The Hokkaido Philosophical Society

フレーゲ的記号法と ルイス・キャロルのパラドクス

中　川　　　大

1　はじめに

われわれが論理学の教科書を開いて、ゲンツェン Gentzen, G.,1909-1945 に起源をもつ方式の記号法で、自然演繹を学ぶところを思い描いてみよう。その教科書では、推論の根拠となる命題と、推論によって引き出される命題とのあいだに水平線が引かれ、水平線のわきに、その推論が訴える推論規則が記されているはずである。たとえば、A と B とから $A\&B$ を導き出す推論は、水平線の上に「A」と「B」と書き、水平線の下に「$A\&B$」と書いて、さらに水平線のわきに（たとえば）「&-Intro」と記すことによって表現される。

$$\frac{A \quad B}{A\&B}\ \&\text{-intro}$$

また、$\neg\neg A$ から A を引き出す推論であれば、水平線の上に「$\neg\neg A$」と書き、水平線の下に「A」と書いて、水平線のわきに（たとえば）「Double Neg」と記すことによって表現される[(1)]。

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ \text{Double Neg}$$

さて、このような記号法は、いわば水平線が推論一般を象徴し、「&-Intro」とか「Double Neg」といった記号が推論の種類を区別することによって、連言導入則による推論や二重否定除去則による推論を、それぞれ区別して表現しているのだと、いちおうは考えることができる。しかし、この論文で示唆したいのは、こうした記号法をそのように分節化して把握するのは、かならずし

NII-Electronic Library Service

The Hokkaido Philosophical Society

も適切なことではないのではないか、ということである。あるいは、すくなくとも、そのような仕方とは違う仕方で、こうした記号法を了解することが可能なのではないか、ということである。

さて、ゴットロープ・フレーゲ **Gottlob Frege**, 1848-1925 の、いわゆる概念記法は、ゲンツェン式の記号法の（少し離れた）先祖にあたるとも言えないことはない。しかし、それにもかかわらず、フレーゲの概念記法は、推論にかんする記号法について、われわれがいましがた見たたぐいの了解の仕方を拒否する。つまり、ゲンツェンの流儀の記号法では、推論一般の標識と推論の種類の標識とに、その推論記号を分節化することが、すくなくとも可能であるのに対して、フレーゲの記号法では、そのような分節化はできないのである。

こうした事情を、これからわれわれは、演繹的推論にかんするルイス・キャロルのパラドクスを検討することを通じて見ていく。すなわち、さきに見た仕方で了解されたゲンツェン式記号法はルイス・キャロルのパラドクスを呼び込むけれども、フレーゲ的記号法に準拠した了解の仕方でゲンツェン式記号法を了解したばあいには、ルイス・キャロルのパラドクスは、すくなくとも直截的な仕方では生じない。つまり、フレーゲ的記号法は、このパラドクスに対して、なにかしら免疫的なものを有しているように見えるのである。

以下では、次のように議論を進めたい。まず、ルイス・キャロルのパラドクスとはどんなものであったかを復習し、それがゲンツェン流の記号法の上でも再現可能であることを確認する。続いて、このパラドクスが、フレーゲ的記号法のなかでは再現が困難になることを見る。そのさいには、ゲンツェン式の記号法も、それがフレーゲ的記号法に準じた仕方で了解されるときには、やはりパラドクスに耐性をもつことに注意を促す。最後に、フレーゲ的記号法の特性について吟味するためのひとつの材料として、ウィトゲンシュタイン **Wittgenstein, L.**, 1889-1951 が、『論理哲学論考』(**Wittgenstein** [1922])のなかで（ラッセルのパラドクスに関連して）示唆している、記号法についての彼の見解をとりあげる。

NII-Electronic Library Service

The Hokkaido Philosophical Society

2　ルイス・キャロルのパラドクス

ルイス・キャロル Lewis Carroll（チャールズ・ラトウィジ・ドジソン Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898）は、1894年の小論――著者お得意の小話の形式をとっている――「亀がアキレスに言ったこと」(Carroll[1894])で、推論の必然性をめぐるある逆説を提示した。われわれは、ルイス・キャロルの諧謔的な修辞をまったく取り除いて、議論の骨格だけを書き抜くことにしよう。それは次のようなお話である。

