（昭和 62 年 11 月　日本造船学会秋季講演会において講演）

ペナルティ関数法による動的摩擦接触問題の有限要素解析

—最適なペナルティ数に関する考察および摩擦振動現象の解析—

正員　鈴　木　規　之*　　正員　都　井　　裕**

Finite Element Analysis of Dynamic Frictional Contact Problems by Using the Penalty Function Method

—Consideration on the Penalty Numbers and its Application to the Friction-Excited Vibration Problem—

by Noriyuki Suzuki, *Member*　Yutaka Toi, *Member*

Summary

In this paper the extended penalty function approach to dynamic contact problems recently proposed by Asano is further discussed. The equation of motion, in which velocities as well as displacements are constrained by the physical consideration, coincides with the one based on the virtual work principle given by Asano. The optimal penalty numbers in this approach are discussed by using a simple two-element model. The obtained results are applied to the finite element analysis of contact-impact problem of two elastic rods and the validity of the present method is confirmed through the comparison of the numerical results with the exact solution based on the one-dimensional wave propagation theory. The present method is also applied to the friction-excited vibration of a two-dimensional elastic block on a sliding belt, and it is shown that the kinematic coefficient of friction can be lower than the static one in the complete system even when they are assumed to be equal to each other on the interface between the block and the belt.

1　序

歯車，軸受などの機械要素，切削など機械加工，また船舶，海洋構造物の衝突など工学の多くの分野において接触，摩擦は不可避な重要な問題である。そうした中で静的な接触問題は古典的なヘルツの接触論に始まり今日の数値計算法に至るまで数多くの研究がなされてきた。

しかし接触領域が未知の問題，あるいは大きなすべりを伴う場合，また粒状体の問題などまだ多くの問題が残され，さらに動的な接触問題まで含めると，数値計算においてもその方法論が完全に確立されたとはいいがたい。

接触問題の数値解法には，ラグランジュの未定乗数法によるもの[1]，ペナルティ関数法を用いたもの[2),3]，変数の直接消去によるもの[4)~6]など多くの手法がある[7),8]。ペナルティ関数法は，接触により自由度数が変化せず，接触した節点間に剛性を直接付加するという手法であるため，コーディングが比較的容易であり，特に動的な接触問題など接触，非接触を繰り返す複雑な系の挙動を解析するのに適している。ここではその簡易さ，物理的意味の明確さなどから，ペナルティ関数法に着目し，動的な接触問題に対して適用することを考える。

ペナルティ関数法においては，接触点における変位の連続性を保持するための処罰項が導入されるが，これは接触点間にその相対変位に抵抗する人工的なばねを挿入することに相当する。変位の連続性の充足度を高めるためには，このばね定数（ペナルティ数）として非常に大きい値が仮定されるため，系の一部に相対的に高剛性の部分が存在することになり，高次振動モードの発生などの数値的な問題を生ずる。そのため接触の取扱いにペナルティ関数を用いた動的解析の汎用コードでは，計算効率の観点から通常系の剛性と同程度のペナルティ数を仮定することが多く，その結果接触要素間ではいわゆる大きな「くいこみ」が発生する場合がある[9]。

* 東京大学大学院
** 東京大学生産技術研究所

この問題に対処するための一手法として，すなわち剛性の高いばねを挿入したことにより発生する高次振動を抑制する立場から，浅野は接触力を各種ペナルティ数と接触２物体間の接触変位差，速度差，加速度差との積の和として表現することにより，変位，速度，加速度の連続性に関する付帯条件をすべて仮想仕事の原理に導入している[2]。動的な問題においても，数学的に独立な拘束条件としては変位の連続条件のみで十分であるが，変位の連続性のみを考慮してペナルティ関数法による数値解析を行うと，速度あるいは加速度の連続性に対して大きな誤差を生じ，これが物理的に無意味な高次振動モードとして出現していることを考えれば，速度あるいは加速度に対して数値的な拘束条件を課すことは有効な処置と考えられる。

ここで，こうした高次振動を物理的に抑制するという観点に立てば，高次の固有振動数を下げるための対策として，高剛性の部分にマスを付加する，あるいは高次振動を吸収するためのダッシュポットを挿入してやるといった手段が考えられる。そこで本論文では，こうした物理的な認識に基づき，変位に対する拘束条件(連続条件)をポテンシャルエネルギー関数の処罰項として，また速度に対する拘束条件（連続条件）を運動エネルギー，散逸エネルギーの各エネルギー関数の処罰項として導入することにより，先に浅野により導かれた手法と同様の結果が導かれることを示し，次に単純な１次元２要素モデルを用いて適切なペナルティ数の設定に関する考察を行う。

本手法を有限要素法に適用した数値例として，はじめに弾性棒の縦衝突問題を取上げ，１次元波動伝播理論を用いた接触力に対する理論解との比較を行うことにより，接触による誤差，あるいは離散化誤差の検討を行い，本手法の有効性を示す。最後に摩擦を考慮した動的接触問題として，定速で移動するベルト上の弾性ブロックの運動を解析し，局所的には「動摩擦係数＝静止摩擦係数」と仮定した場合でも，ブロックの変形あるいは接触面に垂直な方向の運動を考慮することにより，ブロック全体の挙動としては「動摩擦係数≦静止摩擦係数」となり得ることを数値実験により示す。

２ 定　式　化

2.1 変位の連続性のみを考慮した場合の問題点

動的接触問題において，接触点の変位の連続性のみを考慮したペナルティ関数法を用いた解析を行うと，速度および加速度成分の連続性に甚大な誤差を生じ，高次振動の発生など数値的な問題が起こる。ここでは Fig. 1 に示すような単純な１次元２要素モデルを用いて，変位の連続性を十分に満足させるために大きなペナルティ数を

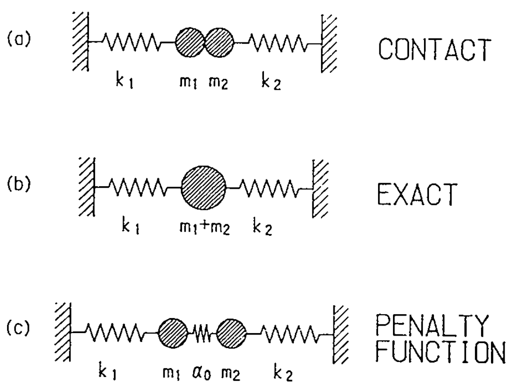

Fig. 1 Illustration of two elements in contact in the conventional penalty function method

仮定することにより，高次の振動が発生することを定性的に説明する。

Fig. 1 (a) に示すような端部にそれぞれ集中質量 m_1, m_2 を持った二つのばね k_1, k_2 が接触して一体になった状態を考える。完全に一体となった正解の系 Fig. 1 (b) の運動方程式は，

