日本統計学会誌
第 38 巻，第 2 号，2009 年 3 月
251 頁～279 頁

スペクトル正準分解と因果諸測度の構成[1]

細 谷 雄 三*

Spectal canonical factorization and construction of causal measures[1]

Yuzo Hosoya*

この論文は多変量有理型スペクトル正準分解の諸方法を展望するとともに，Rozanov による MA スペクトル密度行列の分解法を改良し数値的に実行可能とした方法を提案する．正準分解の応用として，第 3 系列との従属関係を有する 2 時系列間の偏因果性を定量的に測定するために有用な諸測度と，関連する統計的推定・検定法を概説する．

This paper overviews canonical factorization methods of the rational multivariate spectral density matrix, proposing a numerically feasible factorization procedure improving the Rozanov algorithm. As its application, the paper expounds on the construction of partial causal measures between two time series in the presence of a third series and allied statistical inference methods.
Key Words and Phrases: canonical factorization, causal measures, cointegration, Granger causality, partial causality, prediction, spectral density, stationary process, statistical inference.

1. 序　　論

スペクトル正準分解（canonical factorization）は時系列解析において多くの応用をもつが，その代表的なものが予測量の構成と予測誤差の導出である．一方，因果性について Granger（1963, 1969）概念枠組みを採用すると，そこでは因果性は予測と密接に関連するから，スペクトル分解アルゴリズムは因果諸測度の構成のための基礎的要素でもある．

有限観測値にもとづく有理型スペクトラム推定は時系列解析において広い応用をもち，通常はデータ生成過程の時間領域 ARMA 表現にもとづいて実行される；代表的な接近法としては Hannan-Rissanen（1982）や Hannan-Kavalieris（1984）がある．時間領域での ARMA モデルあてはめは，問題となる生成過程の有理型スペクトルに対応する伝達関数（正準因子）を自動的に推定することになるが，問題となるスペクトル密度関数が観測過程そのものに対応しない場合，あるいは観測過程から誘導された密度関数である場合には，有理型スペクトル密度関数の直接的な分解（factorization）の必要が生ずる．特に，Hosoya（1991, 1997a）が提案した因果測度の構成においては，観測過程には直接に対応しないスペクトルあるいはそこから誘導されたスペクトルの分解が必要となる．とくに以下で導入する因果測度の構成においては観測過程が AR 過程であっても，誘導有理型スペクトル密度関数の分解が必要となる．時系列の統計的推測において，有理型スペクトル分解が有用であるもう一つの場合は，因子分解アルゴリズム

---

[1] 本研究は日本学術振興会科学研究補助金（C）19530190 の助成を受けている．
* 明星大学経済学部：〒191-8506 日野市程久保 2-1-1.
E-mail: yhosoya@econ.meisei-u.ac.jp

が利用可能であれば，ARMA 係数の数値的導出において，MA スペクトルを不変に保存したしたまま（したがって尤度を不変にしたままで），可逆（invertibility）条件を満たすように MA 係数の推定値を修正するために分解アルゴリズムが用いられる．

スペクトル分解とは何かを簡単に見るためには，Hannan（1960）による次の例が役立つ．$\varepsilon(t)$ と $\eta(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, が平均 0 で分散がそれぞれ $\sigma_1^2=Var(\varepsilon(t))=4$, $\sigma_2^2=Var(\eta(t))=1$ として与えられる実数値ホワイトノイズ過程であり，$\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ はそれぞれ

$$x(t)=\varepsilon(t)-\frac{3}{2}\varepsilon(t-1)+\frac{1}{2}\varepsilon(t-2) \tag{1.1}$$

$$y(t)=\eta(t)-3\eta(t-1)+2\eta(t-2). \tag{1.2}$$

によって生成される MA 過程であるとする．このとき過程 $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ のスペクトル密度関数はいずれも

$$g(e^{-i\lambda})=\frac{1}{2\pi}(2e^{-i2\lambda}-9e^{-i\lambda}+14-9e^{-i\lambda}-+2e^{-i2\lambda}) \tag{1.3}$$

として与えられるが，この二つの過程の一期先最適予測誤差の分散は

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}\log g(e^{-i\lambda})d\lambda\right\}=4=\sigma_1^2.$$

となり，ノイズ分散が予測誤差分散に対応する MA 表現は（1.1）であり，（1.2）で与えられる MA ではそうなっていない．問題は，$g(e^{-ei\lambda})$ の知識のみにもとづいて，いかにして MA 表現（1.1）に到達するかである．単純なケースではこの問題はそれほど困難ではないが，多変量スペクトル密度関数の広い類にたいして適用できる一般性をもったアルゴリズムが利用可能であることが望ましい．スペクトル分解は定常過程の予測理論において用いられる古典的問題である反面，スカラー値スペクトルの場合には因子を得るための一般式（3.2）（第 3 節参照）があるが，多変量スペクトルにたいしてはそのような統一的な公式は存在しない．有理関数型行列にたいしては，Rozanov（1967, pp. 43–50）をはじめ多くの分解法が提案されている．第 2 節はスペクトル分解アルゴリズムの諸方法を展望する．さらに，第 3 節から第 6 節において Rozanov の方法を数値計算に適したものとして改良することにより，スペクトル密度行列の分解として数値的に確定した解が得られるアルゴリズムを提案する．

有理関数スペクトル密度行列の数値的分解は複素数値計算を伴い，共役変換・鏡像変換といった演算や共通要素の簡約といった作用を繰り返し使用する．純粋に代数的なアルゴリズムでは，その各計算段階において先行する計算は数値的に正確に実行されていることが前提とされる．例えばある計算段階では，前段階で実数か複素数解が生み出されたかによって，計算法が異なるかもしれない．しかし実際には複素数平面において，結果 $x=x_1+ix_2$ が実数であるのか，複素数であって $|x_2|$ が非常に小さいのかを識別することは困難である．このような場合結果が実数・複素数の正確な二分法に依存しない計算過程が望ましい．或いは，ある演算が分母分子に共通因子を生成しそれらが通分できることが代数的に分かっていても，数値的には正確に等しい共通因子が生成されることは一般に期待できない．$g(z)$ が z の m 次の多項式であり，因子 $z-\alpha$, $|\alpha|\neq 1$ を持っていることが分かっているとする．$g(z)/(z-\alpha)=\Sigma_{j=0}^{m-1}b_jz^j$ を得るために，本論文では最小二乗法を適用して，$g(z)/(z-\alpha)$ を $1, z, \ldots, z^{m-1}$ の上に回帰して係数 b_j を推定することを提案する．ここで残差平方和は単位円上のフーリエ周波数を z-格子点のデザイン・データ集合として設定して計算する．スペクトル密度関数の分解法としては，代数

的構造を無視した計算集約的な方法も，計算誤差の発生を無視した純粋に代数的な方法も適切ではない．数値的な計算過程に，代数的構造を組み込んだアルゴリズムが望ましい．第3節はスカラー値MAスペクトルの数値的分解を扱う．第4節は，3節の結果を用いてMAスペクトル密度2×2行列の分解法を提案する．第5節はこの方法を一般の$p\times p(p\geq 3)$ MAスペクトルへ拡張する．第6節ではRozanovによる有理型スペクトル解析を解説する．ARMAモデルにもとづく偏因果測度の数値計算を実行するには，この一般的公式よりは，第8節で導入する余因子行列法が測度の数値計算をMAスペクトル密度の分解に帰着できるため便利である．

二つの時系列の間での，フィードバック関係の存在・非存在，因果の矢印の方向とその強度など因果関係を検出することは，Granger (1963, 1969) が予測精度の改善というプラグマティックな観点から因果性（あるいはその非存在）を定義して以来，時系列データの主要な分析視角の一つとなっている．Granger因果性の検定は定常時系列の枠組みで行うのが基本であるが，非定常自己回帰モデルに対しても，時間領域表現を用いた検定として，Mosconi and Giannini (1992), Lütkepohl and Reimers (1992), Toda and Phillips (1993, 1994), Toda and Yamamoto (1995) などの研究があり，さらにYamamoto and Kurozumi (2006) がGranger長期因果性を扱っている．周波数領域での因果測度や検定法については，Gel'fand and Yaglom (1959), Granger (1969), Geweke (1982) などの研究がある．また，Hosoya (1991) は非確定的多変量定常時系列間での因果性の測度と周波数領域での分解を提案した．Granger and Lin (1995) は因果測度を2変量非定常共和分過程に拡張した．一つの系列yから他の系列xへの一方向効果は，$y(t)$の過去の"一方向効果"を予測に追加することによる予測誤差の改善として定量的に評価するものが著者の提案した測度であるのにたいして，Gewekeはyからxへの線形フィードバック測度は，過去のyの値全体の追加による予測の改善として定義される．著者の提案する測度では，yからxへの因果測度は対応する周波数因果測度の積分に等しいが，Geweke測度では不等式関係しか得られない．さらに，周波数領域での接近法は，Granger因果性を検定するのみでなく，周波数ごとの因果性の強度を検定し，またその信頼集合を形成することができると言う意味で，時間領域における因果性の不在の検定よりも優れている．周波数領域での因果測度のWald検定についてはYao and Hosoya (2000), Hosoya, Yao and Takimoto (2005) を参照．

本論文の第7，8，9節は第3系列効果除去法と偏因果測度を解説するとともに，この測度に適した統計的推測法を議論することを目的としている．第7節は偏因果測度に関連する諸概念を概説する．因果測度は一方向測度と相互測度から構成され，それらはまず二つの多変量定常過程の間で定義されるが，共和分単位根過程にたいしても拡張される．とくにこの拡張のため，同節では「再現可能性」という概念を導入する．第8節は偏因果性の推定問題を扱い，特に多変量ARMA過程にたいする偏一方向因果測度の推定法を議論する．そして，一般的なARMAモデルにおける偏因果測度構成のための正準分解はMAスペクトルの正準分解に帰着することを示す．第9節は共和分ARMA過程における偏因果測度の一つの検定法を提案する．

本論文では以下の記号法を使用する．整数全体，非負整数，正整数の集合をそれぞれ$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{0+}$, $\mathbb{Z}^{+}$で表す．非正整数の集合は$\mathbb{Z}^{0-}$で表す．有限2次モーメントをもつ確率変数の集合$\{z_i, i\in\mathbb{A}\}$にたいして，$H\{z_i, i\in\mathbb{A}\}$は有限2次モーメントをもつ確率変数からなるヒルベルト空間における$\{z_i, i\in\mathbb{A}\}$の線形包の平均2乗に関する閉包を意味する．p-ベクトル確率過程$x(t)$が有限の共分散行列をもち，$\mathbb{S}$を一定の整数集合とするとき，$H\{x(t), t\in\mathbb{S}\}$は$H\{x_i(t), t\in\mathbb{S}, i=1, \ldots, p\}$を意味するものとする．簡潔のため，$H\{x(t_1-j), y(t_2-j), z(t_3-j); j\in\mathbb{Z}^{0+}\}$を$H\{x(t_1), y(t_2), z(t_3)\}$，$H\{x(j); j\in\mathbb{Z}\}$を$H\{x(\infty)\}$と書くことにする．次数$p$の単位行列は$I_p$であらわす．$A$が複素数値行列であるとき，$A^*$は共役転置行列を表し，実

数値行列である場合は，転置行列を表す．確率ベクトル x，あるいは確率ベクトルの対 x と y にたいして，$Cov(x)$ と $Cov(x,y)$ はそれぞれ x と $vec(x,y)$ の共分散行列を表す．正方行列 C のトレースは trC と記し，行列式は $detC$ と記すことにする．行列 A と B のクロネッカー積は $A\otimes B$ と表す．定義は記号 $\equiv$ によって示す．実数列 $c[j], j=-a,\dots,a$，が，条件 $c[j]=c[-j], c[0]>0$ を満たし，また $c(z)=\sum_{j=-a}^{a}c[j]z^j$ は $z=e^{-i\lambda}(-\pi\leq\lambda<\pi)$ にたいして非負であると仮定する．このとき，実数列 $b|j|(j=0,\dots,a)$ が存在して $b(z)=\sum_{j=0}^{a}b[j]z^j$ は単位円内に零点をもたず，$c(z)=(1/2\pi)b(z)b(z^{-1})$ が成立する．本論文ではそのような分解を正準分解とよび，$b(z)$ を $c(z)$ の正準因子とよぶことにする．$b_0>0$ と仮定すると，この分解は一意的である．行列値係数多項式 $C(z)=\sum_{j=-a}^{a}C[j]z^j$ が与えられたとき，同伴行列 $\tilde{C}(z)$ を $\tilde{C}(z)\equiv\sum_{j=-a}^{a}C^*[j]z^{-j}$ と定義することにする．ここで $C^*[j]$ は $C[j]$ の共役転置行列を意味する．複素数 z の共役を $\bar{z}$ と表わすこともある．

2.　スペクトル分解：展望

スペクトル因子分解は定常過程予測理論における古典的な問題であるだけではなく，最適制御，ファイルター理論，ネットワーク理論など多様な応用分野をもつ．スカラースペクトルの分解については因子を求めるための一般定式があるが，多変量スペクトルについては，スペクトル密度行列要素がすべて2乗可積分である場合（Masani (1960)）や密度行列が一様に有界である場合（Rozanov (1967)）を除いて，統一的な分解方法は存在しない．有理型行列スペクトル密度に関しては，連続時間スペクトルについてはYoula (1961) が，離散時間スペクトルについてはRozanov (1967, pp. 43-50) が一般的な分解方法を与えている（またその解説については Hannan (1970) を参照)．これらがスペクトル分解法の出発点となる論文であるといえる．

