(x) g_N''(x)\, dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_N \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\int v_1(x) f(x)\, dx \\ -\int v_2(x) f(x)\, dx \\ \cdots \\ -\int v_N(x) f(x)\, dx \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(29)$$

なお，$g''(x)$ は関数 $g(x)$ の2階微分を指す。これを解けば式(24)より $\tilde{u}(x)$ が得られる。できれば N 個以上の $v(x)$ に対しても，上式は満足すべきではあるが，一般にはそれは不可能である。つまり，本当の解 $u(x)$ を有限個の自由度で近似していることの帰結である。したがって，いい近似解を得るには，正解をうまく近似するような $g_i(x)$ を選ぶように努力しなければならない。ここでは，$g_i(x)$ として2階微分可能な関数を仮定しているから，近似解は境界条件のほかに，微分可能性も満たしている。ただ，支配方程式(21)を厳密に満足しているのではなく，式(27)あるいは(28)のように領域で平均的に満たしているにすぎない。したがって，支配方程式の満足度が弱められている。

［例題1］

式(24)において $N=1$ として

$$g_1(x) = \sin(\pi x) \quad \cdots\cdots(30)$$

を採用する。これは明らかに境界条件である式(25)を満たす。任意に選ぶことのできる一つの試験関数を

$$v_1(x) = 1 \quad \cdots\cdots(31)$$

とすれば，未知数 a_1 に関する方程式(29)は

$$-a_1\pi^2 \int_0^1 \sin \pi x\, dx = -\int_0^1 f(x)\, dx \quad \cdots\cdots(32)$$

となる。さらに $f(x)=1$ とすれば，$a_1 = 1/2\pi$ が得られる。よってこの場合の近似解は

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(\pi x) \quad \cdots\cdots(33)$$

となる。式(11)で表される厳密解と比較すると**図―2.4**に示すようになる。

2.3.4 ガラーキン法

重み付き残差法の基本式(27)あるいは(28)において $v_i(x) = g_i(x)$ とする方法をガラーキン法という。つまり，解 $u(x)$ を近似するのに用いた関数（基底関数）$g_i(x)$ そのものを試験関数とするような重み付き残差法である。式(29)から明らかなように，解くべき連立方程式は以下のようである。

$$\begin{bmatrix} \int g_1(x) g_1''(x)\, dx & \cdots & \int g_1(x) g_N''(x)\, dx \\ \int g_2(x) g_1''(x)\, dx & \cdots & \int g_2(x) g_N''(x)\, dx \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int g_N(x) g_1''(x)\, dx & \cdots & \int g_N(x) g_N''(x)\, dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_N \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\int g_1(x) f(x)\, dx \\ -\int g_2(x) f(x)\, dx \\ \cdots \\ -\int g_N(x) f(x)\, dx \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(34)$$

こうして左辺の係数行列と右辺の定数ベクトルはすべて既知関数の積分として計算されるので，これより未知量である $a_i (i=1, 2, \cdots, N)$ が求められる。

［例題2］

先の例題1をガラーキン法で解けば

$$-a_1\pi^2 \int_0^1 \sin^2(\pi x)\, dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\, dx \quad \cdots\cdots(35)$$

より，a_1 が得られ，近似解は

$$\tilde{u}(x) \approx \frac{4}{\pi^3} \sin(\pi x) \quad \cdots\cdots(36)$$

注8)　座標軸のような働きをするので座標関数と呼ぶこともある。

となる。この近似解も図―2.4に示す。この問題の場合には，例題1における近似解よりもガラーキン法による近似解の方が精度がよい。

2.3.5　弱形式とそれに基づくガラーキン法

重み付き残差法の基本式(27)を部分積分すれば，

$$\left[\frac{d\tilde{u}}{dx}v(x)\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dv}{dx}-f(x)v(x)\right)dx=0 \quad \cdots(37)$$