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+(k_1+k_2)x=0 \qquad (1)$$

であり，固有振動数 ω_{exact} は，

$$\omega^2{}_{\mathrm{exact}}=\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2} \qquad (2)$$

となる。

一方，ペナルティ関数法により変位の連続性のみを考慮した近似的な系 Fig. 1(c) の運動方程式は，ペナルティ数を α_0 として，

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+\alpha_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & k_2+\alpha_0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

となり，１次，２次固有角振動数を ω_1, ω_2 とすれば，

$$\omega_1{}^2, \omega_2{}^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{k_1+\alpha_0}{m_1}+\frac{k_2+\alpha_0}{m_2}\right)\right.$$
$$\left.\mp\sqrt{\left(\frac{k_1+\alpha_0}{m_1}+\frac{k_2+\alpha_0}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2+\alpha_0(k_1+k_2)}{m_1m_2}}\right\} \qquad (4)$$

である。ここで１次の固有モードは m_1, m_2 が同方向に運動する一体となった系の固有モードに対応し，２次の固有モードは m_1, m_2 が反対方向に運動する正解の系にはない固有モードである。

$m_1=m_2$ とした場合の $(\omega_1/\omega_{\mathrm{exact}})$ および $(\omega_2/\omega_{\mathrm{exact}})$ のペナルティ数 α_0 による変化の様子を Fig. 2 に示す。図に示すようにペナルティ数が増加する，すなわちより剛性の高いばねを挿入することにより，１次固有振動数は正解に収束していくのに対して，２次固有振動数が急激に増加している。たとえば，k_1 の 1,000 倍の剛性を持つばねを挿入した場合には，正解の固有振動数の 40～60 倍程度の２次固有振動数が存在することになる。ま

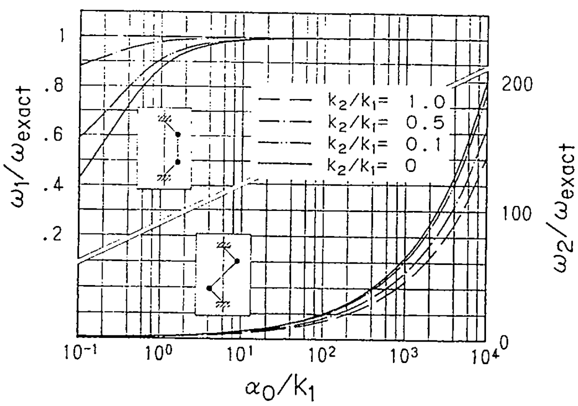

Fig. 2 Variation of natural frequency of the two-element model with the penalty number α_0 in the case when only α_0 is introduced

た二つのばね k_1, k_2 の剛性の差が大きいほど（すなわち k_2/k_1 が小さいほど）2 次固有振動数の増加は顕著である。

一般に，大きなペナルティ数を仮定することにより変位の絶対値は正解に収束していくが，より高い振動数で正解の回りを振動することになる。動的な解析において，こうした高次振動の存在は計算の安定性などの上で重大な問題であり，特に陽解法の時間積分スキームなど条件安定のスキームを用いる際には，計算効率が極端に低下する。

2.2 変位と速度の連続性を考慮した運動方程式の導出

Fig. 3 に示すように接触状態にある 2 物体について考える。ここで運動方程式に次の形の拘束条件を導入することを考える。

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}))=0 & \text{(5a)} \\ \boldsymbol{C}_1(\dot{\boldsymbol{u}}(\dot{\boldsymbol{a}}))=0 & \text{(5b)} \end{cases}$$

接触点において接平面に対する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を定義すれば，たとえば動的な接触状態（contact condition）においては，

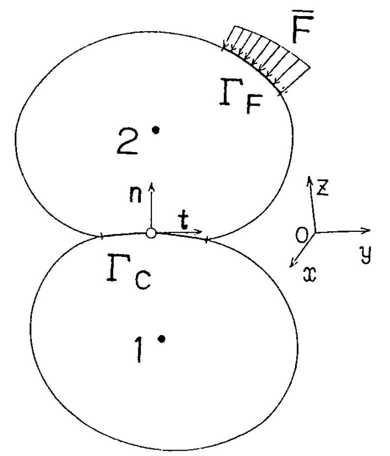

Fig. 3 Definition sketch of two bodies in contact

$$\begin{cases} (\varDelta\boldsymbol{u}_1-\varDelta\boldsymbol{u}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0 & \text{(6a)} \\ (\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{u}}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{on } \varGamma_C & \text{(6b)} \end{cases}$$

また固着状態（stick condition）においては，上式に加えて，

$$\begin{cases} (\varDelta\boldsymbol{u}_1-\varDelta\boldsymbol{u}_2)\cdot\boldsymbol{t}=0 & \text{(7a)} \\ (\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{u}}_2)\cdot\boldsymbol{t}=0 \quad \text{on } \varGamma_C & \text{(7b)} \end{cases}$$

の付帯条件が成立する。

浅野は，接触力および固着力 $\boldsymbol{R}$ を各種ペナルティ数 α_0, α_1, α_2 と接触2物体間の接触変位差，速度差，加速度差との積の和として次のように表現している[2)]。

$$\boldsymbol{R}=\alpha_0(\varDelta\boldsymbol{u}_1-\varDelta\boldsymbol{u}_2)+\alpha_1(\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{u}}_2)+\alpha_2(\ddot{\boldsymbol{u}}_1-\ddot{\boldsymbol{u}}_2) \tag{8}$$

続いて接触力による仮想の接触仕事を考慮して，次のような動的接触問題に対する仮想仕事の原理を導いている[2),10),11)]。

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum\left(\delta T-\delta U+\iiint_V \bar{\boldsymbol{P}}\delta\boldsymbol{u}dV+\iint_{\varGamma_F}\bar{\boldsymbol{F}}\delta\boldsymbol{u}d\varGamma\right)+\iint_{\varGamma_C}\boldsymbol{R}(\delta\boldsymbol{u}_1-\delta\boldsymbol{u}_2)d\varGamma\right]d\tau=0 \tag{9}$$

ここで左辺第1項～第4項はそれぞれ慣性力，内力，物体力，および表面力による仮想仕事であり，第5項が接触力による仮想仕事である。

一方前節で示したような高次振動を物理的に抑制するという観点に立って，剛性の高いばねを挿入した部分の高次の固有振動数を下げるために，付加的なマスを発生させる，あるいは接触点間の相対運動を吸収するダッシュポットを挿入してやることを考える。