次のような文の系列がある。

(A) 同一のものに等しい二つのものは互いに等しい。
(B) この三角形の二つの辺は同一のものに等しい。
(Z) この三角形の二つの辺は互いに等しい。

アキレスは、AとBとを真であると受け入れたときには、Zもまた真であると受け入れることになるはずだと主張する。それに対して亀は、AとBとを受け入れても、なおZを真として受け入れることの必然性を認めない。アキレスは、なんとかして亀にZが真であると認めさせようとする。

そのためにアキレスは、亀に次の文を真であると受け入れさせる。

(C) AとBとが真ならば、Zも真であるのでなければならない。

しかし頑固な亀は、AとBとCとが真であることを認めても、なおZが真であるとは認めない。アキレスは、次の文を亀に受け入れさせて、Zが真であることをも認めさせようとする。

(D) AとBとCとが真ならば、Zも真であるのでなければならない。

NII-Electronic Library Service

しかし亀は、AとBとCとDとを真であるとして受け入れても、なおZを真であるとして受け入れることを拒否する。というわけで、不運なアキレスは、次のような無限に後退する系列を書き続け、ついにZに到達することはない。

(A) 同一のものに等しい二つのものは互いに等しい。
(B) この三角形の二つの辺は同一のものに等しい。
(C) AとBとが真ならば、Zも真であるのでなければならない。
(D) AとBとCとが真ならば、Zも真であるのでなければならない。

⋮

(Z) この三角形の二つの辺は互いに等しい。

さて、このルイス・キャロルのアキレスがもしも、前提から結論への移行を水平線で表わす記号法を使う習慣をもっていたとしたら、はたして彼はどのような図を描いただろうか。ただしここでは、A と $A \to B$ とから B を導く推論（モドゥス・ポネンス）を素材とすることにしよう。そのときたとえば、次のような図が描かれるはずである。

$$\frac{A \quad A \to B \quad \dfrac{A \quad A \to B}{B} \quad \cdots}{B}$$

B という結論が導かれるためには、無限個の前提が承認されるのでなければならない。すなわち、ルイス・キャロルの原典と同様の背進が起こっている。

もっとも、ルイス・キャロルの議論では、系列を作っているのはすべて文であったのに対して、この図では、水平線の上方に、水平線を含む図がさらに現われている。そして、水平線を含む図が象徴するのは、文ではなくて推論にほかならない。したがって、この図は原典の議論に正確には対応していない。

アキレスがこの図をルイス・キャロルの議論に近づけるためには、たとえば、水平線の上に図の代わりに、$A \to ((A \to B) \to B)$ という文を書けばよいかもしれない。

NII-Electronic Library Service

$$\frac{A \quad A \to B \quad A \to ((A \to B) \to B) \quad \cdots}{B}$$

そして、この図においても、やはり無限個の前提が要求され、パラドクスは再現される。

しかしながら、原典のCやDは、たしかに文の形で書かれてはいるけれども、われわれの直観は、文ではなくむしろ推論規則こそがそこで提示されているのだと受け取る。そして、推論規則は、文とははっきり区別して表示されるのでなければならない。

われわれはそのために、推論が訴えている規則を推論図の右横に示すことにする。その規則は、A と $A \to B$ とから B を導くものにほかならないから、次のようになる。

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\frac{A \quad A \to B}{B}$$

ただし、じっさいには訴えられているのは推論の形式でしかないのだから、文字を変えておく。そうすると、次のような図になる(2)。

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\frac{\Phi \quad \Phi \to \Psi}{\Psi}$$

さて、この図では、先のルイス・キャロルの議論そのままの形では、無限後退は起こらない。したがって、ルイス・キャロルのパラドクスが生じるのは、（文の形で表わされる）論理法則と（文の形では表わしえない）推論規則とを混同したためであり、両者を峻別すればパラドクスは現われない、といちおうは述べることができる(3)。こうしてアキレスは、ゲンツェン式の記号法を用いることによって、パラドクスを回避できるように見える。