Rozanovの方法については，第3節以下で詳細に検討することになるので，ここではまずYoula (1961) 論文における分解法を紹介する．連続時間定常過程スペクトル密度行列の正則分解への応用を目的として，複素平面上の有理型行列の因子分解について，この論文は3つの定理を与えている．有理型行列（複素変数の有理関数を要素とする行列）のSmith-Mcmillan補助定理によると，$G(z)$ を $m\times n$ のランク r の有理型行列とするとき，

$$G(z)=C(z)D(z)F(z)$$

と分解される，ここで $C(z)$ と $F(z)$ はそれぞれ $m\times r, r\times n$ の基本多項式行列で，$D(z)$ は特定の性質をもつ有理関数を対角要素とする対角行列である（Gantmacher (1959) 参照)．Youla (1961, p. 176, Theorem2) はこの分解定理を出発点として，$G(z)$ が $G(z)=G^*(-\bar{z})$ を満たす $n\times n$ 有理型行列で階数が r であり，$z=i\omega$（ω は実数）にたいして非負定符号であるとすると，$r\times n$ 有理型行列 $H(z)$ が存在して

(1) $G(z)H^*(-\bar{z})H(z)$,

(2) $H(z)$ とその右逆行列 $H_1(z)$ は両方とも $Re(z)>0$ において解析的である，

(3) $H(z)$ は $r\times r$ ユニタリー定数行列の左積を除いて一意的である．すなわち $r\times n$ 行列 $H_2(z)$ が（1），（2）を満足するならば，$H_2(z)=TZ(z)$ となる $r\times r$ 行列 T が存在し，$T^*T=I_r$ が成立する，

(4) $G(z)$ が有限の $z=i\omega$ の上で解析的であるならば，$H(z)$ はある集合 $Re(z)>\tau(\tau>0)$ の上で解析的である，

(5) 有限の $z=i\omega$ の上で $G(z)$ が解析的であり，かつ $rank(G)$ が不変であるならば，$H_1(z)$ はある $Re(z)>\tau_1(\tau_1>0)$ の上で解析的である．

(6) $G(z)$ が実であれば，$H(z)$ は実であり，T は実直交行列である．

Youla (1961) では異なる代替的な分解定理を与えるとともに因子分解の実際的ステップを例示している．しかしその分解過程は純粋に代数的な過程であり，Rozanov 法と共通して，そのままで数値計算アルゴリズムに翻訳することが困難である．

多変量離散時間移動平均過程スペクトル密度関数の分解については，Hannan (1970, p. 66) が次の一般的な結果を与えている：$A[j]$ を $p\times p$ の行列とするとき，

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-a}^{a}A|j|e^{-ij\lambda},\ \pi\leq\lambda<\pi),$$

が非負定符号行列であり，その行列式が恒等的に 0 とならないならば，$f(\lambda)$ を

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{j=0}^{a}\Gamma[j]e^{-ij\lambda}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{a}\Gamma[j]e^{-ij\lambda}\right\}^{*}$$

という形式で表現することができる，ここで $\Gamma[0]$ は正値定符号エルミート行列であり，行列 $det\{\Sigma\Gamma[j]z^{j}\}$ の零点は単位円の上か外にあるとする．このとき表現は一意であり，もし $f(\lambda)$ がスペクトル密度行列であるならば，すなわち $f(\lambda)=\overline{f(-\lambda)}$ が成立するならば，$\Gamma[j]$ は実行列である．Λ が $\exp(-i\lambda)$ の多項式を要素とする行列であるとするとき，$f(\lambda)$ の他のすべての分解表現 $\Lambda\Lambda^{*}$ は

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{0}^{a}\Gamma[j]e^{-ij\lambda}\right\}U(e^{-i\lambda})U^{*}(e^{-i\lambda})\left\{\sum_{0}^{a}\Gamma[j]e^{-ij\lambda}\right\}^{*}$$

という形式で表される，ただし U は殆どすべての λ にたいしてユニタリー行列であり，$U(z)$ は単位円の内側で正則である．

Li (2005) は，p-ベクトル移動平均過程

$$y(t)=\sum_{k=0}^{a}\Gamma[k]\varepsilon(t-k)$$

のスペクトル密度関数 $f(z)$ の正準分解 $f(z)=B(z)DB'(z^{-1})$ を考察している，ここで $B(z)=\Sigma_{k=0}^{b}B[k]z^{k}$, D は $p\times p$ 正値定符号行列である．また $f(e^{-i\lambda})=\Sigma_{k=-a}^{a}R[k]e^{-ik\lambda}$ は殆どいたるところ正値定符号であるとする．移動平均モデルを状態空間モデル

$$\begin{cases}y(t)=Cx(t)+\varepsilon(t)\\ x(t)=Ax(t-1)+B_{\varepsilon}(t-1)\end{cases}$$

と表現すると，$B(z)$ はつぎの関係式から求めることができる：

$$\begin{cases}D=R(0)-C\Psi C'\\ B=(M-A\Psi C')(R(0)-C\Psi C')^{-1},\end{cases}$$

ここで$M=(R[1]', R[2]', \ldots, R[a]')'$, $B=(B[1]', B[2]', \ldots, B[a]')'$, $C=(\overbrace{I_p, O_p, \ldots, O_p}^{a\text{個のブロック}})$である．さらに Ψ はつぎのリカッチ方程式の正値解である

$$\Psi=A\Psi A'+(M-A\Psi C')(R(0)-C\Psi C')^{-1}(M-A\Psi C')'.$$

こうして正準分解アルゴリズムは Ψ を数値的に求めるにはいかなる逐次法がよいかという問

題に帰着する．Li (2005) は，移動平均の積み重ねによって1次の移動平均モデルに簡約化して，対応するリカッチ方程式を Lancaster-Rodman (1995) が提案したニュートン反復法で数値的に解くことを提案している．この方法の特徴は Rozanov 法のように代数方程式の解についての正確な知識を必要としないことである．関連論文をあげると，Tuel (1968) も有理型スペクトル行列の分解問題をリカッチ型非線形方程式の解法に帰着している．Wilson (1972) と Ježek-Kučera (1985) は分解問題に対してニュートン法にもとづいた反復解を提案している．

スカラー過程について，単位円上で正値であるローラン多項式の分解という視点からサーベイを行った論文に Goodman et al. (1997) と Sayed-Kailath (2001) がある．さらに Kailath (2000，第7，8章) も関連する問題を議論している．Sayed-Kailath 論文は，もっぱらスカラー値有理型スペクトルの分解を対象として，Bauer 法，Shur 法，Levinson-Durbin 法，リカッチ反復法，CKMS 法などを展望している．Bauer 法では，移動平均スペクトル多項式係数から形成される増加次数を増加させるテプリッツ行列の入れ子型系列のコレスキー分解における因子行列の最終行から必要とされる正準因子が漸近的に構成される．Shur 法では，初期関数から出発して逐次的に構成されるシューア関数列の漸近的関数として正準因子が形成され，有理型スペクトルに適用される（関連論文として，さらに Oară and Varga (2000) がある)．

MA スペクトル密度行列分解を扱った論文としては，さらに Reinsel (1987, pp.56–57) と Poskitt and Salau (1993) があるが，後者の計算法は多項式を要素とする行列を，ユークリッド整除アルゴリズムを用いてエルミート正規形に帰着しているが，整除 $g(z)/(z-\alpha)$ が正確に遂行されることを仮定している．

これら文献に見られる接近法とは対照的に，本論文では，反復法に依存せずに，外関数 (outer function)，Rozanov アルゴリズム，直接最小二乗法を組み合わせて有限ステップで確定的な解を導出する方法を提案する．本論文で提案する計算過程は多段階法であるが，ニュートン法やリカッチ方程式法といった反復収束法は使用していない．Rozanov 法では，各計算ステップは先行ステップで正確な数値計算結果が生み出されることを前提としているため，先行ステップにおける計算誤差にたいして後続ステップがいかに対処するかといった実際的問題には答えない．これは Youla (1961) についても言えることである．むしろ数値計算の各ステップにおいて，代数的に予想される構造を数値結果に盛り込めるようなアルゴリズムが望ましい．そのようなアルゴリズムを提案することが以下の3節から5節の目的である．

3. スカラー値移動平均スペクトルの分解

本節ではスペクトル密度 g が

$$2\pi g(e^{-i\lambda})=\sum_{k=-a}^{a} g[k]\exp(-ik\lambda)\ (g[a]\neq 0) \tag{3.1}$$

という形で与えられるとき（ただし，$g[k]=g[-k]$), $1/2\pi\,\gamma(e^{-i\lambda})\gamma(e^{-i\lambda})^{*}=g(e^{i\lambda})$ を成立させる正準因子 $\gamma(z)=\Sigma_{j=0}^{a}\beta_j z^j$ を求める問題を考える．数値的に代数方程式 $z^a g(z)=0$ を直接的に解き，絶対値が1に等しいか大きい解を取り出すことは，a が大きいとき，次数が非常に高い代数方程式を解く必要があるが，その場合しばしば高い精度は期待できなくなる．多変量モデルを扱う場合，MA 次数が低くても，問題となる方程式次数が高くなることがしばしばある．代数方程式を数値的に解く代わりの方法は，$\sqrt{2\pi g(e^{-i\lambda})}$ の外関数（outer function）を三角関数の上に最小2乗回帰することであり，この方法により比較的少ない計算量で方程式次数が高くても数値的に正確な正準因子の推定値をえることができる．H^1 関数の分解定理より，正準因子 $\gamma(z)$ について，

$$\gamma(z)=\sqrt{2\pi}\exp\left[\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\log g(e^{-i\lambda})d\lambda\right] \tag{3.2}$$

が $|z|<1$ に対して成立する．(3.2) 式を証明するために $\gamma(z)$ が正準因子であるとすると，それは H^2-関数であるから，

$$F(z)\equiv\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\log|r(e^{-i\lambda})|d\lambda\right\} \tag{3.3}$$

とおくと，$F(z)$ は単位円内部において非ゼロであり解析的である外関数となる［Hoffman (1962) を参照]．ここで正準因子という性質から $(2\pi)^{-1}|\gamma(e^{-i\lambda})|^2=g(e^{-i\lambda})$ が成立するから，

$$\begin{aligned}&\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\log|\gamma(e^{-i\lambda})|d\lambda\right\}\\&=\exp\left[\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\log\frac{1}{2\pi}|\gamma(-e^{-i\lambda})|^2d\lambda+\log\sqrt{2\pi}\right]\\&=\sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\log g(e^{-i\lambda})d\lambda\right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

が成立する．(3.4) において

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}d\lambda=1$$

という関係を用いている．したがって (3.3) から $|F(e^{-i\lambda})|=|\gamma(e^{-i\lambda})|$ が成立する．こうして $F(e^{-i\lambda})$ が $g(e^{-i\lambda})$ の求める因子 $\gamma(e^{-i\lambda})$ となり，(3.2) の右辺を用いて $\gamma(z)$ を求めることができる［同様な議論について Grenander and Rosenblatt (1957), p. 57 を参照]．$g(e^{-i\lambda})$ の正準因子を数値的にもとめるために，関係 (3.2) を用いることにする．十分に大きい正整数 m と正奇数 n を選ぶ．$|r_h|<1$ となるように異なる正数値列 r_h, $h=1, \dots, m$ を選び，$\lambda_j=2\pi j/n$, $j=0, \dots, n-1$, と $z_{hj}=r_he^{i\lambda_j}$ を設定する．デザイン集合 z_{hj} の上で (3.2) を $\Sigma_{k=0}^{a}\beta[k]z^k$ で近似する．すなわち平方和

$$\begin{aligned}S(\beta)&=\sum_{h,j}|\gamma(z_{hj})-\sum_{k=0}^{a}\beta[k]z_{hj}^k|^2=\sum_{h,j}|\gamma(z_{hj})-\sum_{k=0}^{a}\beta[k]r_h^ke^{i\lambda_jk}|^2\\&=\sum_{h,j}[\gamma_R(z_{hj})-\sum_{k=0}^{a}\beta_kr_h^k\cos(\lambda_jk)]^2+\sum_{h,j}|\gamma_I(z_{hj})-\sum_{k=0}^{a}\beta[k]_h^j\sin(\lambda_jk)|^2\end{aligned} \tag{3.5}$$

を考える．ここで

$$\gamma_R(z_{hj})=\sqrt{2\pi}\,Re\left[\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}+z_{hj}}{e^{-i\lambda}-z_{hj}}\log g(e^{-i\lambda})d\lambda\right\}\right]$$

であり，$\gamma_I(z_{hj})$ は同伴虚数部をあらわす．(3.5) の平方和最小化の 1 次条件 $\partial S(\beta)/\partial\beta_l=0, l=0, 1, \dots, a$ から

$$\sum_{k=0}^{a}\beta[k]\sum_{h=1}^{m}r_h^k r_h^l\left[\sum_{j=0}^{n=1}\cos(\lambda_j l)\cos(\lambda_j k)+\sum_{j=0}^{n-1}\sin(\lambda_j l)\sin(\lambda_j k)\right]$$
$$=\sum_{h=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\{\cos(\lambda_j l)\gamma_R(z_{hj})+\sin(\lambda_j l)\gamma_I(z_{hj})\}\,r_h^l$$