そこで変位に対する拘束条件（5a）式はポテンシャルエネルギー関数 $\varPi$ の処罰項として次のように表わす[10)]。

$$2\bar{\varPi}=2\varPi+\alpha_0\iint_{\varGamma_C}\boldsymbol{C}_0{}^t\boldsymbol{C}_0d\varGamma \tag{10}$$

さらに速度に対する拘束条件（5b）式は運動エネルギー関数 T と散逸エネルギー関数 F の双方に対する処罰項として次のように表す。

$$\begin{cases} 2\bar{T}=2T+\alpha_2\iint_{\varGamma_C}\boldsymbol{C}_1{}^t\boldsymbol{C}_1d\varGamma & \text{(11a)} \\ 2\bar{F}=2F+\alpha_1\iint_{\varGamma_C}\boldsymbol{C}_1{}^t\boldsymbol{C}_1d\varGamma & \text{(11b)} \end{cases}$$

ここで，α_0, α_1, α_2 はペナルティ数であり，物理的にはそれぞれ付加したばねのばね定数，ダッシュポットの減衰係数，マスの大きさに対応するものと考えることができる。

q_i, Q_i をそれぞれ一般座標，一般力として，上式を次の離散化モデルに対する減衰を考慮したラグランジェの運動方程式[12),13)]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_i}+\frac{\partial\bar{\varPi}}{\partial q_i}+\frac{\partial\bar{F}}{\partial\dot{q}_i}=Q_i \tag{12}$$

に代入すれば，変位および速度の連続性を考慮した接触

状態および固着状態における系の自由振動に対する運動方程式は，概括的に次のように表わされる。

$$(\boldsymbol{M}_1+\alpha_2\boldsymbol{M}_2)\ddot{a}+(\boldsymbol{C}_1+\alpha_1\boldsymbol{C}_2)\dot{a}+(\boldsymbol{K}_1+\alpha_0\boldsymbol{K}_2)a=\boldsymbol{f}+\alpha_0\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{a}^{(0)} \tag{13}$$

ここに $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{K}_1$ は非接触時の質量，減衰，剛性マトリクスであり，$\alpha_2\boldsymbol{M}_2$, $\alpha_1\boldsymbol{C}_2$, $\alpha_0\boldsymbol{K}_2$ が接触による処罰項である。また，$\boldsymbol{a}^{(0)}$ は接触開始時あるいは固着開始時の変位ベクトルである。接触力 R_n および固着力 R_t は接触点間に挿入したばねの反力，ダッシュポットに生じる減衰力および加速度の差に対応するマスの慣性力の和として，次のように (8) 式と同様な形で表わされることになる。

$$\left\{\begin{aligned}R_n&=\alpha_0(\Delta\boldsymbol{u}_1-\Delta\boldsymbol{u}_2)\cdot\boldsymbol{n}\\&\quad+\alpha_1(\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{u}}_2)\cdot\boldsymbol{n}+\alpha_2(\ddot{\boldsymbol{u}}_1-\ddot{\boldsymbol{u}}_2)\cdot\boldsymbol{n} &&(14)\\R_t&=\alpha_0(\Delta\boldsymbol{u}_1-\Delta\boldsymbol{u}_2)\cdot\boldsymbol{t}\\&\quad+\alpha_1(\dot{\boldsymbol{u}}_1-\dot{\boldsymbol{u}}_2)\cdot\boldsymbol{t}+\alpha_2(\ddot{\boldsymbol{u}}_1-\ddot{\boldsymbol{u}}_2)\cdot\boldsymbol{t} &&(15)\end{aligned}\right.$$

また，すべり状態 (slip condition) の摩擦力 R_t は (14) 式を用いて次のように表わされる。

$$R_t=\mu|R_n| \tag{16}$$

結局，物理的な認識に基づいたペナルティ関数法により導かれた運動方程式は，(9) 式から得られるものと完全に一致する。しかし (10), (11a), (11b) 式には加速度に対する付帯条件は含まれないことになる。

2.3 最適なペナルティ数の設定に関する考察

Fig. 4 に示すように，ふたたび1次元2要素モデルを用いて α_0, α_1, α_2 の各ペナルティ数の設定に関する考察を行う。

2.3.1 α_0 の設定

静的な接触問題解析にペナルティ関数法を用いる場合には α_0 のみを用いることから，ここでは α_0 については静的な力の平衡状態に基づいて決定する。α_0 の物理的な意味は前節で述べたように，接触点間に挿入するばねの大きさに対応し，接触点におけるいわゆる「くいこみ」を小さくするためには剛性の高いばねを用いる必要がある。

Fig. 4 に示す系の両端に一様な外力が作用した場合，静的な力の平衡状態から次式が成立する。

$$k_1\varepsilon_1=k_2\varepsilon_2=\alpha_0\varepsilon_\alpha \tag{17}$$

ここに，ε_1, ε_2, ε_α はそれぞればね k_1, k_2 およびペナルティ関数によるばね α_0 に生ずるひずみである。ペナルティ関数による誤差を次のように定義すれば，

$$\mathrm{error}=\max\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_1},\ \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_2}\right) \tag{18}$$

誤差が許容誤差 e^* を越えないためには，

$$\max\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_1}\left(=\frac{k_1}{\alpha_0}\right),\ \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_2}\left(=\frac{k_2}{\alpha_0}\right)\right)\leqq e^* \tag{19}$$

が成立すればよい。したがってペナルティ数 α_0 は，

$$\alpha_0\geqq\max(k_1,k_2)/e^* \tag{20}$$

と決定される。たとえば誤差を隣接要素に生じるひずみの 0.1% 以内に抑えるためには，

$$\alpha_0\geqq1000\cdot\max(k_1,k_2) \tag{21}$$

とすればよい。また，k_1, k_2 いずれかが剛体である場合には，(20) 式において k_1 あるいは k_2 を 0 とすればよい。

2.3.2 α_2 の設定

前節で述べたように，α_2 は剛性の高いばね (α_0) を挿入した部分の固有振動数を下げる目的で付加するマスの大きさに対応する。そこで α_2 は Fig. 4 のモデルを用いて固有振動数を調べることにより決定する。Fig. 4 において，ダッシュポットのない ($\alpha_1=0$) 場合の運動方程式は，

$$\begin{bmatrix}m_1+\alpha_2 & -\alpha_2\\-\alpha_2 & m_2+\alpha_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+\alpha_0 & -\alpha_0\\-\alpha_0 & k_2+\alpha_0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{22}$$

となり，1次，2次固有角振動数を ω_1, ω_2 とすれば，

$$\omega_1{}^2,\ \omega_2{}^2=\left(\frac{B}{2A}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2-\left(\frac{C}{A}\right)} \tag{23}$$