しかしながら、亀とアキレスがもしもこの図を、A と $A \to B$ と推論規則

NII-Electronic Library Service

$$\frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$$

とが受け入れられたときには、A と $A \rightarrow B$ とから B への移行が必然化されるのだ、という意味に了解したとしたならば、あまり事態が改善されたことにはならない。なぜなら、そのとき亀は、その移行が必然的であるとはまだ認められない、とまたしても主張して、アキレスに次の図を描かせることができるからである。

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}\ \frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}\ \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}\ \frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$$

あきらかにこれは無限背進の入り口にほかならない[4]。

さて、論理法則と推論規則を峻別した図を描くことは、パラドクスを回避するための、おそらく順当な方針ではあろう。しかし、その図をいまわれわれがしたような仕方で了解しては、台無しになってしまう。つまり、単に論理法則と推論規則が区別された図を描くだけでは不十分なのである。そのようにして描かれた図を、さらに、いまわれわれがしたのとは、別の仕方で理解しなければならない。そのいま一つの理解の仕方を把握するために、われわれはフレーゲの記号法について検討することになる。

3　フレーゲ的記号法

ルイス・キャロルの小論が発表される前年、フレーゲは、彼の主著『算術の基本法則』(Frege [1893])の第一巻を出版している。この書物でフレーゲは、推論の前提と結論とのあいだにおかれる記号を、移行記号（Zwischenzeichen）と称している。1879年の『概念記法』(Frege [1879])では、この移行記号は一種類しかない。それが水平の直線であり、つまり、ゲンツェン式の記号法に引き継がれているとおぼしきものである。しかし、『算術の基本法則』では、(フレーゲのいわゆる二重推理、および一重コロンないし二重コロ

NII-Electronic Library Service

The Hokkaido Philosophical Society

ンの組み合わせによって生まれる数多くの変種を無視しても、）五つの移行記号が採用されている。

別の言い方をすれば、『概念記法』では、モドゥス・ポネンスというただひとつの推論規則しか導入されていなかったのに対して、『算術の基本法則』では、（長い推論図を描くために、冗長さを避けるべく、）すくなくとも五つの推論規則が容認されている。その五つの推論規則と、それらに与えられる移行記号とを、ここで確認しておこう。

$A \to B$とAとからBを導く推論（第一推論様式、モドゥス・ポネンス）には、「———」という記号が与えられる。$A \to B$と$B \to C$とから$A \to C$を導く推論（派生的推論様式、仮言三段論法）に与えられるのは、「－－－」という記号である。$A \to B$から$\neg B \to \neg A$を導く推論（対偶）に与えられる記号は、「╳」である。$A \to (\neg B \to (C \to D))$と$C \to (B \to (\neg E \to D))$とから$A \to (C \to (\neg E \to D))$を導く推論（第三推論様式）には、「・－・－・－・」という記号が与えられる。Faから$\forall x Fx$を導く推論（「ラテン文字からドイツ文字への移行」——この名称はもちろん、全称量化に相当する操作を表わすためにドイツ文字を用いるフレーゲの記号法に由来する——）に与えられるのは、「‿」という移行記号である(5)。

さて、この記号法を使って、前節と同様のやり方で、ルイス・キャロルのパラドクスを再現することができるだろうか。一見、まったく同じことができるように思われるかもしれない。すなわち、次のように図を描けば、対偶変換を表わす推論図について、前節と同様の後退がはじまるように思えるかもしれない。

$$\begin{array}{ccc} A \to B & \qquad & \Phi \to \Psi \\ \times & & \times \\ \neg B \to \neg A & & \neg \Psi \to \neg \Phi \end{array}$$

しかし、この図はナンセンスである。というのも、前節の図でギリシャ文字を使って右側に描かれたパターンは、左側の推論が右側のパターンで示された形式（つまりモドゥス・ポネンスの形式）をもっていることを指示するためのものだったからである。ところが、フレーゲ的な記号法では、この推論が対偶