を得る。式(27)を要求する代わりに式(37)を要求することにしよう。さらにディリクレ境界である両端で導関数 $d\tilde{u}/dx$ の値が現れないようにするため，試験関数 $v(x)$ については $v(0)=v(1)=0$ を満たすものだけを採用する[注9]。両者でどのような違いがあるだろうか。一見，式(37)は式(27)と同じ意味をもつように思われるが，一つの大きな違いがある。すなわち，式(27)では関数 $\tilde{u}(x)$ に対し，2階までの微分可能性が要求されているが，上式自体は1階微分の可能性[注10]だけで十分意味をもつ。その意味で弱い要求になっている。またその分，関数 $v(x)$ のほうは1階微分できるものに限られる。つまり，解の近似関数 $\tilde{u}(x)$ の範囲が広くなったうえ，さらに試験関数の範囲が狭くなったのだから近似解の定義はずいぶん弱くなったといえる。このような意味で，式(37)を式(21)の弱形式という。また，仮想仕事の式ともいわれている。

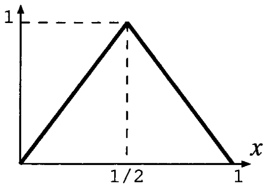
さて，この弱形式の試験関数 $v(x)$ に，やはり $u(x)$ を近似するのに用いた $g_i(x)$ を代入することもできる(これを単にガラーキン法という場合もある)。上述の $v(x)$ に関する制約条件から式(37)の左辺第1項は0となるので，

$$\sum_{i=1}^{N}a_i\int_0^1 g_j'(x)g_i'(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 g_j(x)f(x)\,dx \quad (j=1,2,\cdots,N) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

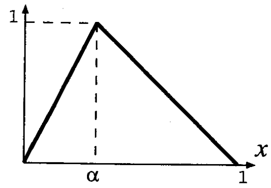
なる形の代数方程式を得る。ここで g' は g の1階微分を表す。あるいは

$$\begin{bmatrix} \int g_1'(x)g_1'(x)\,dx & \cdots & \int g_1'(x)g_N'(x)\,dx \\ \int g_2'(x)g_1'(x)\,dx & \cdots & \int g_2'(x)g_N'(x)\,dx \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int g_N'(x)g_1'(x)\,dx & \cdots & \int g_N'(x)g_N'(x)\,dx \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_N \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} \int g_1(x)f(x)\,dx \\ \int g_2(x)f(x)\,dx \\ \cdots \\ \int g_N(x)f(x)\,dx \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$



図―2.7　基底関数 $g_1(x)$（その1）



図―2.8　基底関数 $g_1(x)$（その2）

となる。未知数 a_i の係数行列を

$$K=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

とすれば，

$$K_{ij}=\int_0^1 g_i'(x)g_j'(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

であり，あきらかに係数行列 K は対称である。なお，例題2にこの節での方法を適用したとしても，結果は同じである。なぜならこの場合，基底関数が十分滑らかであって，式(27)と式(37)とは等価[注11]であるからである。そこで，次の例題では1階微分が不連続であるような基底関数を用いた場合，どのような結果となるのか調べてみる。

[例題3]

先述した例題1を（$N=1$ とする）弱形式に基づくガラーキン法により解いてみよう。近似に用いる基底関数として図―2.7に示す折れ線関数 $g_1(x)$ を採用する。この1階微分は $x=1/2$ で不連続であるが，積分は可能であり，式(39)に代入することができる。

$$K_{11}=\int_0^1\{g_1'(x)\}^2\,dx=4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

$$\int_0^1 g_1(x)\,dx=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

であるから，$f(x)=1$ を考慮すれば $a_1=1/8$ となる。したがって，近似解は

$$\tilde{u}(x)=\frac{1}{8}g_1(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

である。この場合の近似解も図―2.4に示すが，$x=1/2$ ではなぜか厳密解と一致する。なお，図―2.8に示す基底関数を用いても

$$\tilde{u}(x)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}g_1(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

となって $x=\alpha$ では正解と一致する。図―2.4に $\alpha=1/3$ の場合を示す。これらはもはや一次元1自由度の有限要素法である。

（以下次号に続く）

（以下次号に続く）

注9)　斉次ノイマン境界においてはこの $v(x)$ に対する制約は不必要である。

注10)　厳密には区分的な滑らかさ。

注11)　$\tilde{u}(x)$ の1階微分が不連続ならば式(27)と式(37)は等価でない。