ここに，

$$\left\{\begin{aligned}A&=m_1m_2+\alpha_2(m_1+m_2)\\B&=m_1k_2+m_2k_1+\alpha_0(m_1+m_2)+\alpha_2(k_1+k_2)\\C&=k_1k_2+\alpha_0(k_1+k_2)\end{aligned}\right. \tag{24}$$

である。

ここで，α_0 については前項 (21) 式に示したように，静的解析における許容誤差が 0.1% 以内となるように設定し，α_2 の大きさにより (23) 式より与えられる $(\omega_1/\omega_{\mathrm{exact}})$, $(\omega_2/\omega_{\mathrm{exact}})$ がどのように変化するかを Fig. 5 に示す。ここで，ω_{exact} は 2.1 節 (2) 式で与えられる。横軸は α_2/α_0 を表わし，$(k_2/m_2)/(k_1/m_1)=10^{-2}$, 10^0, 10^2 の 3 ケースについて変化の様子を示す。

図中 $\alpha_2/\alpha_0\ll1$ の範囲では，1 次モードが m_1, m_2 が一体となって振動する正解のモードに対応し，固有振動数もほぼ正解に収束するのに対して，相対的に振動する 2 次モードに対応する固有振動数は高くなる。一方，$\alpha_2/\alpha_0\gg1$ の範囲では，2 次モードが正解のモードに対応し，固有振動数もほぼ正解に収束するのに対して，1 次モードが相対振動モードに対応する。

MODIFIED PENALTY FUNCTION

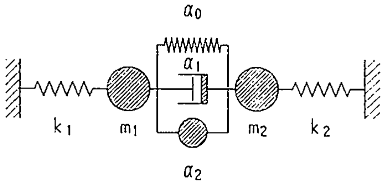

Fig. 4 Illustration of two elements in contact in the extended penalty function method

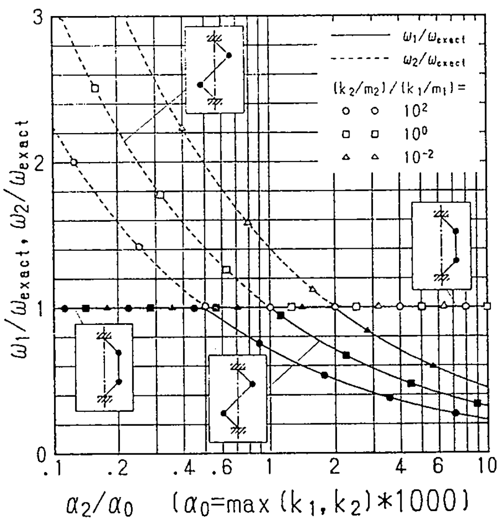

Fig. 5 Variation of natural frequency of the two-element model with the penalty number α_2 in the case when α_0 and α_2 are introduced

いずれの場合も1次固有振動数 ω_1 と2次固有振動数 ω_2 は正解の固有振動数 ω_{exact} 付近でお互いに接近することが図より分かる。そこで,

$$\mathrm{mean}(\omega_1, \omega_2)=\omega_{exact} \tag{25}$$

あるいは,

$$|\omega_2-\omega_1|\rightarrow \mathrm{minimum} \tag{26}$$

の条件から α_2 を決定することにする。(25) 式からは,

$$\alpha_2=\frac{\alpha_0(m_1+m_2)^2+(m_1-m_2)(m_1k_2-m_2k_1)}{(m_1+m_2)(k_1+k_2)} \tag{27}$$

また (26) 式からは,

$$\alpha_2=\frac{\alpha_0(m_1+m_2)(k_1+k_2)+(k_1-k_2)(m_1k_2-m_2k_1)}{(k_1+k_2)^2} \tag{28}$$

が得られる。通常 (27), (28) 式の分子第1項は第2項に比べて非常に大きくなるから (α_0 に大きな値を仮定した場合), 結局 (27), (28) 式いずれからも α_2 として次式が得られる。

$$\alpha_2 \doteqdot \alpha_0\frac{m_1+m_2}{k_1+k_2} \tag{29}$$

2.3.3 α_1 の設定

前節で述べたように, α_1 は接触点の相対運動を吸収するダッシュポットの減衰係数に対応する。Fig. 4 において, ダッシュポットも含めた場合の自由振動に対する運動方程式は,

$$\begin{bmatrix} m_1+\alpha_2 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & m_2+\alpha_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} k_1+\alpha_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & k_2+\alpha_0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{30}$$

となり, 上式のマトリックスを展開して辺々足し合せると次式が得られる。

$$2\{\alpha_2(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+\alpha_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+\alpha_0(x_1-x_2)\}$$
$$+m_1\ddot{x}_1-m_2\ddot{x}_2+k_1x_1-k_2x_2=0 \tag{31}$$

ここで簡単のため, $m_1=m_2=m$, $k_1=k_2=k$ とすれば,

$$(2\alpha_2+m)(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+2\alpha_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$$
$$+(2\alpha_0+k)(x_1-x_2)=0 \tag{32}$$

となり, 相対運動に関する運動方程式が得られる。したがって, 相対運動が振動的にならないためには,

$$\alpha_1 \geqq \sqrt{(2\alpha_2+m)(2\alpha_0+k)} \tag{33}$$

が成立すればよい[12),13)]。さらに, (20), (29) 式より通常 $\alpha_2 \gg m$, $\alpha_0 \gg k$ であるから, 上式は簡単に,

$$\alpha_1 \geqq 2\sqrt{\alpha_0\alpha_2} \tag{34}$$

と表わせる。

$m_1 \neq m_2$ あるいは $k_1 \neq k_2$ の場合も, ダッシュポットの減衰係数という α_1 の物理的な意味を考えれば, α_0 と α_2 を用いて (34) 式により計算される臨界減衰値程度の値を下限値として用いれば十分であろう。

結局, 単純な1次元2要素モデルを用いた考察に基づき, α_0 は (20) 式, α_2 は (29) 式, α_1 は (34) 式からそれぞれ決定すればよいことになる。また実際の多自由度系の問題に適用した例は, 次章の計算例で示すことにする。

3 数 値 例

ここでは, 前章で示した手法の具体的な数値例として, 有限要素法にペナルティ関数法を適用して動的接触問題に対する本手法の有効性を示す。

3.1 弾性棒の衝撃衝突問題

Fig. 6 に示すように, 一端が固定された弾性棒 (ROD-1) に初速度を持った他の弾性棒 (ROD-2) が衝撃衝突する問題を考える[2)~5),14)]。ここでは特に接触力の時刻歴を調べることにより, 前章で示したペナルティ関数法の有効性を示す。接触力の算定は, 接触, 非接触, また摩擦力の算定に関連し, 正確な評価を必要とする。