NII-Electronic Library Service

The Hokkaido Philosophical Society

変換であることは、「╳」という記号によって指示される。したがって、この推論が対偶変換の形式をもつことを示すために、右側にパターンを描くことには意味がない。さらに、右側のパターンが対偶変換の形式を示すものであるとするならば、右側のパターンのなかに現われる「╳」は、いったいなにを表わす記号だということになるのか。このパターン全体が対偶変換の形式に対応しているのだとすれば、その部分をなす「╳」もまた対偶変換に対応しているというのは、いかにも馬鹿げたことのように思われる。かくして、この図は二重の意味でナンセンスだと言わなければならない。

この図に意味をもたせるためには、右側のパターンの「╳」のかわりに、たとえば、「$」を、推論一般を象徴する記号として、新たに導入しなければならないだろう（水平線は使わないことにしよう。水平線は、すでにモドゥス・ポネンスの記号として用いられているのだから)。そうすれば、部分が全体と同じである、ということはなくなるはずである。そのような記号を用いたときには、次の図が描かれる。

$$\begin{array}{ccc} A \to B & & \Phi \to \Psi \\ \times & & \$ \\ \neg B \to \neg A & & \neg\Psi \to \neg\Phi \end{array}$$

しかし、この新しい図もまた意味不明である。そもそも右側のパターンは、それを受け入れることによって、左側の推論の結論を受け入れざるをえなくなるようなものとして描かれたはずだった。そして、このパターンがそのような役割を果たすことは、右側のパターンが左側の推論図と同じ形式を有していること以外によっては望まれえない。けれども、この新しい図では、左側の図と右側の図とは、形式が異なっている。移行記号が異なるからである。

この新しい図を意味のあるものにするためには、「右側のパターンではともかくも、移行記号の上の形式の文が認められるときには必ず下の形式の文も認められるということが一般に示されているのだからして、左側の図でいかなる種類の推論がおこなわれているにせよ、その種類にかかわりなく、その推論が必然化されるのだ」、とこの図を解釈するしかないように思われる。

NII-Electronic Library Service

The Hokkaido Philosophical Society

しかし、そのばあいには、左側の図に現われている「╳」という記号は、じつは特定の種類の推論を表わしていないということになる。右側のパターンで必然化されるのは、$\Phi \rightarrow \Psi$ という形の文から$\neg\Phi \rightarrow \neg\Psi$ という形の文への「推論」なのであって、$\Phi \rightarrow \Psi$ という形の文から$\neg\Phi \rightarrow \neg\Psi$ という形の文への「対偶変換」ではないからである。だから、問題の図はむしろ、次のように描かれるべきだったのである。

$$\begin{array}{cc} A \rightarrow B & \Phi \rightarrow \Psi \\ \$ & \$ \\ \neg B \rightarrow \neg A & \neg\Psi \rightarrow \neg\Phi \end{array}$$

しかしこれでは、フレーゲの記号法はどこかに消えてなくなってしまう。そういうわけで、フレーゲ的記号法上ではルイス・キャロル的後退が始まらず、いっぽう、ルイス・キャロル的後退を起こそうとすると、フレーゲ的記号が失われてしまう。つまるところ、フレーゲ的な記号法においては、ルイス・キャロルのパラドクスを再現することが困難である。ルイス・キャロルの小話に帰って述べれば、もしもアキレスがフレーゲ的記号を用いてさえいれば、彼は亀に最初の推論を示し続け、「これ以上書き加えることはできない。それはナンセンスになってしまうから」と、亀の要求を却下することができたのである[6]。

このことは、前節での水平線を用いた記号法も、それがフレーゲ的記号法に準ずる仕方で解釈されるならば、ルイス・キャロル的背進を招かない、ということを示唆している。すなわち、

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \; \frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$$