という関係が導かれる．ここでフーリエ周波数におけるよく知られた関係

$$\begin{aligned}\Sigma_{j=0}^{n-1}\cos(\lambda_j l)\cos(\lambda_j k)\ &=n, & l=k=0\\ &=n/2, & l=k\neq 0\\ &=0, & \text{その他；}\\ \Sigma_{j=0}^{n-1}\sin(\lambda_j l)\sin(\lambda_j k)\ &=n/2, & l=k\neq 0\\ &=0, & \text{その他,}\end{aligned}$$

を用いて，推定値

$$\hat{\beta}[l]=\{n\sum_{h=1}^{m}(r_h^l)^2\}^{-1}[\sum_{h=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\{\cos(\lambda_j l)\gamma_R(z_{hj})+\sin(\lambda_j l)\gamma_I(z_{hj})\}\,r_h^l],$$
$$l=0,1,\ldots,a \tag{3.6}$$

が得られる．

注1：(3.6) の計算量は a が大きくても過大とはならないから，この最小二乗推定法はスカラー MA スペクトルの分解に適しているばかりでなく，伝達関数の正準形を非母数推定する目的にも用いることが出来る．時系列 $x_1,\ldots,x_N$ が与えられたときに，(3.2) の $g(e^{-ei\lambda})$ をピリオドグラム $1/2\pi|\Sigma_{j=1}^{N}x_je^{ij}|$ の平滑化関数に，また a を m_N に等しいと置いて，$m_N\to\infty$ でありかつ $m_N/N\to 0$ となるように選ぶ．そのとき $\Sigma_{j=0}^{m_N}\hat{\beta}[j]e^{ij\lambda}$ は非母数スペクトル密度正準因子の推定値であり，$1/2\pi|\Sigma_{j=0}^{m_N}\hat{\beta}[j]e^{ij\lambda}|^2$ は平滑化されたピリオドグラムとなる．

4. 2×2 MA スペクトル行列

スペクトル密度行列 $g(e^{-i\lambda})=\{g_{hj}(e^{-i\lambda}),1\leq h,j\leq 2\}$ が実数値係数 $g_{hj}[k]$ によって

$$2\pi g_{hj}(e^{-i\lambda})=\sum_{k=-a}^{a}g_{hj}[k]\exp(-ik\lambda) \tag{4.1}$$

と表わされ，また行列 $g(e^{-ei\lambda})$ はほとんど全ての λ にたいして非退化であると仮定する．そのとき関数 $g_{hj}(z)\equiv\Sigma_{k=-a}^{a}g_{hj}[k]z^k$ は

$$g(z)=\Gamma(z)\tilde{\Gamma}(z) \tag{4.2}$$

と分解される．ここで標準因子行列 $\Gamma(z)$ は単位円内で解析的であり，非退化である (Rozanov (1967), p. 72 を参照).

以下では，2×2 スペクトル密度行列の数値的分解過程を示す．$g(z)$ の要素を

$$g(z)=\begin{bmatrix}g_{11}(z) & g_{12}(z)\\ g_{21}(z) & g_{22}(z)\end{bmatrix}$$

と書く．ここで $g(e^{-ei\lambda})$ はエルミート行列であるから $g_{12}(z)=\tilde{g}_{21}(z)$ が成立する．前節のスカラー値密度関数の分解方法を用いて

$$g_{11}(z)=h_1(z)\tilde{h}_1(z),\ g_{11}(z)g_{22}(z)-g_{21}(z)g_{12}(z)=h_2(z)\tilde{h}_2(z) \tag{4.3}$$

を得る．ここで $h_1(z)$ と $h_2(z)$ はそれぞれ a-次，$2a$-次の z の多項式である．$h_1(z)$ は正準であり，その零点はすべて単位円の上か外部にあるため，

$$z^a\tilde{h}_1(z)=\alpha_0\Pi_{j=1}^{a}(z-\alpha_j)$$

と因子分解すると，$|\alpha_j|\leq 1,\ j=1,\ldots,a$ が成立する．(4.3) より因子分解

$$\begin{aligned} g(z)&=\begin{bmatrix} g_{11} & \tilde{g}_{21} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} z^a\tilde{h}_1 & 0 \\ z^a g_{21}h_1^{-1} & h_2h_1^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^{-a}h_1 & z^{-a}\tilde{g}_{21}\tilde{h}_1^{-1} \\ 0 & \tilde{h}_2\tilde{h}_1^{-1} \end{bmatrix} \\ &\equiv\Gamma^{(0)}(z)\tilde{\Gamma}^{(0)}(z) \end{aligned} \tag{4.4}$$

が成立する．行列 $\Gamma^{(0)}(z)$ の各要素は解析的であるが，$z^a\tilde{h}_1(\alpha_j)=0,\ j=1,\ldots,a$, であるため，行列としては単位円の内部で全階数 (full rank) ではない．$\Gamma^{(0)}(z)$ の行列式の零点は次のようにして除去できる．$\Gamma^{(1)}(z)$ を

$$\Gamma^{(1)}(z)=\begin{bmatrix} z^a\tilde{h}_1 & 0 \\ z^a g_{21} & h_2 \end{bmatrix}$$

と定義すると，

$$\Gamma^{(0)}(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_1^{-1} \end{bmatrix}\Gamma^{(1)}(z)$$

が成立する．$\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\cdot)$ と $\tilde{\Gamma}_{2\cdot}^{(1)}(\cdot)$ をそれぞれ行列 $\tilde{\Gamma}^{(1)}(\cdot)$ の第2列と第2行からなる 2×1，1×2 ベクトルとする．2×2 ユニタリー行列

$$B^{(1)}=\begin{bmatrix} B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

を以下のステップで構成する：

- $\Gamma^{(1)}(\alpha_1)$ を評価して，$\tilde{\Gamma}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})$ を $\Gamma^{(1)}(\alpha_1)^*$ に等しいと置く．
- $B_{\cdot 2}^{(1)}$ を $B_{\cdot 2}^{(1)}=\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})/\|\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})\|$ と置く．
- 2×1-ベクトル $B_{\cdot 1}^{(1)}$ を $\|B_{\cdot 1}^{(1)}\|=1$ であり $B_{2\cdot}^{(1)}(\alpha_1)B_{\cdot 1}^{(1)}=0$ となるように選ぶ．そのようなベクトルを得るには，$(1,0)'$ と $(0,1)'$ を $B_{\cdot 2}^{(1)}$ の上に回帰して，$B_{\cdot 1}^{(1)}$ を二つの回帰のうち平方和が大きい方の残差に等しいと置けばよい．そこで $B^{(1)}$ を $B^{(1)}=(B_{\cdot 1}^{(1)}, B_{\cdot 2}^{(1)})$ と置く．

この構成法から $B^{(1)*}B^{(1)}=B^{(1)}B^{(1)*}=I_2$ が成立し，したがって $g(z)$ は

$$g(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_1^{-1} \end{bmatrix}\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}B^{(1)*}\tilde{\Gamma}^{(1)}(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{h}_1^{-1} \end{bmatrix}$$

と分解される．ここで

$$\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}\begin{bmatrix} z^a\tilde{h}_1 & 0 \\ z^a g_{21} & h_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z^a\tilde{h}_1B_{11}^{(1)} & z^a\tilde{h}_1B_{12}^{(1)} \\ \tilde{\Gamma}_{2\cdot}^{(1)}B_{\cdot 1}^{(1)} & \tilde{\Gamma}_{2\cdot}^{(1)}B_{\cdot 2}^{(1)} \end{bmatrix}$$

が成立する．$\tilde{h}_1(\alpha_1)=0$ となるため，$\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}$ の（1,1）と（1,2）要素は因子 $(z-\alpha_1)$ を共有する．一方，$\Gamma_{2\cdot}^{(1)}(\alpha_1)B_{\cdot 1}^{(1)}=0$ であるから，(2,1) 要素も因子 $(z-\alpha_1)$ を持つ．他方，$B_{\cdot 2}^{(1)}$ の構成法から，$\Gamma_{2\cdot}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})B_{\cdot 2}^{(1)}=0$ となり，(2,2) 要素は因子 $(\bar{\alpha}_1 z-1)$ を持つ．ここで

$$A^{(1)}(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{\bar{\alpha}_1 z-1}{z-\alpha_1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

と置くと，積 $A^{(1)}(z)\tilde{A}^{(1)}(z)$ の（1,1）要素は

$$\frac{\bar{\alpha}_1 z-1}{z-\alpha_1}\,\frac{\alpha_1 z^{-1}-1}{z^{-1}-\bar{\alpha}_1}=\frac{\bar{\alpha}_1 z-1}{z-\alpha_1}\,\frac{(\alpha_1-z)/z}{(1-\bar{\alpha}_1 z)/z}=\frac{\bar{\alpha}_1 z-1}{z-\alpha_1}\,\frac{\alpha_1-1}{1-\bar{\alpha}_1 z}=1$$

となるため，

$$A^{(1)}(z)\tilde{A}^{(1)}(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{\bar{\alpha}_1 z-1}{z-\alpha_1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_1 z^{-1}-1}{z^{-1}-\bar{\alpha}_1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

が成立する．したがって，$B^{(1)}A^{(1)}(z)\tilde{A}^{(1)}(z)B^{(1)*}=I_2$ を得る．要素間の通分を考慮して，行列

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\bar{\alpha}_1 z-1}\end{bmatrix}\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}A^{(1)}(z)=\begin{bmatrix}z^a\tilde{h}_1 B_{11}^{(1)}\dfrac{\bar{\alpha}_1 z-1}{z-\alpha_1} & z^a\tilde{h}_1 B_{12}^{(1)}\\ \Gamma_{2\cdot}^{(1)}B_{\cdot 1}^{(1)}\dfrac{\bar{\alpha}_1 z-1}{z-\alpha_1}\,\dfrac{1}{\bar{\alpha}_1 z-1} & \Gamma_{2\cdot}^{(1)}B_{\cdot 2}^{(1)}\dfrac{1}{\bar{\alpha}_1 z-1}\end{bmatrix} \tag{4.5}$$

の各要素に最小二乗法を適用する．ここで左辺の最初の行列は因子 $diag\{1, h_1(z)^{-1}\}$ である．具体的には，これは次のように実行される：

- (4.5) 式の右辺の行列の（1,1）要素は $\Sigma_{k=0}^{a} d_k z^k$ という形になり，また分母 $(z-\alpha_1)$ は $|z|>1$ となる零点がないことを考慮して，$z_{hj}=r_h e^{i\lambda_j}$, $|r_h|>1$ をデザイン集合として，(1,1) 要素を $1, \dots, z^a$ の上に回帰して d_k を推定する．
- (1,2) 要素を $\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}$ の（1,2）要素に等しいと置く．
- (2,1) と（2,2）要素は $\Sigma_{k=0}^{2a-1} d_k z^k$ という形に簡約される，何故ならば分母の因子 $z-\alpha_1$ と $\bar{\alpha}_1 z-1$ はそれぞれ分子の対応する因子と通分できるからである（証明については次節の (5.3) と（5.4）を参照)．各々を $1, z, \dots, z^{2a-1}$ に回帰するが，(2,1) の分母は因子 $(z-\alpha_1)$ を含み，(2,2) の分母は因子 $(\bar{\alpha}_1 z-1)$ を含むため，前者については $|r_h|>1$，後者については $|r_h|<1$ と設定する．

ここで

$$\Gamma^{(2)}(z)\equiv diag(1,(\bar{\alpha}_1 z-1)^{-1})\;\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}A^{(1)}(z)$$

と置く．$B^{(1)}$ の構成と同様に，ユニタリー行列 $B^{(2)}$ を，$\Gamma^{(2)}(z)$ と根 α_2 を用いて，構成することができる．この計算過程を繰り返すことで $\Gamma^{(k)}(z)$ と $B^{(k)}$, $k=3, \dots, \alpha$ が順次決定する．$g(z)$ の正準因子は次の積

$$\Gamma(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & h_1^{-1}\end{bmatrix}\Gamma^{(1)}B^{(1)}A^{(1)}(z)B^{(2)}A^{(2)}(z)\cdots B^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(z)$$

として求まる．以上の構成法から，$\Gamma(z)$ は，すべての根 $\alpha_1, \dots, \alpha_\alpha$ が除去されたことにより，

単位円内において全階数行列である．こうして正準分解 $g(z)=\Gamma(a)\tilde{\Gamma}(a)$ が最終的に得られる．

5. 一般的な MA スペクトル

(4.1) における $g(z)$ が $p\times p$ 行列 $(p\geq 3)$ である場合を扱うためには，以下の前進後退法が有効である．各 k, $-a\leq k\leq a$ にたいして $\{g_{ij}[k], 1\leq i,j\leq p\}$ は $p\times p$ 実対称行列であると仮定し，$g(z)\{\sum_{k=-a}^{a} g_{ij}[k]z^k, i,=1, \ldots, p\}$ と置く．行列 $g(z)$ が

$$g(z)=\begin{bmatrix} g_{11}(z) & G_{12}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) \end{bmatrix}$$

と分割されているものとする，したがって $g_{22}(z)$ は $g(z)$ の $(p-1)\times(p-1)$ の下部対角ブロックである．ここで単位円内において解析的，全階数である $(p-1)\times(p-1)$ 行列 $H_2(z)$ があり，

$$g_{11}(z)G_{22}(z)-G_{21}(z)G_{12}(z)=H_2(z)\tilde{H}_2(z) \tag{5.1}$$

が成立するものと仮定する．(4.3) におけるように，

$$\begin{aligned} g(z)&=\begin{bmatrix} z^a\tilde{h}_1 & 0 \\ z^aG_{21}h_1^{-1} & H_2h_1^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^{-a}h_1 & z^{-a}G_{12}\tilde{h}_1^{-1} \\ 0 & H_2\tilde{h}_1^{-1} \end{bmatrix} \\ &\equiv\Gamma^{(0)}(z)\tilde{\Gamma}^{(0)}(z) \end{aligned} \tag{5.2}$$