はじめに, 横慣性の影響を回避するため, 問題を1次元問題として単純化し, 1次元波動伝播理論[14)]による理論解との比較を行う。運動方程式の時間積分には中心差

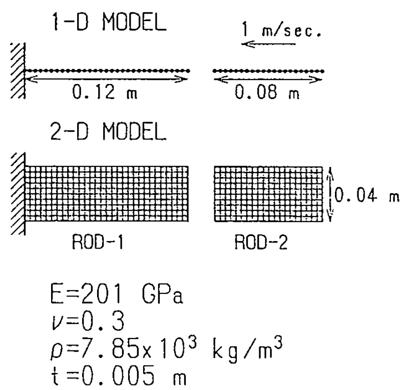

Fig. 6 Contact impact problem of two elastic rods

分法を用いる。また計算に用いた材料定数等は Fig. 6 に示す。

はじめに，ペナルティ数の設定の仕方が計算結果にどう影響するか，2，3 の計算例を用いて示すことにする。まず ROD-1，ROD-2 の断面積 A_1，A_2 さらに要素長は棒全体にわたり同一なもの（$A_1=A_1=2\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$，50 要素等分割）とした上で，ペナルティ数について次の無次元量を定義する。

$$\xi=\frac{\alpha_0}{k_1}=\frac{\alpha_0}{k_2},\ \zeta=\frac{\alpha_2}{m_1}=\frac{\alpha_2}{m_2},\ \eta=\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_0\alpha_2}} \qquad (35)$$

すなわち，前章 (20)，(29)，(34) 式と対応させるためには，

$$\xi=\frac{1}{e^*},\ \frac{\zeta}{\xi}=1,\ \eta\geqq1 \qquad (36)$$

とすればよいことになる。

Fig. 7 には従来のペナルティ関数法で行われるように，変位のみを拘束する，すなわち α_0 のみを用いた計算例を示す。ここでは $\xi=1, 10$ とした場合の接触力の時刻歴を 1 次元理論解と比較している。$\xi=1$，すなわち系の剛性と同程度のばねを接触点間に挿入した場合は，接触点間のくいこみ量はかなり大きくなるが（隣接要素に生じる縮み量と同程度），接触力の時間平均はほぼ正解に対応し，また時間積分における時間増分値としては非接触時の系において，いわゆる Courant の条件から計算される上限値を基準にして適当な安全率を見込んで設定すればよい（ここではすべての計算例に対して時間増分値は十分に安全側の値として，Courant の条件から計算される上限値の 1/10 を用いた)。

それに対して $\xi=10$ と剛性の高いばねを挿入した場合には，時間増分の上限値は $\xi=1$ の場合の 1/3 程度になり，さらに振幅が増大し，接触力は一側にも振動するため，系としては接触，非接触を繰り返すことになる。より剛性の高いばねを挿入した場合には，時間増分の上限値はさらに低下する（たとえば $\xi=10^3$ とした場合には時間増分の上限値は 1/30 程度になる）だけでなく，さらに大きな高次振動が発生すると予想される。したがって，くいこみ量を小さくするために剛性の高いばねを用いることは，計算効率を低下させるだけでなく，接触力の算定も正しく行われないことになる。

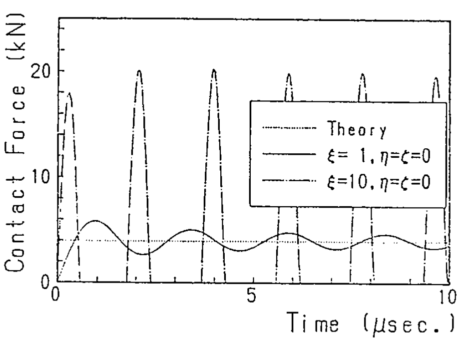

Fig. 7 Time history of contact force by 1-D model in the case when only α_0 is introduced

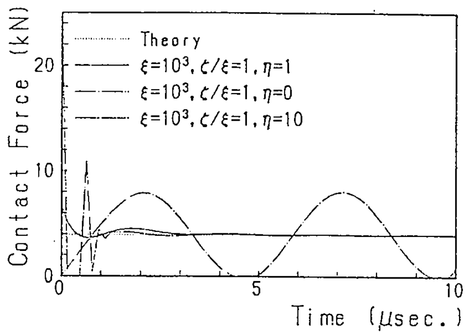

Fig. 8 Effect of the value of α_1 on time history of contact force by 1-D model

次に，速度の連続性も考慮してペナルティ数 α_0 および α_2 を (20) および (29) 式より決定した場合について，α_1 の値による影響を Fig. 8 に示す。ペナルティ数 α_0 に関しては，(20) 式における許容誤差 e^* を 0.1% とし，α_1 については (34) 式右辺から計算される臨界減衰値の 0，1，10 倍の値を仮定した。すなわち先に定義した無次元量を用いて表わせば，

$$\xi=10^3,\ \frac{\zeta}{\xi}=1,\ \eta=0,\ 1,\ 10 \qquad (37)$$

であり，また時間増分値は非接触状態における系の Courant の条件から計算される値を上限値として用いる。$\eta=0$，すなわち接触点間にダッシュポットを挿入しない場合には，接触力は正解の回りで大きく振動する。また $\eta=10$ と大きな減衰を仮定した場合には，衝突後 2μsec. 程度経過すると接触力は理論解に収束するが，接触した瞬間に接触点間の速度差に起因する非常に大きな接触力が発生し大きく振動する。したがって，α_1 の値としては，次に示すように，(34) 式から得られる下限値，すなわち $\eta=1$ 程度の値を用いることが適当であると考えられる。

$$\alpha_1=2\sqrt{\alpha_0\alpha_2} \qquad (38)$$

そこで以下の計算では，$e^*=10^{-3}$ として (20)，(29)，(38) の各式から計算されるペナルティ数を用いて，また時間増分値としては非接触状態における系の Courant の条件から計算される値を上限値として，十分安全側に上限値の 1/10 を用いた。

次に，全体の要素数を 50 要素および 25 要素として，離散化誤差の影響を調べた結果を Fig. 9 に示す。要素数 50，25 いずれの場合も，接触力および接触持続時間とも概ね良好に対応している。また 50 要素と 25 要素の場合の比較より，理論解の回りに振動しているのは，離散化誤差によるものであると考えられる。

Fig. 9 の例では，二つの棒の材質および要素の寸法は

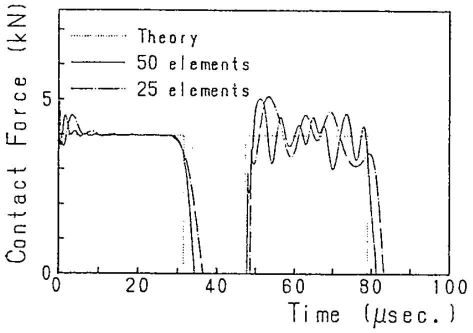

Fig. 9 Effect of the number of elements on time history of contact force by 1-D model