という記号が与えられたとき、これは、A と$A \rightarrow B$ という二つの文と

$$\frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$$

という推論規則を受け入れることが、B という文を受け入れることを必然化す

NII-Electronic Library Service

る、というぐあいに分節化されてはならないのであって、この記号はむしろ、Aと$A\rightarrow B$という二つの前提とBという結論とのあいだに、

$$\underline{\qquad\qquad}\ \frac{\Phi \quad \Phi\rightarrow\Psi}{\Psi}$$

という移行記号が置かれている、というぐあいに了解されるべきなのである。

この了解においては、推論図の右側に現われる水平線は、モドゥス・ポネンスを象徴するものではありえない。モドゥス・ポネンスは、上の図全体によって表わされるものであり、右側に現われる水平線は、この図の部分をなすものでしかないからである。

現代の論理学で、移行記号にあたるものが現われるばあいにも、同様に考えることができるだろう。つまり、水平線のわきに推論規則を表わす符丁「&-Intro」とか「Double Neg」が記されるようなときのことである。このときにも、水平線の上におかれる文と、水平線のわきにおかれる符丁が表わす規則とを受け入れたときには、水平線の下におかれる文を受け入れることが必然化される、とこの推論図を分節化すると、例の後退が始まる。そうではなく、水平線と符丁とをまとめて一つの記号として考えれば、後退は生じない。だから、そのように了解することは、現代風の推論図の記号を、いわばフレーゲ的移行記号の正嫡として了解することになる[7]。

4　『論理哲学論考』の記号論

さて、幸運にもフレーゲを読んでいたアキレスは、「それに答えようとしてもナンセンスにしかならない」と亀に応じることができた。このアキレスの答え方は、「語りえないこと」を語ろうとしてはならないという、『論理哲学論考』のウィトゲンシュタインの戒律をわれわれに想起させるものである。この論点を敷衍する代わりに、われわれは、『論理哲学論考』で示唆されている、記号法についてのある見解に言及することで、この論文の結びとしたい。

われわれがさきに確認したように、次の推論図における右側の水平線は、

NII-Electronic Library Service

（フレーゲ的記号法に準拠して解釈するならば、）モドゥス・ポネンスを表現するものではありえない。

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad \frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$$

この（非フレーゲ的な解釈をも許容しうる）記号法においては、したがって、水平線のはたす役割は、それがとる位置によって別のものとなりうる。この観点は、『論理哲学論考』3.333での次の指摘を思い起こさせる。

関数$F(fx)$が自分自身のアーギュメントでありうると仮定しよう。そのとき「$F(F(fx))$」という命題が存在することになる。そして、外側の関数Fと内側の関数Fとは異なる意味をもつことになる。なぜなら、内側の関数は$\phi(fx)$という形式をもち、外側の関数は$\psi(\phi(fx))$という形式をもつからである。二つの関数に共通するものは文字「F」しかなく、文字はそれだけではなにも表示しない。

二階の関数と三階の関数は、その形式が異なり、したがって同一の関数ではありえない。にもかかわらず、それらを同一の文字で表わし、一般的に関数として把握することによって、自分自身をアーギュメントとする関数なるものを、われわれは錯視する。ウィトゲンシュタインによれば、そのような錯視を防ぐような記号法の考案によってこそ、ラッセルのパラドクスは回避される。

さて、前節までの議論でわれわれが見てきたのは、次のようなことであった。ある文集合Γを受け入れることがある文αを受け入れることを必然的なこととする、たとえばR_1という推論規則と、ΓとR_1とを受け入れることがαを受け入れることを必然的なこととする、たとえばR_2という推論規則とは、別の推論規則でなければならない。にもかかわらず、それらの規則に従う移行を、同一の（たとえば水平線という）記号で表わし、一般的な推論なるものを錯視することによって、われわれはルイス・キャロルのパラドクスに導かれる。だ