と分解される．(4.2) と同様に $g_{11}(z)$ の正準因子を $h_1(z)$ と表すと．$\Gamma^{(1)}(z)$ は

$$\Gamma^{(1)}(z)=\begin{bmatrix} z^a\tilde{h}_1 & 0 \\ z^aG_{21} & H_2 \end{bmatrix}$$

と置くことにより，(4.3) と同様に

$$\Gamma^{(0)}(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_1^{-1}I_{p-1} \end{bmatrix}\cdot\Gamma^{(1)}(z)$$

が成立する．

$p\times p$ ユニタリー行列 $B^{(1)}$ を次のようにして構成する．$\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\cdot)$ を $\tilde{\Gamma}^{(1)}(\cdot)$ からその第1列を除去して得られる $p\times(p-1)$ 行列であり，$\Gamma_{2\cdot}^{(1)}(\cdot)$ を $\Gamma^{(1)}(\cdot)$ からその第1行を除去して得られる $(p-1)\times p$ 行列であるとする．さらに $B_{\cdot 2}^{(1)}$ を $\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\cdot)(\bar{\alpha}_1^{-1})$ の直交正規化列ベクトルからなる，したがって

$$B_{\cdot 2}^{(1)*}B_{\cdot 2}^{(1)}=I_{p-1}$$

が成立する，$p\times(p-1)$ 複素数値行列となるように構成する．(5.1) と $g_{11}(\bar{\alpha}_1^{-1})=0$ より

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\cdot}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})&=G_{21}(\bar{\alpha}_1^{-1})G_{12}(\bar{\alpha}_1^{-1})+H_2(\bar{\alpha}_1^{-1})\tilde{H}_2(\bar{\alpha}_1^{-1}) \\ &=g_{11}(\bar{\alpha}_1^{-1})G_{22}(\bar{\alpha}_1^{-1}) \\ &=0 \end{aligned}$$

が成立し，また $B_{\cdot 2}^{(1)}$ の列ベクトルは $\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})$ の列ベクトルの線形結合であるから，

$$\Gamma_{2\cdot}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})B_{\cdot 2}^{(1)}=0 \tag{5.3}$$

が成立する．$\|B_{\cdot 1}^{(1)}\|=1$ であり，

$$\Gamma_{2\cdot}^{(1)}(\alpha_1)B_{\cdot 1}^{(1)}=0 \tag{5.4}$$

が成立するように p-ベクトル $B_{\cdot 1}^{(1)}$ を選ぶ．(5.4) は共役転置した形では，

$$B_{\cdot 1}^{(1)*}\tilde{\Gamma}_{\cdot 2}^{(1)}(\bar{\alpha}_1^{-1})=B_{\cdot 1}^{(1)*}B_{\cdot 2}^{(1)}=0$$

を意味する．$B^{(1)}=[B_{\cdot 1}^{(1)}, B_{\cdot 2}^{(1)}]$ と置くと，$B^{(1)}B^{(1)*}=B^{(1)*}B^{(1)}=I_p$ が成り立つ．さて

$$\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}\equiv\Delta^{(1)}(z)=\begin{bmatrix}\Delta_{11}^{(1)}(z) & \Delta_{12}^{(1)}(z)\\ \Delta_{21}^{(1)}(z) & \Delta_{22}^{(1)}(z)\end{bmatrix}$$

を対応する分割とする，ここで $\Delta_{22}^{(1)}(z)$ は $(p-1)\times(p-1)$ 行列である．そのとき，(5.3) と (5.4) より，ベクトル $\Delta_{21}^{(1)}(z)$ は共通因子 $(z-\alpha_1)$ を持ち，$\Delta_{22}^{(1)}(z)$ は因子 $(1-\bar{\alpha}_1 z)$ を持つ．ここで

$$\Gamma^{(2)}(z)=\Gamma^{(1)}(z)B^{(1)}\begin{bmatrix}\dfrac{1-\bar{\alpha}_1 z}{z-\alpha_1} & 0\\ 0 & I_{p-1}\end{bmatrix}$$

と置くとき，$\Gamma^{(2)}(z)\tilde{\Gamma}^{(2)}(z)=\Gamma^{(1)}(z)\tilde{\Gamma}^{(1)}(z)$ という関係が成立する．行列 $\Gamma_{21}^{(2)}(z)$ と $\Gamma_{22}^{(2)}(z)$ は共通因子を $(\bar{\alpha}_1 z-1)$ をもつ．同様に，行列の系列 $\Gamma^{(m)}(z)$, $m=3, \ldots, a+1$, を

$$\Gamma^{(m+1)}(z)=\Gamma^{(m)}B^{(m)}\begin{bmatrix}(1-\bar{\alpha}_m z)/(z-\alpha_m) & 0\\ 0 & I_{p-1}\end{bmatrix}$$

$m=2, \ldots, a$, という逐次公式にしたがって構成することができる．ここで $\Gamma_{21}^{(m+1)}(z)$ と $\Gamma_{22}^{(m+1)}(z)$ の共通因子 $(\bar{\alpha}_m z-1)$ は後続の行列 $\Gamma_{21}^{(j)}(z)$ と $\Gamma_{22}^{(j)}(z)$, $j=m+2, \ldots, a+1$, において保持されるから，最終行列 $\Gamma_{21}^{(a+1)}(z)$ と $\Gamma_{22}^{(a+1)}(z)$ が共通因子

$$h_1(z)=(\bar{\alpha}_1 z-1)(\bar{\alpha}_2 z-1)\cdots(\bar{\alpha}_a z-1)$$

をもつことに注意する．したがって

$$\Gamma(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & h_1^{-1}I_{p-1}\end{bmatrix}\Gamma^{(a+1)}(z)$$

と置くことにより，(5.2) から

$$g(z)=\Gamma(z)\tilde{\Gamma}(z)$$

が成立する，ここで行列 $\Gamma(z)$ の各要素は z の a-次多項式であり，$det\,\Gamma(z)$ は単位円内に零点をもたない．これまで述べてきた分解アルゴリズムは $(p-1)\times(p-1)$ 行列

$$G_{22}^{(p-1)}(z)\equiv g_{11}(z)G_{22}(z)-G_{21}(z)G_{12}(z).$$

の正則分解が得られることを前提としている．行列の系列 $G^{(j)}(z)$, $j=p-1, p-2, \ldots, 2$, が逐次的に

$$\begin{aligned}G^{(j)}(z)&\equiv g_{11}^{(j+1)}(z)G_{22}^{(j+1)}(z)-G_{21}^{(j+1)}(z)G_{12}^{(j+1)}(z)\\ &\equiv\begin{bmatrix}g_{11}^{(j)}(z) & G_{12}^{(j)}(z)\\ G_{21}^{(j)}(z) & G_{22}^{(j)}(z)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

として定義されるものとする．等式の最右辺の分割は $(1, j-1)$ 対 $(1, j-1)$ である．行列 $G^{(j)}(z)$ の正準分解は $G^{(j-1)}(z)$ の正準分解にもとづいて行われる．こうして問題は $G^{(2)}(z)$ の分解に帰着するが，これはすでに第3節で扱った．結論として，$g(z)$ のみの知識から出発して系列 $G^{(p-1)}(z), G^{(p-1)}(z), \ldots, G^{(2)}(z)$, が構成され，逆に $G^{(2)}(z)$ の分解から出発して $G^{(j)}(z), j=3, \ldots, p$, の正準分解がすでに分解された $G^{(j-1)}(z)$ にもとづいて順次実行される．$g(z)=\Gamma(z)\tilde{\Gamma}(z)$ の分解はこれらのステップの最終結果として得られる．

第3節の回帰推定及び本節で示した計算法の実際の数値例を用いた精度の検討については，Hosoya and Takimoto (2006) を参照.

6. 多変量 ARMA スペクトル

これまで説明した分解アルゴリズムはスペクトル密度行列の各要素が $e^{-i\lambda}$ の有理関数で与えられる ARMA スペクトルの場合に拡張できる．2×2 全階数スペクトル密度行列 $g(e^{-ei\lambda})$ を考えるここで，$g(z)$ はその (i, j) 要素が実数値係数を用いて

$$g_{ij}(z)=\sum_{k=-b}^{b} g_{ij}^{(n)}[k]z^k\Big/\Big(\sum_{k=-a}^{a} g_{ij}^{(d)}[k]z^k\Big) \tag{6.1}$$

として与えられる行列であり，ある (i, j) に対して $g_{ij}^{(n)}[b]\neq 0, g_{ij}^{(d)}[a]\neq 0$ となるものとする．以下では，g の分母分子は共通の零点をもたないことを仮定する．有理関数スペクトル行列の場合，(4.3) に対応する分解は

$$g_{11}(z)=\frac{h_1^{(n)}(z)\tilde{h}_1^{(n)}(z)}{h_1^{(d)}(z)\tilde{h}_1^{(d)}(z)} \quad g_{11}(z)g_{22}(z)-g_{21}(z)g_{12}(z)=\frac{h_2^{(n)}(z)\tilde{h}_2^{(n)}(z)}{h_2^{(d)(z)}\tilde{h}_2^{(d)}(z)}.$$

という形となる．また，(4.4) に対応する分解は

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} g_{11}(z) & \tilde{g}_{21}(z) \\ g_{21}(z) & g_{22}(z)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix} \tilde{h}_1^{(n)}(z)/\tilde{h}_1^{(d)}(z) & 0 \\ g_{21}^{(n)}(z)h_1^{(d)}(z)/(g_{21}^{(d)}(z)h_1^{(n)}(z)) & h_2^{(n)}(z)h_1^{(d)}(z)/(h_2^{(d)}(z)h_1^{(n)}(z))\end{bmatrix} \\ &\quad\cdot\begin{bmatrix} h_1^{(n)}(z)/h_1^{(d)}(z) & \tilde{g}_{21}^{(n)}(z)\tilde{h}_1^{(d)}(z)/(\tilde{g}_{21}^{(d)}(z)\tilde{h}_1^{(n)}(z)) \\ 0 & \tilde{h}_2^{(n)}(z)\tilde{h}_1^{(d)}(z)/(\tilde{h}_2^{(d)}(z)\tilde{h}_1^{(n)}(z))\end{bmatrix} \\ &=\Gamma^{(0)}(z)\tilde{\Gamma}^{(0)}(z).\end{aligned} \tag{6.2}$$

という形をとる，ここで $g_{21}^{(n)}$ と $g_{21}^{(d)}$ は g_{21} の分子と分母を示す．$\tilde{h}_1^{(d)}, g_{21}^{(d)}$ の単位円内の零点をそれぞれ $R_1=\{\gamma_1^{(1)}, \ldots. \gamma_{r_1}^{(1)}\}$ と $R_2=\{\gamma_1^{(2)}, \ldots. \gamma_{r_2}^{(2)}\}$ と表わす．ここで，重複点をそのとおり含むものとする．そこで $R=\{\gamma_1, \ldots. \gamma_r\}=\{\gamma_1^{(1)}, \ldots. \gamma_{r_1}^{(1)}\}\cup=\{\gamma_1^{(2)}, \ldots. \gamma_{r_2}^{(2)}\}$ と置く．また R_1' と R_2' によって R_1 と R_2 の R における補集合を表すものとする．ここで

$$\Gamma^{(1)}(z)=\Gamma^{(0)}(z)\begin{bmatrix} [\Pi_{\gamma\in R}(\bar{\gamma}z-1)/\Pi_{\gamma\in R}(z-\gamma)]^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

と置く．基本的な考え方は，分母における因子で単位円内に零点をもつものを分子へ移動し，分子におけるこれらの零点は第3節で説明した方法で除去するということである．この変換は $\tilde{h}_1^{(d)}$ から零点 R_1 を $g_{2.}^{(d)}$ からは零点 R_2 を除去し，$\Gamma^{(1)}(z)$ の分母をすべて $|z|<1$ において解析的にする．ここで次のように定義する：$k_{11}^{(n)}(z)\equiv\tilde{h}_1^{(n)}(z)\Pi_{\gamma\in R_1'}(z-\gamma), k_{11}^{(d)}(z)\equiv\tilde{h}_1^{(d)}(z)\Pi_{\gamma\in R}(\bar{\gamma}z-1)/\Pi_{\gamma\in R_1}(z-\gamma)$ と $k_{21}^{(n)}(z)\equiv g_{21}^{(n)}h_1^{(d)}(z)\Pi_{\gamma\in R_2'}(z-\gamma), k_{21}^{(n)}(z)\equiv g_{21}^{(d)}(z)h_1^{(d)}(z)\Pi_{\gamma\in R_1}(\bar{\gamma}z-1)/\Pi_{\gamma\in R_2}(z-\gamma)$．そのとき，$\Gamma^{(1)}(z)$ の要素は

$$\Gamma^{(1)}(z)=\begin{bmatrix} k_{11}^{(n)}(z)/k_{11}^{(d)}(z) & 0 \\ k_{21}^{(n)}(z)/k_{22}^{(d)}(z) & h_2^{(n)}(z)h_1^{(d)}(z)/(h_2^{(d)}(z)h_1^{(n)}(z)) \end{bmatrix}$$