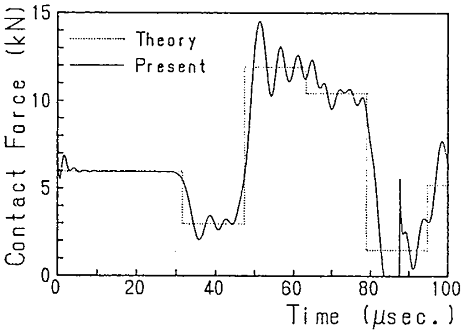

Fig. 10 Time history of contact force by 1-D model in the case when $A_2=3A_1$

同一であるため，ペナルティ数を決定する (20)，(29)，(38) の各式において $k_1=k_2$，$m_1=m_2$ となる。そこで次に，材質はそのままで断面積の異なる二つの棒を衝突させた計算例を Fig. 10 に示す。$A_1=2\times10^{-4}\,m^2$，$A_2=6\times10^{-4}\,m^2$，また要素数は 50 要素としてその他の計算条件は Fig. 6 に示す通りである。材質は同じでも，断面積が異なる場合には接触面で応力波の反射と透過が同時に起こるため，波動伝播の様子は Fig. 9 の場合に比較して多少複雑になるが[14]，点線で表された理論解にほぼ一致する結果が得られた。

本節の最後に Fig. 9 と同じ問題に対して，2 次元有限要素モデルを用いて接触力の時刻歴を解析した例をFig. 11 に示す。2 次元解析には双一次 4 辺形要素を用い，要素剛性の計算には厳密な積分を用いた。また 2 次元解析においては，(20)，(29) および (38) 式に含まれる k_1，k_2 および m_1，m_2 は，それぞれ全体剛性行列および質量行列において，接触している節点自由度に対応する対角成分を用いた。また 2 次元解析においては，摩擦係数 $\mu=0.6$ とした。軸方向の分割数は Fig. 6 に示すように，1 次元モデル，2 次元モデルともに 50 要素である。2 次元モデルによる結果には 1 次元モデルと対応する振動の他に，より低次の振動モードが混入しており，これは横慣性による影響であると思われる[3]。

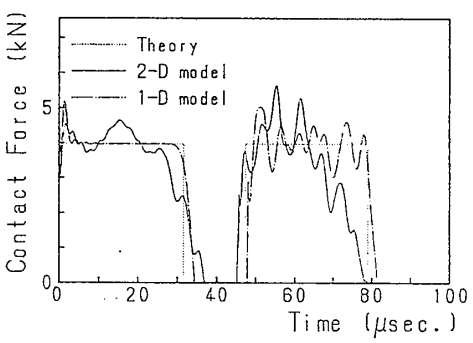

Fig. 11 Comparison between time histories of contact force by 1-D and 2-D Analysis

以上いくつかの解析結果より，前章で示したペナルティ関数法およびペナルティ数の設定に関する考え方の妥当性が実証された。

3.2 摩擦係数の速度特性に関する数値実験

本節では，摩擦を考慮した動的接触問題の例として，Fig. 12 に示すような一定速度で移動するベルト上の弾性ブロックの運動を解析する。摩擦励起振動の例としては，自転車のブレーキ音，蝶番いのきしみ，ヴァイオリンの弦の振動などがよく知られているが，従来これらの現象はすべり速度の増加に従い摩擦係数が低下する，いわゆる「負の摩擦速度特性」に起因するスティックスリップ現象として説明されており，剛体ブロックのすべり面に平行な運動のみを考慮した解析が行われてきた[12]。しかしながら動摩擦係数に関しては，摩擦現象そのものの複雑さに起因する実験の非再現性などから，正確な測定は非常に困難であり，通常の使用範囲における摩擦係数のすべり速度依存性は確実さを欠く。一方物性の観点からは，界面の分子レベルの考察に基づいて，すべり摩擦現象の解明が行われており，摩擦係数の速度特性も正確に測定されてはいるが，すべり速度が $10^{-12}\sim10^{-1}$ cm/s といった非常に低速域での現象に限られている[16]。

そこで，摩擦係数の速度特性だけで現象を説明する，すなわち界面の摩擦現象だけで全体の説明を試みるのではなく，通常我々が経験するスティックスリップ現象な

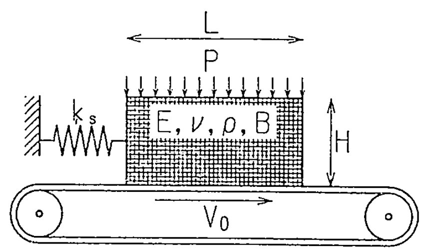

Fig. 12 Self-excited vibration problem of the elastic block on moving foundation

どは構造全体の現象として捉える方が合理的である。こうした観点に基づき，Tolstoi は摩擦係数に対する垂直方向変位の重要性を指摘しており[15]，また Martin と Oden は接触要素にヒステリシス特性など摩擦に関与する物性を構成式の形で導入した上で，ここで計算に用いたものと同様なブロックの運動を解析して，やはり垂直方向運動の影響を検討している[7),8)]。

ここでは，接触面における局所的な摩擦係数に関しては通常のクーロン則，すなわち「動摩擦係数＝静止摩擦係数」と仮定して，それに対して Martin と Oden の解析と同様にブロックを剛体ではなく弾性体と考え，さらにすべり面に垂直方向の運動も考慮した解析を行うことにより，系全体の構造特性として摩擦係数をとらえることにする。

Fig. 12 に示すように，ブロックは 20×40 要素に分割し，ばねの反力 $k_s\varDelta$ を外力 P で除することにより全体的な摩擦係数を求めるものとする。計算に用いた材料定数等は Fig. 12 に示す。ペナルティ数は，前節で用いたものと同様に，$e^*=10^{-3}$ として (20)，(29)，(38) の各式から計算される値を仮定し，また時間増分値としては非接触状態における系の Courant の条件から計算される上限値の 1/10 を用いた。

計算は，上面に一様な分布荷重 P が作用したブロックを徐々に動かし，「ばねの反力 $(k_s\varDelta)$＝最大静止摩擦力 (μP)」となった状態を初期状態として，ブロックの各節点にベルトの速度に等しい水平方向初速度を与えるものとする。また質量マトリックスには集中質量を用いている。

一方，同じ初期条件のもとで，ブロックを剛体と仮定した場合には，ブロックの水平方向変位 $\varDelta$ は，

$$\varDelta=\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{\mu P}{k_s} \tag{39}$$