NII-Electronic Library Service

から、そのような錯視が起こらないような記号法が案出されるのでなければならない。

このように考えを進めていったときに、われわれは、ラッセルのパラドクスとルイス・キャロルのパラドクスのあいだに、ある種の平行関係を認めることができる。そして、ウィトゲンシュタインが適切な記号法を採用することによって、ラッセルのパラドクスを回避するであろう仕方は、われわれのアキレスがフレーゲ的記号法を用いてルイス・キャロルのパラドクスを回避する仕方と、見逃しえない共通性を有するのである。

註

(1) 正確には、これらの推論図は、すでに与えられた証明から新たな証明を構成する手続きを表現するものでなければならない。したがって、上の図の「A」、「B」や下の図の「$\neg\neg A$」には、それが所与の証明の最後の式であることを示す記号が加えられるのが普通である。しかし、以下の議論にとっては、それは本質的でないので、ここで与えた図でわれわれは満足することにしよう。

(2) AやBが複雑な式で、左側の推論図がどのような形式をしているのか、一瞥しただけでは分からないようなばあいを想定すれば、右側の図を書き出すことに、実質的な意味あいがあることに納得できるだろう。

(3) Cf. 大森[1984], 343頁以下。

(4) 野矢[1999], 134-137頁の議論も同様の趣旨のことを述べていると思われる。

(5) Frege[1893], S. 25-34、邦訳89-114頁。

(6) つまるところ、亀の口はふさがれなければならない。入不二[2001] は、「亀の要求が始まってしまう限りは、パラドクスは発生するし、パラドクスがそもそも発生しない場所とは、亀の要求が立ち上がる以前にのみある」(103頁) と述べている。

(7) 蛇足ながら、次のことも確認しておくべきだろう。

『算術の基本法則』の移行記号について、これまでのように考えることが多少とも正当なことであり、しかも『概念記法』の記号法と『算術の基本法則』の記号法とに連続性が想定されるのであるとすれば、『概念記法』の水平線についても、それは推論一般を象徴しているのだと考えるべきではない。次のように考えたくなるかもしれない。『概念記法』の水平線は推論一般を象徴しているのであり、ただ、『概念記法』においてはたまたま推論規則がモドゥス・ポネンスしかないので、けっきょくのところ水平線がモドゥス・ポネンスを指示することになる、と。しかし、そのように考えることは、ルイス・キャロル的なパラドクスに道を

NII-Electronic Library Service

The Hokkaido Philosophical Society

開くことになる。パラドクスを封じるためには、『概念記法』においても、水平線は、『算術の基本法則』と同様に、モドゥス・ポネンスという特定の種類の推論を指示するために採用されている、と理解するのでなければならない。

参照文献

Carroll, Lewis［1894］, "What the Tortoise Said to Achilles", pp. 1225-1230 in *The Complete Works of Lewis Carroll*, 1976, Vintage Books. Orig. in *Mind* 4, pp. 278-280.（柳瀬尚紀訳「亀がアキレスに言ったこと」、L・キャロル著、柳瀬尚紀編訳『不思議の国の論理学』、1977年、朝日出版社、17-24頁所収。）

Frege, Gottlob［1879］, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, in Frege, G., *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, hrsg. von Ignacio Angelelli, 1988, Olms.（藤村龍雄訳『概念記法』、藤村龍雄編『フレーゲ著作集１　概念記法』、1999年、勁草書房、１-127頁所収。）

Frege, Gottlob［1893］, *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet von G. Frege*, 1966, Olms.（野本和幸・横田榮一・金子洋之訳『フレーゲ著作集３　算術の基本法則』、野本和幸編、2000年、勁草書房。）

入不二基義［2001］,『相対主義の極北』、2001年、春秋社。

野矢茂樹［1999］,『哲学・航海日誌』、1999年、春秋社。

大森荘蔵［1984］,「飯田氏に答えて」、野家啓一編『哲学の迷路 大森哲学 批判と応答』、1984年、産業図書、340-347頁所収。

Wittgenstein, Ludwig［1922］, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1983, Routledge & Kegan Paul.（奥雅博訳『論理哲学論考』、『ウィトゲンシュタイン全集１』、1975年、大修館書店、１-120頁所収。）

NII-Electronic Library Service