となる．(6.2) から

$$\begin{bmatrix} g_{11}(z) & \tilde{g}_{21}(z) \\ g_{21}(z) & g_{22}(z) \end{bmatrix}=\Gamma^{(1)}(z)\tilde{\Gamma}^{(1)}(z) \tag{6.4}$$

が成立する．$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ を単位円内に存在する $k_{11}^{(n)}(z)$ の零点であるとすると，これらは第4節のアルゴリズムによって除去できる．

(6.4) における単位円内零点の除去は，次数が3以上の有理型行列へ容易に拡張することができる．また分子におけるこれらの零点は第5節の方法と同様にして除去される．

7. 偏因果測度

7.1. 定常過程の場合

第7節では第3系列効果の除去法，偏因果測度と関連する定理，再現可能過程への拡張，周波数帯因果測度などを取り上げる．$\{x(t), y(t), z(t); t\in\mathbb{Z}\}$ は平均0のベクトル値2次定常過程であるとする．有限分散確率変数の空間における和集合 $\{x_j(t); t\in\mathbb{Z}, j=1, \ldots, p_1\}\cup\{y_k(t); t\in\mathbb{Z}, k=1, \ldots, p_2\}\cup\{z_l(t); t\in\mathbb{Z}, l=1, \ldots, p_3\}$ の線形包の平均2乗に関する閉包であるヒルベルト空間を H で表わす．ここで $x_j(t)$ の添え字はベクトル $x(t)$ の第 j 要素を表す．確率ベクトル H のある閉部分空間 $H(\cdot)$ へ $w=\{w_j; j=1, \ldots, s\}$ を射影するとは，要素ごとの直交射影，すなわち $\bar{w}_j$ を w_j への直交射影 $H(\cdot)$ とするとき，その第 j-要素が $\bar{w}_j$ であるベクトル $\bar{w}$ を意味することとする．3系列システム $\{x(t), y(t), z(t)\}$ において，$z(t)$ の一方向効果 (one-way effect) 要素とは，ベクトル集合 $\{x(s), y(s), z(s-1), -\infty<s\leq t\}$ の要素によって張られる閉線形部分空間 $H\{x(t), y(t), z(t-1)\}$ への $z(t)$ の射影残差 $z(t)-\bar{z}(t)$ と定義し，この一方向効果を $z_{0,0,-1}(t)$ と表すことにする．

2系列間では明確に定義される Granger 因果性概念も，第3の系列が存在する場合には，この第3系列とのフィードバックあるいは，この系列を経由したフィードバック関係のために，その意味内容が不明確となる．第3系列との相互作用は問題としている2系列の間に「見かけ上の」因果性や「間接」因果性といった変則的な関係を生むことが知られている [Granger (1980), Hsiao (1982) を参照]．

第3系列を $\{z(t)\}$ とするとき，定常過程においてその系列の効果を除去する標準的な方法がある．すなわち関心のある2系列の関係を偏系列相関や偏スペクトルもとづいて特徴づけることであり，これらの特性は導出された系列 $\{x_{\cdot,\cdot,\infty}(t)\}$ と $\{y_{\cdot,\cdot,\infty}(t)\}$ にたいして定義される．ここで $x_{\cdot,\cdot,\infty}(t)$ は $x(t)$ の $\{z(t), t\in\mathbb{Z}\}$ によって生成されるの閉線形空間 $H\{z(\infty)\}$ の上への射影残差であり，また $y_{\cdot,\cdot,\infty}(t)$ も同様に定義される．ここでは多変量統計解析における偏概念を直接時系列解析へ拡張して用いていて，時系列に特有の生起の時間的順序関係は無視されている．z-効果を除去した後での2系列の因果関係を導出するために，Granger (1969) は偏クロススペクトルの使用を提案した．すなわち因果測度を構成するために，残差過程 $\{x_{\cdot,\cdot,\infty}(t)\}$ と $\{y_{\cdot,\cdot,\infty}(t)\}$ とを用いる．$H\{z(\infty)\}$ への射影は $\{z(t)\}$ の効果を除去する一方法ではあるが，全 z-効果の除去は $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ の間の時間順序を考慮したフィードバック関係を歪める可能性がある．この困難を回避するための方法として，第3系列 $\{z(t)\}$ の全効果ではなく一方向効果要素のみを $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ から除去する方法がある [Hosoya (2001) 参照]．具体的には，$u(t)$ と $v(t)$ によって $x(t)$ と $y(t)$ の $H\{z_{0,0,-1}(\infty)\}$ への射影残差とするとき，$\{z(t)\}$

が現前する場合の $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ の間の偏因果関係を，$\{u(t)\}$ と $\{v(t)\}$ の間の対応する2系列間単純因果関係と同定する．例えば，$\{x(t)\}$ から $\{y(t)\}$ への偏一方向因果性は，$\{u(t)\}$ から $\{v(t)\}$ への単純一方向因果性と定義することにする．

$x(t), y(t), z(t)$ がそれぞれ p_1, p_2, p_3-ベクトルであるとするとき，2次定常過 $\{x(t), y(t), z(t), t\in\mathbb{Z}\}$ の結合スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ は以下のように分解されるものとする：

$$f(\lambda)=\begin{bmatrix} f_{\cdot\cdot}(\lambda) & f_{\cdot 3}(\lambda) \\ f_{3\cdot}(\lambda) & f_{33}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

ここで $f_{\cdot\cdot}(\lambda)$ は，過程 $\{x(t), y(t)\}$ の $(p_1+p_2)\times(p_1+p_2)$ スペクトル密度行列であり，$f_{33}(\lambda)$ は $\{z(t)\}$ の $p_3\times p_3$ スペクトル密度行列である．さらに $f(\lambda)$ は条件

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\, det\, f(\lambda)d\lambda>-\infty \tag{7.1}$$

を満たすものとする．したがって $\Lambda(z)$ を $(p_1+p_2+p_3)\times(p_1+p_2+p_3)$ 行列で，単位円内で解析的であり，全階数行列であるとし，$\Lambda(e^{-i\lambda})$ は $\Lambda(z)$ の境界値であると仮定するとき，

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Lambda(e^{-i\lambda})\Lambda(e^{-i\lambda})^*$$

という正準分解ができる．$z_{0,0,-1}(t)$ を $z(t)$ の $H\{x(t+1-j), y(t+1-j), z(t-j); j\in\mathbb{Z}^+\}$ の上への射影とし，$\{x(t), y(t), z_{0,0,-1}(t)\}$ の同時スペクトル密度行列を

$$\tilde{f}(\lambda)=\begin{bmatrix} \tilde{f}_{\cdot\cdot}(\lambda) & \tilde{f}_{\cdot 3}(\lambda) \\ \tilde{f}_{3\cdot}(\lambda) & \tilde{f}_{33}(\lambda) \end{bmatrix}$$

と表すことにすると，それぞれのブロック行列は

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_{\cdot\cdot}(\lambda)=f_{\cdot\cdot}(\lambda),\ \tilde{f}_{33}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}(\Sigma^{\dagger}_{33}-\Sigma^{\dagger}_{3\cdot}\Sigma^{\dagger-1}_{\cdot\cdot}\Sigma^{\dagger}_{\cdot 3}), \\ &\tilde{f}_{3\cdot}(\lambda)=\tilde{f}_{\cdot 3}(\lambda)^*=\Psi\Lambda(0)\Lambda(e^{-i\lambda})^{-1}F(\lambda). \end{aligned} \tag{7.2}$$

と表される（Hosoya (1991) 参照），ただしここでは

$$\Sigma^{\dagger}\equiv\Lambda(0)\Lambda(0)^*,\ \Psi\equiv\{-\Sigma^{\dagger}_{3\cdot}\Sigma^{\dagger-1}_{\cdot\cdot},\ I_{p_3}\}$$

$$F(\lambda)\equiv\begin{bmatrix} f_{\cdot\cdot}(\lambda) \\ f_{3\cdot}(\lambda) \end{bmatrix}$$

という記号法を使用している．$x(t)$ と $y(t)$ を $H\{z_{0,0,-1}(\infty)\}$ の上へ射影したときの残差を $u(t)$ と $v(t)$ で表わし，$h(\lambda)$ を $\{u(t), v(t)\}$ の同時スペクトル密度とする．このとき

$$h(\lambda)=f_{\cdot\cdot}(\lambda)-\tilde{f}_{\cdot 3}(\lambda)\tilde{f}_{33}(\lambda)^{-1}\tilde{f}_{3\cdot}(\lambda) \tag{7.3}$$

が成立し，$h(\lambda)$ が条件 (7.1) を満たせば，さらに正準分解

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Gamma(e^{-i\lambda})\Gamma(e^{-i\lambda})^*$$

が可能であり，$\Gamma(0)\Gamma(0)^*=\Sigma$ は $\{u(t), v(t)\}$ の一期先予測誤差の共分散行列であり，したがって

$$\Sigma = Cov\{u_{-1,-1}(t),\ v_{-1,-1}(t)\}$$

が成立する．偏因果測度の概念を導入するために，$h(\lambda)$ と Σ の (p_1, p_2) 分割をそれぞれ

$$h(\lambda) = \begin{bmatrix} h_{11}(\lambda) & h_{12}(\lambda) \\ h_{21}(\lambda) & h_{22}(\lambda) \end{bmatrix},\ \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

と表すことにする．

偏一方向効果全測度（OMO）とその周波数ごとの分割である偏一方向周波数測度（FMO）とを以下のように定義する．ここで M は Hosoya (1991) が導入した単因果測度を表わす．

1. $\{y(t)\}$ から $\{x(t)\}$ への偏一方向効果全測度：

$$PM_{y\to x:z} \equiv M_{v\to u} = \log \frac{\det\ Cov\{u_{-1,\cdot}(t)\}}{\det\ Cov\{u'_{-1,-1}(t)\}},$$

ここで $u_{-1,\cdot}(t)$ と $u'_{-1,-1}(t)$ はそれぞれ $u(t)$ の $H\{u(t-1)\}$ と $H\{u(t-1),\ v_{0,1}(t-1)\}$ への射影残差である．

2. 周波数 λ における偏一方向効果測度: $-\pi<\lambda\leq\pi$ にたいして，

$$\begin{aligned} PM_{y\to x:z}(\lambda) &\equiv M_{v\to u}(\lambda) \\ &= \log\left[\frac{det\ h_{11}(\lambda)}{det\{h_{11}(\lambda) - 2\pi\tilde{h}_{12}(\lambda)\Sigma_{22:1}^{-1}\tilde{h}_{21}(\lambda)\}}\right], \end{aligned} \tag{7.4}$$

と定義する，ここで

$$\tilde{h}_{12}(\lambda) = [-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1},\ I_{p_2}]\Gamma(0)\Gamma(e^{-i\lambda})^{-1}\begin{bmatrix} h_{11}(\lambda) \\ h_{21}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{h}_{21} = \tilde{h}_{12}^{*},\quad \Sigma_{22:1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}.$$

偏一方向周波数測度の周波数領域上での積分が全偏一方向測度に等しいこと，

$$PM_{y\to x:z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} PM_{y\to x:z}(\lambda)\,d\lambda$$

が成立することを Hosoya (1991, p.433) と同様に導くことができる．

偏結合測度と偏相互測度を定義するために，$\{\ddot{u}_{\cdot,\infty}(t),\ \ddot{v}_{\infty,\cdot}(t)\}$ の同時スペクトル密度関数を

$$\ddot{h}(\lambda) = \begin{bmatrix} \ddot{h}_{11}(\lambda) & \ddot{h}_{12}(\lambda) \\ \ddot{h}_{21}(\lambda) & \ddot{h}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$$

と置くことにする，ここで $\ddot{u}_{\cdot,\infty}(t)$ と $\ddot{v}_{\infty,\cdot}(t)$ はそれぞれ $u(t)$ と $v(t)$ の $H\{v_{0\cdot-1}(\infty)\}$ と $H\{u_{0\cdot-1}(\infty)\}$ の上への射影残差である．一方向効果過程 $\{v_{0\cdot-1}(\infty)\}$ によって説明される部分の除去は，純粋に相互依存的（同時フィードバック）要素 $\ddot{u}_{\cdot,\infty}(t)$ のみを残す．そして相互性の強度は，各系列を個別に予測するより，結合して予測することによりいかに一期先予測誤差が減少するかにより測定される．

3. 周波数 λ における $x(t)$ と $y(t)$ の間の偏結合測度と偏結合全測度：

$$PM_{x,y:z}(\lambda) \equiv M_{u,v}(\lambda) = \log\left[\frac{det\, h_{11}(\lambda) det\, h_{12}(\lambda)}{det\, \ddot{h}(\lambda)}\right],$$

$$PM_{x,y:z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} PM_{x,y:z}(\lambda) d\lambda.$$

4. 周波数 λ における $x(t)$ と $y(t)$ の間の偏相互測度と偏相互全測度：

$$PM_{x,y:z}(\lambda) \equiv M_{u,v}(\lambda) = \log\left[\frac{det\, \ddot{h}_{11}(\lambda) det\, \ddot{h}_{22}(\lambda)}{det\, \ddot{h}(\lambda)}\right],$$

$$PM_{x,y:z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} PM_{x,y:z}(\lambda) d\lambda.$$

Hosoya (1991) と同様に，一方向効果測度，相互測度，結合測度の全測度と周波数測度の間には次の関係が成立する：

$$PM_{x,y:z}(\lambda) = PM_{x\to y:z}(\lambda) + PM_{x,y:z}(\lambda) + PM_{y\to x:z}(\lambda),$$
$$PM_{x,y:z} = PM_{x\to y:z} + PM_{x,y:z} + PM_{y\to x:z}.$$