ここに，

$$\omega=\left(\frac{k_s}{m}\right)^{0.5},\quad m=\rho \mathrm{LBH} \tag{40}$$

と表わされるので，変位については次のように初期状態における水平方向変位（最大摩擦力発生時の変位）$\mu P/k_s$ で無次元化すれば，(39) 式は，

$$\varDelta^*=\varDelta/(\mu P/k_s)=\frac{V_0k_s}{\mu P\omega}(\sin\omega t+1)$$
$$=\frac{V_0(mk_s)^{0.5}}{\mu P}(\sin\omega t+1) \tag{41}$$

と表わされる。そこでここでは，無次元振幅 $V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P$ をパラメーターとして，パラメータースタディを行う。

$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P$ の5ケース（m は一定，$k_s=250$ kg/mm，$P=0.1\times$LBkg，V_0 を変化させた）について，ばねの伸び，ブロック重心点の水平方向および垂直方向変位の時刻歴をそれぞれ Fig. 13〜Fig. 15 に示す。図中各変位は $\mu P/k_s$ で無次元化してある。また Fig. 13 および Fig. 15 における点線は，それぞれ最大摩擦力発生時のばねの伸びおよび垂直方向の静的平衡状態に対応する。$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P$ が非常に小さい場合，すなわち，すべり速度が小さい場合には，ブロックはほとんど振動せずに，計算される摩擦係数はほぼ静止摩擦係数に一致する。$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P$ が大きくなるに従い，すなわちすべり速度が大きくなるに従い，すべり面に垂直な方向の振動が発生することにより，摩擦力が低下し始め，ばねの伸びとしては初期状態よりも小さな値で定常状態となる。さらに速度が大きくなると，ブロックはベルト上で跳ね回る，いわゆる “tumbling motion” を示し，正確な摩擦係数は計算できなくなる。また Fig. 13(b) および Fig. 14(b) の変位時刻歴からも明らかなように，$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P=1.065\times10^5$ の場合はブロックがスティックスリップを起こしていることが分かる。このように，局所的な摩擦特性としては負の摩擦速度特性を仮定しな

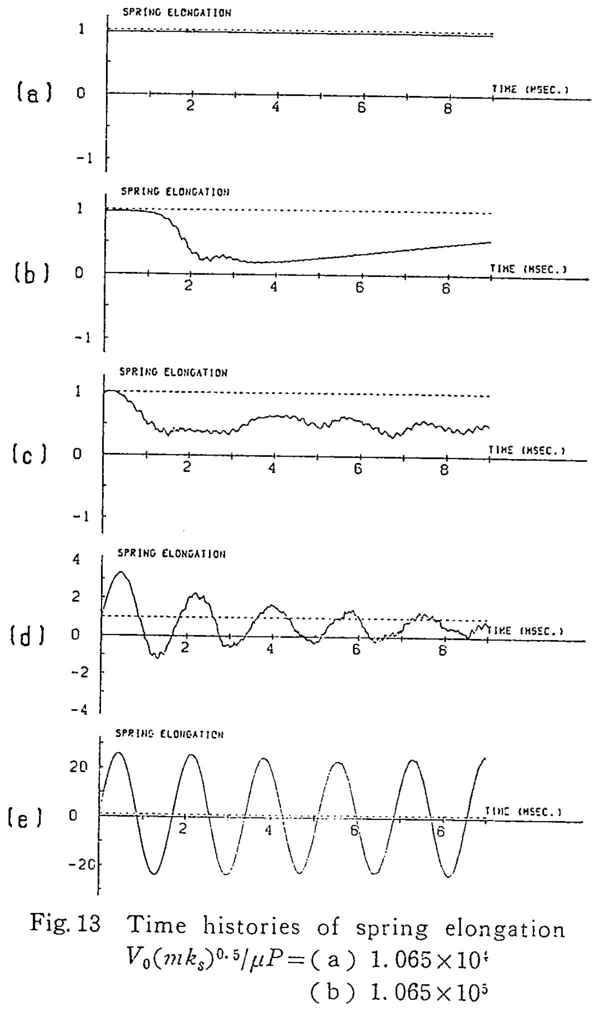

Fig. 13 Time histories of spring elongation
$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P=$ (a) 1.065×10^4
(b) 1.065×10^5
(c) 1.065×10^6
(d) 1.065×10^7
(e) 1.065×10^8
……… Static equilibrium

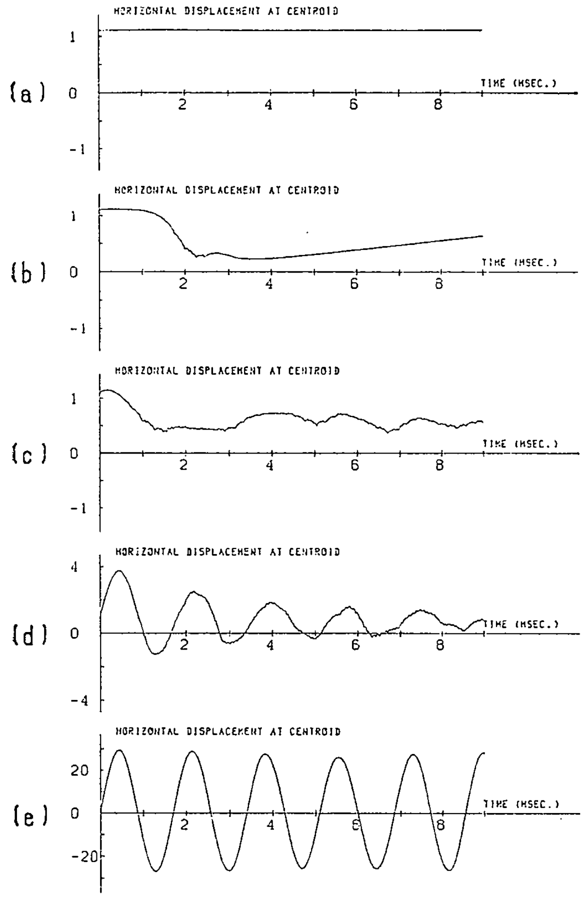

Fig. 14　Time histories of horizontal displacement at centroid
$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P=$ (a) 1.065×10^4
(b) 1.065×10^5
(c) 1.065×10^6
(d) 1.065×10^7
(e) 1.065×10^8

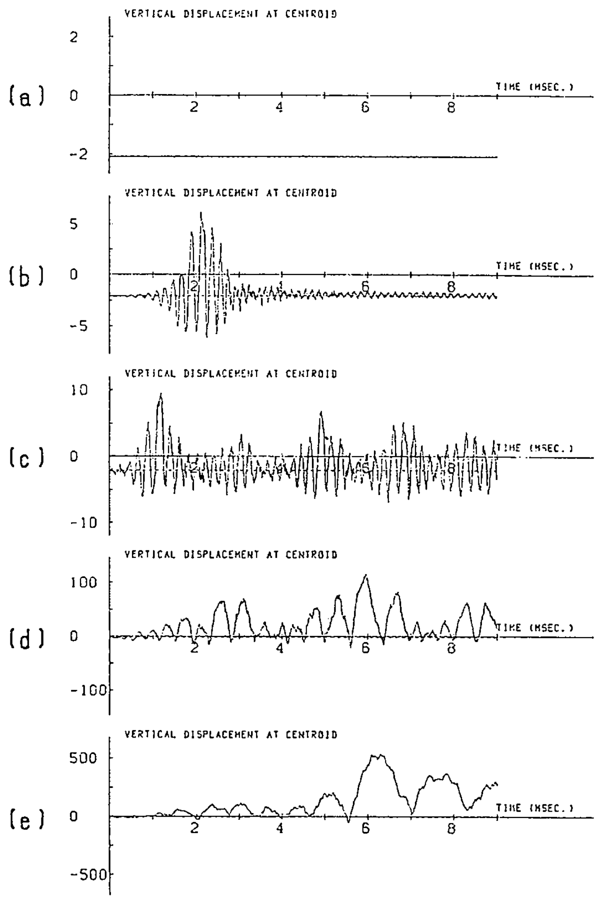

Fig. 15　Time histories of vertical displacement at centroid
$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P=$ (a) 1.065×10^4
(b) 1.065×10^5
(c) 1.065×10^6
(d) 1.065×10^7
(e) 1.065×10^8
……… Static equilibrium

い場合でも，ブロックの変形およびすべり面に垂直な方向の運動を考慮することにより，スティックスリップの発生する可能性があることが分かる。

さらに，$V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P$ に関するパラメータースタディを行い，計算から得られた摩擦係数と仮定した静止摩擦係数との比（$\mu_{dynamic}/\mu_{static}$）の変化の様子を Fig. 16 に示す。局所的には動摩擦係数と静止摩擦係数を区別しない場合でも，系全体の特性としては摩擦係数の速度依存性が現われている。さらに，Fig. 13(b) および Fig. 14 (b) に現われたスティックスリップは Fig. 16 における摩擦係数の負勾配の領域で発生していることが分かる。

すなわち，これまでに知られるように，負の摩擦速度特性によりスティックスリップが発生するという説明は，摩擦係数を系の構造特性としてとらえるという観点に立てば，依然として成立していることになる。

摩擦現象は非常に複雑な現象であるため，摩擦係数の速度特性がすべてここで示したような構造特性として説明されるものではもちろんないが，一つの可能性として

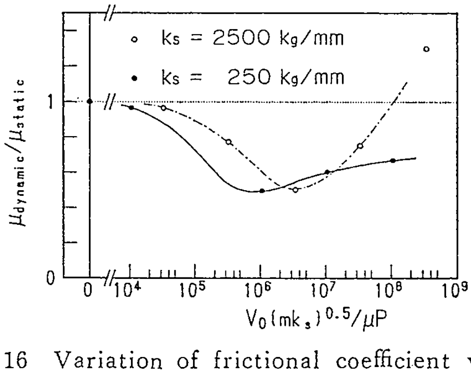

Fig. 16　Variation of frictional coefficient with the sliding velocity $V_0(mk_s)^{0.5}/\mu P$

摩擦現象を界面の材料特性だけでとらえるのではなく，構造特性としての側面があることを示唆するものである。

4　結　　論

本論文では動的接触問題に対するペナルティ関数法の

適用について考察を行った。本論文の内容および成果を以下に要約する。

（1） 変位のみを拘束する通常のペナルティ関数法をそのまま動的解析に適用した場合に生じる問題点を明らかにした上で，その問題に対して物理的に対策するという観点から，さらに速度を拘束したペナルティ関数法を導いた。

（2） 単純な1次元2要素モデルを用いて，ペナルティ数の合理的な決定方法について考察を行った。

（3） 弾性棒の衝撃衝突問題に本手法を適用し，接触力の時刻歴を1次元波動伝播理論解と比較することにより，本手法およびペナルティ数の決定法の妥当性を示した。

（4） 摩擦係数の速度特性を調べる数値実験を実施し，局所的には動摩擦係数と静止摩擦係数を区別しない場合でも，系の弾性変形あるいはすべり面に垂直な方向の運動を考慮することにより，系全体の構造特性としては，摩擦係数の速度依存性が現われることを示した。

参考文献

1) T. J. R. Hughes, et al.: "A Finite Element for a Class of Contact-Impact Problems", J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 8 (1976), 249.
2) 浅野：衝撃接触二体問題のためのペナルティ法による仮想仕事の原理，日本機械学会論文集（A編），51巻467号（1985），1893.
3) 矢川，関東，安藤：ペナルティ関数法による動的接触問題の解析，日本機械学会論文集（A編），49巻448号（1983），1581.
4) 土肥，浅野：有限要素法による動的弾性接触問題の解析法，日本機械学会論文集（A編），46巻407号（1980），826.
5) 浅野：衝突弾性接触問題の有限要素解析のための二物体の分離状態における仮想仕事の原理，日本機械学会論文集（A編），46巻411号（1980），1249.
6) N. Madsen : "Numerically Efficient Procedures for Dynamic Contact Problems", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 20, No. 1 (1984), 1.
7) J. A. C. Martins, J. T. Oden : "A Numerical Analysis of a Class of Problems in Elastodynamics with Friction", J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 40 (1983), 327.
8) J. A. C. Martins, J. T. Oden : "Interface Models, Variational Principles and Numerical Solutions for Dynamic Friction Problems", Mechanics of Material Interfaces, edt. by A. P. S. Selvadurai and G. Z. Voyiadjis, Elsevier (1986), 3.
9) キャスク構造解析研究分科会：使用済核燃料輸送容器の構造解析プログラムの開発・整備に関する調査報告書（II），日本機械学会（1983）.
10) O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill (1977).
11) K. Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd ed., Pergamon Press (1982).
12) 谷口，ほか：振動工学ハンドブック，養賢堂（1976）.
13) W. C. Hurty, M. F. Rubinstein : Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc. (1964).
14) 松本，ほか：縦衝撃を受けた丸棒に生じる応力およびその伝ぱ，日本機械学会論文集（第1部），29巻197号（1963），49.
15) D. M. Tolstoi : "Significance of the Normal Degree of Freedom and Natural Normal Vibrations in Contact Friction", Wear, Vol. 10 (1967), 199.
16) 田中：摩擦のおはなし，日本規格協会（1985）.