スペクトル密度 $\ddot{h}(\lambda)$ の具体的な表現については Hosoya (2001, pp. 546–547) を参照．さらに，次の二つの命題は第 3 系列が存在する場合の Granger 因果性の不在を特徴付けるものである (証明は Hosoya (2001) 参照)：

- 第 3 系列 $\{z(t)\}$ が存在するとき，$\{y(t)\}$ が $\{x(t)\}$ の偏原因でないための必要十分条件は，$y(t)$ が

$$y(t) = y^{(1)}(t) = y^{(2)}(t),$$

  と表現されることである．ここで $y^{(1)}(t)$ は $y(t)$ の $H\{x(t), z_{0,0,-1}(t)\}$ の上への射影であり，$y^{(2)}(t)$ は $H\{x(\infty), z_{0,0,-1}(\infty)\}$ と直交する．さらに，$\{y(t)\}$ が $\{x(t)\}$ の偏原因とならない必要十分条件は $PM_{y\to x:z}=0$ となることである．
- 一対の確率過程のみに焦点をあてた Granger 因果性と偏因果性を区別するために，前者を単因果性とよぶことにする．このとき，$\{y(t)\}$ が $\{x(t)\}$ の単原因でないならば，いかなる $\{z(t)\}$ の現前においても $\{y(t)\}$ は $\{x(t)\}$ の偏原因とならない．

7.2. 非定常過程への拡張

定常過程の予測理論が自然に拡張できる非定常過程を含む確率過程の類が存在し，それを再現可能過程とよぶことにする．$\{w(t), t\in\mathbb{Z}\}$ を p-ベクトル 2 次定常過程とし，$\{W(t), t\in\mathbb{Z}^+\}$ をもう一つの有限 2 次モーメントをもつ p-ベクトル過程であるとする．以下の議論では $W(t)$ がもともと $t\in\mathbb{Z}^+$ にたいしてのみ定義されていて拡張が必要とされるときはいつでも，$W(t)=0$, $t\in\mathbb{Z}^{0-}$, と定義することにする．$w_{-1}(t)$ を過程 $w(t)$ の $H\{w(t-1)\}$ にもとづく一期先予測誤差とするとき，もし $W(t)$ の $H\{W(t-1), w(0)\}$ の上への射影残差があらゆる $t\in\mathbb{Z}^+\{W(t)\}$ にたいして $w_{-1}(t)$ に等しいとき，$\{W(t)\}$ は $\{w(t)\}$ に関して再現可能であると呼ぶことにする．すなわち，$w(t)$ と $W(t)$ の一期先予測誤差は情報 $H\{w(0)\}$ が補完されるとき等しい．$\{W(t)\}$ が $\{w(t)\}$ に関して再現可能であるならば，$t\in\mathbb{Z}^+$ にたいして $H\{W(t), w(0)\} = H\{W(t)\}$ が成り立つことは直ちに導くことができる．$d(L) = \Sigma_{j=0}^{8} d[j]L^j$ をスカラー値係数ラグ演算子で，$d[0]=1$ であり，$\Sigma_{j=0}^{d} d[j]z^j$ の零点は単位円上かその外にあるものとする，そして $D(L)$ は対角要素がすべて $d(L)$ である $(p_1+p_2+p_3)\times(p_1+p_2+p_3)$

対角行列であるとする．ここで

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

と表現される過程を考える．$\{X(t)\},\{Y(t)\},\{Z(t)\}$ は個別にそれぞれ $\{x(t)\},\{y(t)\},\{z(t)\}$ に関して再現可能であることに注意する．モデル（7.5）にもとづいて因果概念と測度は以下のように拡張される．

$Z(t)$ の一方向効果要素を $Z(t)$ の $H\{X(t), Y(t), Z(t-1), x(0), y(0), z(0)\}$ の上への射影残差すなわち $z_{0,0,-1}(t)$ と定義する．$X(t)$ の $H\{X(t-1), x(0), z_{0,0,-1}(\infty)\}$ と $H\{X(t-1), Y(t-1), x(0), y(0), z_{0,0,-1}(\infty)\}$ の上への射影残差はそれぞれ $x(t)$ の $H\{x(t-1), z_{0,0,-1}(\infty)\}$ と $H\{x(t-1), y(t-1), z_{0,0,-1}(\infty)\}$ の上への射影残差に等しい．$x(t)$ と $y(t)$ の $H\{z_{0,0,-1}(\infty)\}$ の上への射影残差を $u(t)$ と $v(t)$ と表すならば，$\{Y(t)\}$ から $\{X(t)\}$ への偏一方向効果測度は $\{v(t)\}$ から $\{u(t)\}$ への一方向測度によって決定される．したがって，第3系列 $\{Z(t)\}$ が存在するときの $\{Y(t)\}$ から $\{X(t)\}$ への偏一方向効果測度を（7.3）と（7.4）で与えた測度 $PM_{y\to x:z}$ と $PM_{y\to x:z}(\lambda)$ として定義することが自然な拡張であろう．すなわち $PM_{Y\to X:Z}=PM_{y\to x:z}$ および $PM_{Y\to X:Z}(\lambda)=PM_{y\to x:z}$ として定義する．$PM_{X\to Y:Z}$ と $PM_{X\to Y:Z}(\lambda)$ も同様に定義される．

いま $(p_1+p_2+p_3)$-ベクトル過程 $W(t)$ が共和分 ARMA 過程であるとする．すなわち $\{X(t)\}, \{Y(t)\}, \{Z(t)\}$ がそれぞれ p_1, p_2, p_3-ベクトル過程であるとして，$W(t)=(X(t)^*, Y(t)^*, Z(t)^*)^*$ と置く．さらに $A[j]$ と $B[j]$ は，$A[0]=B[0]=I_{p_1+p_2+p_3}$ となる，$(p_1+p_2+p_3)\times(p_1+p_2+p_3)$ 行列であるとして

$$A(L)=\sum_{j=0}^{a} A[j]L^j, \quad B(L)=\sum_{k=0}^{b} B[k]L^k$$

と置く．行列式 $det\,A(z)$ と $det\,B(z)$ の零点は単位円上か外部にあり，共通の零点はないものと仮定する．ホワイトノイズ過程 $\{\varepsilon(t)\}$ が $E(\varepsilon(t)=0, Cov(\varepsilon(t))=\Sigma^\dagger$（ここで $rank(\Sigma^\dagger)=p_1+p_2+p_3$）として与えられるとき，$\{W(t)\}$ は

$$A(L)W(t)=B(L)\varepsilon(t) \tag{7.6}$$

として生成されるものとする．$A(L)$ の転置余因子行列を $A^\#(L)$ と表すことにする，したがって，$D(L)$ によって対角要素が共通の $det\,A(L)$ として与えられる対角行列を表すとき，

$$A^\#(L)A(L)=\begin{bmatrix} d(L) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d(L) \end{bmatrix}=D(L)$$

が成立する．演算子 $A^\#(L)$ を方程式（7.6）の両辺に適用することで，

$$\begin{bmatrix} d(L) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d(L) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}=A^\#(L)B(L)\varepsilon(t)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \equiv w(t) \tag{7.7}$$

が得られるが，以上の構成から，$\{w(t)\}$ は定常 MA 過程である．さらに $det\{A^{\sharp}(z)B(z)\}$ の零点は単位円内にはないので，$\{w(t)\}$ の結合スペクトル密度行列 $f(\lambda)$ は

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Lambda(e^{-i\lambda})\Lambda(e^{-i\lambda})^{*} \tag{7.8}$$

と分解される．ここで $\Sigma^{\dagger}\equiv\Sigma^{\dagger^{1/2}}(\Sigma^{\dagger^{1/2}})^{*}$ と定義すると，$\Lambda(e^{-i\lambda})=A^{\sharp}(e^{-i\lambda})B(e^{-i\lambda})\Sigma^{\dagger^{1/2}}$ が成立する．拡張された定義にもとづいて，共和分過程（7.6）における偏因果構造は $\{x(t)\}$, $\{y(t)\},\{z(t)\}$ の対応する構造と同定することができ，非定常再現可能過程 $\{X(t)\},\{Y(t)\}$, $\{Z(t)\}$ の偏因果諸測度は定常過程 $\{x(t)\},\{y(t)\},\{z(t)\}$ の対応する諸測度によって決定される．

第 3 系列 $\{Z(t)\}$ の存在を考慮した $\{X(t)\},\{Y(t)\}$ 間の一方向効果全測度および一方向効果周波数測度にもとづいて，長期・短期の因果関係を特徴づける，多様な因果測度を導出することができる．例えば $PM_{Y\to X:Z}\neq 0$ である場合には，一方向全効果に占める長期的効果の貢献度は，一定の周波数帯 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ にたいして，

$$PD_{y\to x:z}(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}PM_{Y\to X:Z}(\lambda)\,d\lambda/PM_{Y\to X:Z}$$

として与えられる．あるいは一定の周期帯 $[t_1,\,t_2]\,(2\leq t_1<t_2)$ の相対的貢献度は

$$PD_{Y\to X:Z}(t_1,t_2)=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi/t_2}^{2\pi/t_1}PM_{Y\to X:Z}(\lambda)\,d\lambda/PM_{Y\to X:Z}$$

と表現できる，ただしここで周期 t と周波数 $\lambda(\lambda>0)$ の間に成立する関係 $t=2\pi/\lambda$ を用いている．

8. 偏因果測度の統計的推定

定常過程 $\{x(t)\},\{y(t)\},\{z(t)\}$ は多変量 ARMA 過程であり，

$$A(L)\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}=B(L)\varepsilon(t)$$

として生成されるものとする（前節の議論を用いて，以下の方法は非定常再現可能過程へ容易に拡張される）．ここで $x(t),y(t),z(t)$ はそれぞれ p_1,p_2,p_3-ベクトルであり，$A(L)$ と $B(L)$ はラグ演算子 L の a-次，b-次の多項式である．ただし $A[0]=B[0]=I_{p_1+p_2+p_3}$ とする．さらに $det\,A(z)$ の零点はすべて単位円の外にあり，$det\,B(z)$ の零点は単位円上または外にあり $det\,A(z)$ と共通の零点はないものと仮定する．イノベーション過程 $\{\varepsilon(t)\}$ は平均 0，共分散行列 $\Sigma^{\dagger}$ のホワイトノイズであると仮定する．このとき ARMA(a,b) 過程 $\{x(t),y(t),z(t)\}$ の結合スペクトル密度行列は

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}A(e^{-i\lambda})^{-1}B(e^{-i\lambda})\Sigma^{\dagger}B(e^{-i\lambda})^{*}A(e^{-i\lambda})^{*-1}$$
$$=\begin{bmatrix} f_{\cdot\cdot}(\lambda) & f_{\cdot 3}(\lambda) \\ f_{3\cdot}(\lambda) & f_{33}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

として与えられる．ここで $f_{\cdot\cdot}(\lambda)$ は $\{x(t), y(t)\}$ の $(p_1+p_2)\times(p_1+p_2)$ スペクトル密度行列であり，$f_{33}(\lambda)$ は $\{z(t)\}$ の $p_3\times p_3$ 行列である．$f(\lambda)$ についての仮定

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\, det\, f(\lambda)d\lambda>-\infty$$

が成立するから，正準分解

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Lambda(e^{-i\lambda})\Lambda(e^{-i\lambda})^{*}$$

が成立し，$A(z)$ と $B(z)$ が根条件の仮定より，正準因子 $\Lambda(z)$ は

$$\Lambda(z)=A(z)^{-1}B(z)\Sigma^{\dagger 1/2}=(det\, A(z))^{-1}A^{\#}(z)B(z)\Sigma^{\dagger 1/2}$$

として与えられる．ここで $\Sigma^{\dagger 1/2}$ は $\Sigma^{\dagger}$ のコレスキー分解で，$\Sigma^{\dagger}=\Sigma^{\dagger 1/2}(\Sigma^{\dagger 1/2})^{*}$ を満たすものであり，$A^{\#}(z)$ は $A(z)$ は転置余因子行列を表わす．多項式行列 $C(z)$ を $C(z)=A^{\#}(z)B(z)\Sigma^{\dagger 1/2}$ と定義すると，

$$C(z)=\sum_{j=0}^{\bar{a}}C[j]z^{j},\ 0\leq\bar{a}\leq(p_1+p_2+p_3-1)a+b,$$
$$\Lambda(z)=(det\, A(z))^{-1}C(z)$$

が成立し，$A(z)$ と $B(z)$ の根条件の仮定により，$det\, C(z)$ の零点はすべて単位円の上か外にある．(8.1) の分割に対応して

$$C(z)=\begin{bmatrix} C_{\cdot\cdot}(z) & C_{\cdot 3}(z) \\ C_{3\cdot}(z) & C_{33}(z) \end{bmatrix}$$

と置き，さらに $C_{\cdot}(z)=(C_{\cdot\cdot}(z), C_{\cdot 3}(z))$ と置く，すなわち $C_{\cdot}(z)$ は $(p_1+p_2)\times(p_1+p_2+p_3)$ 行列である．ここで，第7.1節の議論にしたがって，$\{x(t), y(t), z_{0,0,-1}(t)\}$ のスペクトル密度行列を

$$\tilde{f}(\lambda)=\begin{bmatrix} \tilde{f}_{\cdot\cdot}(\lambda) & \tilde{f}_{\cdot 3}(\lambda) \\ \tilde{f}_{3\cdot}(\lambda) & \tilde{f}_{33}(\lambda) \end{bmatrix}$$

と書くことにする．ここで $\tilde{f}_{\cdot\cdot}(\lambda)$, $\tilde{f}_{33}(\lambda)$ はそれぞれ

$$\tilde{f}_{\cdot\cdot}(\lambda)=f_{\cdot\cdot}(\lambda)=\frac{1}{2\pi|\mathrm{det}A(e^{-i\lambda})|^{2}}C_{\cdot}(e^{-i\lambda})C_{\cdot}(e^{-i\lambda})^{*}$$
$$\tilde{f}_{33}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}(\Sigma^{\dagger}_{33}-\Sigma^{\dagger}_{3\cdot}\Sigma^{\dagger -1}_{\cdot\cdot}\Sigma^{\dagger}_{\cdot 3})\equiv\frac{1}{2\pi}\Sigma^{\dagger}_{33\cdot} \tag{8.2}$$

である．一方 $\tilde{f}_{3\cdot}(\lambda)$ については，$F(\lambda)$ が

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}(det\,A(e^{-i\lambda}))^{-1}\Lambda(e^{-i\lambda})C.(e^{-i\lambda})^*$$

と与えられるから，(7.2) より

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{3\cdot}(\lambda)&=\Psi(\Sigma^{\dagger})^{1/2}\Lambda(e^{-i\lambda})^{-1}(2\pi)^{-1}(det\,A(e^{-i\lambda})^*)^{-1}\Lambda(e^{-i\lambda})C.(e^{-i\lambda})^*\\&=2\pi(det\,A(e^{-i\lambda})^*)^{-1}\Psi\Sigma^{\dagger 1/2}C.(e^{-i\lambda})^*\end{aligned}$$

と表わせる，ここで $\Psi\equiv\{-\Sigma_{3\cdot}^{\dagger}\Sigma_{\cdot\cdot}^{\dagger -1}, I_{p_3}\}$ である．

$x(t)$ と $y(t)$ の $H\{z_{0,0,-1}(\infty)\}$ への射影残差をそれぞれ $u(t)$, $v(t)$ と表し，$\{u(t), v(t)\}$ の結合スペクトル密度行列を $h(\lambda)$ で表すと，(7.3) に対応する $h(\lambda)$ は (8.2), (8.3) より

$$\begin{aligned}h(\lambda)&=f_{\cdot\cdot}(\lambda)-\tilde{f}_{\cdot 3}(\lambda)\tilde{f}_{33}(\lambda)^{-1}\tilde{f}_{3\cdot}(\lambda)\\&=\frac{1}{2\pi|det\,A(e^{-i\lambda})|^2}C.(e^{-i\lambda})\{I_{p_1+p_2+p_3}-(\Sigma^{\dagger 1/2})^*\Psi^*\Sigma_{33:\cdot}^{-1}\Psi\Sigma^{\dagger 1/2}\}C.(e^{-i\lambda})^*\end{aligned}\qquad(8.3)$$

として与えられる．こうして $h(\lambda)$ は分母がスカラー係数，分子が行列係数のローラン多項式として表現できる．さらに (8.4) 式右辺の { } 内を

$$\ddot{\Sigma}\equiv I_{p_1+p_2+p_3}-(\Sigma^{\dagger 1/2})^*\Psi^*\Sigma_{33:\cdot}^{-1}\Psi\Sigma^{\dagger 1/2}$$

と置き，$\ddot{\Sigma}=\ddot{\Sigma}^{1/2}(\ddot{\Sigma}^{1/2})^*$ を対称行列 $\ddot{\Sigma}$ のコレスキー分解とする．また $\ddot{\Sigma}$ は全階数行列であると仮定する．ここで $\Phi(e^{-i\lambda})\equiv C.(e^{-i\lambda})\ddot{\Sigma}^{1/2}$ と定義すると，(8.4) 右辺の分子は $\Phi(e^{-i\lambda})\Phi(e^{-i\lambda})^*$ として分解されるが，Φ が正方行列でないため正準分解ではない．さらに合理型スペクトル密度が (8.4) のように共通スカラー分母 $2\pi|det\,A(e^{-i\lambda})|^2$ をもつときは，(7.4) の公式において分母分子でこの共通分母が通分されるから偏一方向効果測度は $\Phi(e^{-i\lambda})$ のみにより決定され，$det\,A(e^{-i\lambda})$ は関与しない［一般的な結果については下記の注 2 を参照］.

有限標本 $\{x(t), y(t), z(t); t=1, ..., T\}$ にもとづいて偏因果測度を推定するには，$\hat{A}(L)$, $\hat{B}(L)$, $\hat{\Sigma}^{\dagger}$ を $A(L)$, $B(L)$, $\Sigma^{\dagger}$ の推定値であるとするとき，因果諸測度の推定値は $A(L)$, $B(L)$, $\Sigma^{\dagger}$ を代入して求めることができる．推定過程については，Hannan and Rissanen (1982), Hannan and Kavalieris (1984), Takimoto and Hosoya (2004) 等を参照．無制約での母数推定においては $det\,A(z)=0$ および $det\,B(z)=0$ の解が根条件が満たすとは限らない．Takimoto and Hosoya (2006) は定常性と反転可能性を正確に満足する根修正過程を与えている．

注 2: 複素平面上で定義されたスカラー値関数 $c(z)$ は $c(0)=1$ で，単位円内で非ゼロ，解析的であるとする．定常過程 $\{x(t), y(t)\}$ のスペクトル密度行列 $f(\lambda)$ が

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}c(e^{-i\lambda})\Lambda(e^{-i\lambda})\{c(e^{-i\lambda})\Lambda(e^{-i\lambda})\}^*\qquad(8.4)$$

と正準分解されるものとする．このとき Hosoya (1991, p. 433) による一方向効果測度 $M_{y\to x}(\lambda)$ の定義を，$f(\lambda)$ とその分解 (8.5) にもとづいて構成するかわりにスペクトル密度行列 $g(\lambda)$ とその正準因子 $\Lambda(e^{-i\lambda})$

$$g(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Lambda(e^{-i\lambda})\Lambda(e^{-i\lambda})^*$$

にもとづいて構成しても，同一の測度に帰着する．なぜならば仮定により，$\{x(t), y(t)\}$ の共分散が $2\pi f(0)=|c(0)|^2\Lambda(0)\Lambda(0)^*=2\pi g(0)$ として与えられ，$g(\lambda)$ を $f(\lambda)$ と対応的に分

割すると，$\hat{f}_{12}(\lambda)\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\hat{f}_{21}(\lambda)=|c(\lambda)|^2\tilde{g}_{12}(\lambda)\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\tilde{g}_{21}(\lambda)$ が成立するから，Hosoya (1991) の (2.3) 式において

$$\begin{aligned} M_{y\to x}(\lambda) &= \log[det f_{11}(\lambda)/det\{f_{11}(\lambda)-2\pi\tilde{f}_{12}(\lambda)\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\tilde{f}_{21}(\lambda)\}] \\ &= \log[det\{|c(\lambda)|^2 g_{11}(\lambda)\}/det\{|c(\lambda)|^2 g_{11}(\lambda)-2\pi\tilde{g}_{12}(\lambda)\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\tilde{g}_{21}(\lambda))\}] \\ &= \log[det g_{11}(\lambda)/det\{(g_{11}(\lambda)-2\pi\tilde{g}_{12}(\lambda)\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\tilde{g}_{21}(\lambda)\}] \end{aligned}$$

が成立する．

9. 偏因果測度の検定

これまで概説してきた偏因果諸測度については，実際のデータ生成状況にたいするさまざまな定常・非定常時系列モデル上で，有限観測値にもとづく統計的推測を実行することができる．モデルは通常未知母数 ϕ を含んでいて，偏因果測度もこの母数の関数になっていると考えられる．$G(\phi)$ は m-ベクトルであり，その要素は第7.1節で与えた諸測度である．たとえば要素が $G_1(\phi)=1/2\varepsilon\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}PM_{x\to y}(\lambda|\phi)d\lambda$ と $G_2(\phi)=1/2\varepsilon\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}PM_{y\to x:z}(\lambda|\phi)d\lambda$ から構成される 2-ベクトル $G(\phi)$ はある小さい正数 ε にたいして長期的（低周波の）一方向効果を測定する．定常モデルの広い類にたいして，サイズ T の観測値にもとづく最尤推定値あるいは Whittle 最尤推定値を $\hat{\phi}$ とするとき，$\sqrt{T}(\hat{\phi}-\phi)$ は漸近的に $N(0,\Omega(\phi))$ にしたがう，ただしここで ϕ の真の値であり，$G(\hat{\phi})$ は $\Omega(\phi)$ の一致推定値である［大標本理論については Hosoya (1997b) を参照］．要素を $\{\partial G_i(\phi)\partial\phi_j\}$ とするヤコビ行列を $D_\phi G$ で表すと，$\sqrt{T}(G(\hat{\phi})-G(\phi))$ は漸近分布 $N(0,H(\phi))$ をもつ，ここで

$$H(\phi)=D_\phi G(\phi)^*\Omega(\phi)D_\phi G(\phi)$$

である．このとき $G(\Psi)$ についての推測は Wald 統計量

$$T\{G(\hat{\phi})-G(\phi)\}^*H(\hat{\phi})^{-1}\{G(\hat{\phi})-G(\phi)\}$$

にもとづいて行うことができる．この統計量は，$H(\phi)$ が正値定符号でありかぎり，漸近的に自由度 m の χ^2 分布にしたがう．この統計量にもとづいて Granger 非因果性を検定できるのみではなく，$G(\phi)$ の信頼性命題を作成することができる．第7.2節で述べたように非定常過程 $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$ の偏因果諸測度が定常過程 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ の対応する諸測度に帰着される場合には，この接近法は $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$ へ拡張できる［本節で提案している方法とは異なる検定法については Breitung and Candelon (2006) が提案している．すなわち帰無仮説 $PM_{y\to x:z}(\lambda)=0$ を検定するために，係数ベクトルの線形制約を F-統計量にもとづいて検定することをかれらは提案しているが，検定は Granger 因果性不在の検定に限定されている］．

本節では，経済時系列分析で広い応用をもつ共和分 VAR モデルに焦点をあてて，(9.1) で与えられる誤差修正モデルにもとづく偏一方向効果測度の Wald 検定を考察する．$\{W(t)\}=\{X(t)^*, Y(t)^*, Z(t)^*\}^*$ が共和分 $p_1+p_2+p_3(=p)$ 次元 VAR モデルによって生成され，その誤差修正形が

$$\Delta Z(t)=\alpha\beta^*Z(t-1)+\sum_{j=1}^{a-1}A[j]\Delta Z(t-j)+\mu+\Phi P(t)+\sum_{k=0}^{b}B[k]\varepsilon(t-k) \tag{9.1}$$

として表現されるものと仮定する，ただし $B[0]=I_p$．ここで α と β は $p\times r$ 行列 $(r\leq p)$ であり，μ は定数 p-ベクトル，$P(t)$ は中心化ダミー変数から構成される列 (s_d-1)-ベクトルであり，s_d は季節周期がある場合には $s_d=4$ となる．さらに $\{\varepsilon(t)\}$ は平均0，共分散行列が Σ である

正規ホワイトノイズであるとする；正規性の仮定は叙述の簡易さのためであり，より一般的な仮定の下で類似の漸近理論が展開できる（Hosoya (2005) 参照）．β は $(r\cdot(p-1))\times 1$ ベクトルであり $\theta=vec\beta^*$ として β の要素から構成される．ϕ を $\alpha, A[j], B[k], \Sigma$ の下三角行列要素から構成される $(p(p+1)/2)\times 1$ ベクトル $v(\Sigma)$ を要素とするものであり，$\phi=vec(vec(\alpha, A, B)^*, v(\Sigma))$ であり，ϕ のベクトル次元を n_ϕ で表わす．ただし $A=\{A[1], \ldots, A[a-1]\}$，$B=\{B[1], \ldots, B[b]\}$ である．

(9.1) で与えられる過程 $\{Z(t)\}$ のスペクトル密度行列 f とその正準因子 Λ はそれぞれ

$$f(\lambda|\theta, \phi)=\frac{1}{2\pi}\Lambda(e^{-i\lambda}|\theta, \phi)\Lambda(e^{-i\lambda}|\theta, \phi)^*$$

および

$$\Lambda(e^{-i\lambda}|\theta, \phi)=C(e^{-i\lambda}|\theta, \phi)B(e^{-i\lambda}|\phi)\Sigma^{1/2}$$

として与えられる．ここで $C(z|\theta, \phi)$ は行列係数多項式行列

$$I_p-z(I_p+\alpha\beta^*)-\sum_{j=1}^{a-1}A[j](z^j-z^{j+1})$$

の転置余因子行列である．f と Λ にもとづいて，(7.2) で定義される $h(\lambda|\theta, \phi)$ スペクトル密度行列とその正準因子 $\Gamma(e^{-i\lambda}|\theta, \phi)$ を得ることができる．Granger 一方向因果性は，確定的要因の間には一方向効果は存在せず相互性測度のみ定義されるため，モデル (9.1) に含まれるダミー変数や乗数項には適用されない［Hosoya (1977) を参照］．

このように定義された h と Γ を用いて，$\{Y(t)\}$ から $\{X(t)\}$ への周波数偏一方向測度として $PM_{Y\to X:Z}(\lambda|\theta, \phi)$ およびその全測度を定義する．まず $m=1$ である場合における

$$G(\theta, \phi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}PM_{Y\to X:Z}(\lambda|\theta, \phi)d\lambda$$

を考える．(θ, ϕ) が真値であり，$(\hat{\theta}, \hat{\phi})$ が最尤推定量（あるいは擬似最尤推定量）であるとすると，$T\to\infty$ のとき，$T(\hat{\theta}-\theta)$ は多変量混合正規分布に収束し，$\sqrt{T}(\hat{\phi}-\phi)$ は多変量正規分布へ収束する［共和分 AR 過程については Johansen (1988, 1991)，共和分 ARMA 過程の場合については Takimoto and Hosoya (2004, 2006) を参照］．したがって，$G(\hat{\theta}, \hat{\phi})$ は $G(\theta, \phi)$ の $\sqrt{T}$ 一致推定量である．$D_\phi G$ を $G(\theta, \phi)$ の n_ϕ 次元勾配ベクトルとするとき，確率展開によって

$$\sqrt{T}\{G(\hat{\theta}, \hat{\phi})-G(\theta, \phi)\}=(D_\phi G)^*\sqrt{T}(\hat{\phi}-\phi)+o_p(1)$$

が成立するから，$\sqrt{T}\{G(\hat{\theta}, \hat{\phi})-G(\theta, \phi)\}$ は漸近的に平均 0，分散

$$H(\theta, \phi)=D_\phi G(\theta, \phi)^*\Omega(\theta, \phi)D_\phi G(\theta, \phi) \tag{9.2}$$

の正規分布にしたがう，ここで $\Omega(\theta, \phi)$ は $\sqrt{T}(\hat{\phi}-\phi)$ の漸近的共分散行列である．注意すべき点は，$G(\hat{\theta}, \hat{\phi})$ の一次漸近分布は完全に $\hat{\phi}$ によって決定され，$\hat{\theta}$ の標本誤差は $\hat{\phi}$ のそれと比較して無視できる量であるため，$\hat{\theta}$ の非標準極限分布は関与しないことである．こうして，たとえば，スカラー値 $G(\theta, \phi)$ の検定と信頼集合構成は Wald 統計量

$$W\equiv T\{G(\hat{\theta}, \hat{\phi})-G(\theta, \phi)\}^2/H(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \tag{9.3}$$

にもとづいて実行することができる．このWald統計量は，(θ, ϕ)を真値とするとき，自由度1のχ^2分布にしたがう．

$(\hat{\theta}, \hat{\phi})$における勾配$D_\phi G$を評価するには，厳密な解析的表現の複雑さを考慮すると，数値微分が実際的である．具体的には$G(\theta, \phi)$の勾配

$$D_\phi G = \left(\frac{\partial G}{\partial \phi_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial \phi_{n_\phi}}\right)^*$$

は，hを十分小さく選び，h_iはi-次要素がhで他の要素が0である$n_\phi \times 1$ベクトル，すなわち$h_i = (0, \ldots, h, 0, \ldots, 0)^*$, $i = 1, 2, \ldots, n_\phi$とするとき，

$$\frac{\partial G}{\partial \phi_1} \approx \{G(\hat{\theta}, \hat{\phi} + h_i) - G(\hat{\theta}, \hat{\phi} - h_i)\}/(2h)$$

として数値評価できる．他方(9.2)における$\Psi(\theta, \phi)$の数値評価は以下のように行うことができる．$\phi^{(1)} \equiv vec\{\alpha, A, B\}$, $\phi^{(2)} \equiv vec\{\mu, \Phi\}$, $\phi^{(3)} \equiv v(\Sigma)$, *and* $\phi^{(1,2)} \equiv vec(\phi^{(1)}, \phi^{(1,2)})$と置くと，観察値$Z(1), \ldots, Z(T)$にもとづく母数$\phi^{(1,2)}$と$\phi^{(3)}$の正規対数尤度関数は

$$l_T(\phi^{(1,2)}, \phi^{(3)}|Z) = \frac{T}{2}(p \log 2\pi + \log det \Sigma) - \frac{1}{2\pi} tr \Sigma^{-1} V_T$$

として与えられる．ここで

$$V(t) = \Delta Z(t) - \alpha\beta^* Z(t-1) - \sum_{j=1}^{a-1} A[j] \Delta Z(t-j) \sum_{k=1}^{b-1} B[k] \varepsilon(t-k) - \mu - \Phi P(t)$$

であり，

$$V_T = \sum_{t=1}^{T} V(t) V(t)^*$$

である[$\varepsilon(t-k)$は観測できないから各推定段階に応じて先行段階で得られる残差$\hat{\varepsilon}(t-k)$を推定量として用いる]．DとD^+をそれぞれ$p^2 \times p(p+1)/2$複写行列(duplication matrix)およびムーア-ペンローズ行列とする，そして

$$D^+ = (D^* D)^{-1} D^*$$

と置く[Magnus and Neudecker (1988), p49を参照]．$\phi^{(1,2)}, \phi^{(3)}$の最尤推定量を$\hat{\phi}^{(1,2)}, \hat{\phi}^{(3)}$で表すと，$\sqrt{T}\{\hat{\phi}^{(1,2)} - \phi^{(1,2)}\}$と$\sqrt{T}(\hat{\phi}^{(3)} - \phi^{(3)})$の同時漸近共分散は

$$\begin{pmatrix} \Sigma \otimes Q^{-1} & 0 \\ 0 & 2D^+(\Sigma \otimes \Sigma) D^{+*} \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

に等しい，ここで$Q = \lim_{T \to \infty}(1/T)\Sigma_{t=1}^{T} S(t) S(t)^*$であり，また

$$S(t) = vec(\beta^* Z(t-1), \Delta Z(t-1), \ldots, \Delta Z(t-a-1), \hat{\varepsilon}(t-1), \ldots, \hat{\varepsilon}(t-b), 1_p. P(t))$$

である[Magnus and Neudecker (1988), p321を参照]．このとき，$\sqrt{T}(\hat{\phi}^{(1)} - \phi^{(1)})$の漸近的共分散行列を$\Psi_{\phi^{(1)}\phi^{(1)}}$と表すと，それは$\Sigma \otimes Q^{-1}$から$\sqrt{T}(\hat{\phi}^{(2)} - \phi^{(2)})$に対応する行と列を除去して得られる．$(p \cdot (r + p \cdot (a + b - 2)) + p \cdot s_d)$次元対称行列$\Sigma \otimes Q^{-1}$は$p \times p$分割行列

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}Q^{-1} & \sigma_{12}Q^{-1} & \cdots & \sigma_{1p}Q^{-1} \\ \sigma_{21}Q^{-1} & \sigma_{22}Q^{-1} & \cdots & \sigma_{2p}Q^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \sigma_{p1}Q^{-1} & \sigma_{p2}Q^{-1} & \cdots & \sigma_{pp}Q^{-1} \end{pmatrix}$$

を意味する．ここで小行列 $\sigma_{ij}Q^{-1}(i,j=1,\ldots,p)$ はすべて $(r+p\cdot(a+b-2)+s_d)$ 次元正方行列である．共分散行列 $\Psi_{\phi^{(1)}\phi^{(1)}}$ は小行列 $\sigma_{ij}Q^{-1}$, $i,j=1,\ldots,p$ から最後の s_d 列と最後の s_d 列を除去することから構成できる．(9.4) における Σ と Q の推定量はそれぞれ

$$\hat{\Sigma}=(1/T)\sum_{t=1}^{T}\hat{V}(t)\hat{V}(t)^*,$$
$$\hat{Q}=(1/T)\sum_{t=1}^{T}\hat{S}(t)\hat{S}(t)^*$$

とする，ただし

$$\hat{V}(t)=\Delta Z(t)-\hat{\alpha}\hat{\beta}^*Z(t-1)-\sum_{j=1}^{a-1}\hat{A}[j]\Delta Z(t-j)\sum_{k=0}^{b}\hat{B}[k]\hat{\varepsilon}(t-k)-\hat{\mu}-\hat{\Phi}P(t),$$
$$\hat{S}(t)=vec(\hat{\beta}^*Z(t-1),\Delta Z(t-1),\ldots,\Delta Z(t-a-1),\ldots,\hat{\varepsilon}(t-1),\ldots,\hat{\varepsilon}(t-a),1_p.\ P(t))$$

である，ただし $\hat{\varepsilon}$ は例えば Hannan-Rissanen の第 3 段階の残差が用いられる．$\hat{\Omega}_{\phi^{(1)}\phi^{(1)}}$ は $(\hat{\theta},\hat{\phi})$ で評価した $\sqrt{T}(\hat{\phi}^{(1)}-\phi^{(1)})$ の共分散行列を表すとすると，$\hat{\phi}$ と $\hat{\theta}$ の一致性より，

$$\Psi(\theta,\phi)=\begin{pmatrix} \hat{\Omega}_{\phi^{(1)}\phi^{(1)}} & 0 \\ 0 & 2D^+(\Sigma\otimes\Sigma)D^{+*} \end{pmatrix}+o_p(1) \tag{9.5}$$

が成立する．したがって (9.5) の右辺の第 1 項を $\Omega(\theta,\phi)$ の一致推定量として用いることができる．

(9.2) と (9.5) とから，共分散行列推定量 $\hat{H}=\hat{H}(\hat{\theta},\hat{\phi})$ が得られる．G_1 を所与のスカラー値とするとき，帰無仮説 $G(\theta,\phi)=G_1$ を検定するには，(9.3) で定義される検定統計量 W を評価すればよい．Granger の非因果性を検定するには，帰無仮説を $G_1=0$ と設定し，検定統計量は

$$W=T\{G(\hat{\theta},\hat{\phi})\}^2/H(\hat{\theta},\hat{\phi})$$

として与えられる．自由度 1 の χ^2 分布上側 α 分位点を $\chi^2_\alpha(1)$ と表すとき，$W\geq\chi^2_\alpha(1)$ が成立するならば，Y から X への非因果性は棄却される．他方，(9.5) より，因果測度 $G(\theta,\phi)$ の漸近的 $(1-\alpha)$ 信頼区間は

$$(G(\hat{\theta},\hat{\phi})-H_\alpha,\ G(\hat{\theta},\hat{\phi})+H_\alpha)$$

として与えられ，ここで $H_\alpha=\sqrt{(1/T)H(\hat{\theta},\hat{\phi})\chi^2_\alpha(1)}$ である．

(9.2) にもとづいて多様なその他の測度を構成することができる．たとえば，$p\geq4$ である場合，$Z(t)$ を 4 つのベクトル $Z^1(t)$, $Z^2(t)$, $Z^3(t)$, $Z^4(t)$ に分割して

$$Z(t)=(Z^1(t)^*,Z^2(t)^*,Z^3(t)^*,Z^4(t)^*)^*$$

と置いて，一組のベクトル値全効果測度

$$G(\theta,\phi)=\begin{pmatrix} PM_{Z^1,Z^2\to Z^3,Z^4}(\theta,\phi) \\ PM_{Z^2,Z^3\to Z^1,Z^4}(\theta,\phi) \end{pmatrix}$$

を計算することに関心があるかも知れない，ここで $\phi\equiv(\phi^{(1)},\phi^{(2)})$ とする．あるいは長期・短期の平均効果の組

$$G(\theta,\phi)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda_0}\int_{|\lambda|<\lambda_0} PM_{Y\to X:Z}(\lambda|\theta,\phi)d\lambda \\ \frac{1}{2(\pi-\lambda_0)}\int_{|\lambda|\geq\lambda_0} PM_{Y\to X:Z}(\lambda|\theta,\phi)d\lambda \end{pmatrix}$$

$(0<\lambda_0<\pi)$ に関心があるかもしれない．このようなケースを扱うために，$G_i(\theta,\phi),=1,\ldots,m$ が異なる種類の測度であるとし，$G(\theta,\phi)$ は

$$G(\theta,\phi)=(G_1(\theta,\phi),\ldots,G(\theta,\phi))^*$$

となる m-ベクトルであるとする．このときこのベクトル値 $G(\theta,\phi)$ への拡張は次のように行うことができる．(9.2) における $D_\phi G$ はここではヤコビ行列

$$D_\phi G=\{\partial G_i(\theta,\phi)/\partial\phi_1\}\quad(i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n_\phi)$$

を表す．したがって $H(\theta,\phi)$ は $m\times m$ 共分散行列である．G を $rankH(\theta,\phi)=m$ となるように選ぶと，Wald 統計量

$$W^{(m)}\equiv T\{G(\hat\theta,\hat\phi)-G(\theta,\phi)\}^*H(\hat\theta,\hat\phi)^{-1}\{G(\hat\theta,\hat\phi)-G(\theta,\phi)\}$$

は，(θ,ϕ) が真の値であるならば，漸近的に自由度 m の χ^2-分布にしたがう．G_m を所与の m ベクトルとすると，帰無仮説 $G(\theta,\phi)=G_m$ は $W^{(m)}$ によって検定できる．Granger 因果性検定の拡張は $G_m=0$ と置くことで実行される．すなわち検定統計量

$$W^{(m)}\equiv T\{G(\hat\theta,\hat\phi)\}^*H(\hat\theta,\hat\phi)^{-1}\{G(\hat\theta,\hat\phi)\}$$

にもとづいて，自由度 m の χ^2 分布の上側 α 分位点に対して，$W^{(m)}\geq\chi^2_\alpha(m)$ が成立するならば，有意水準 α で $G_m=0$ は棄却され，また G の信頼水準 $(1-\alpha)$ の信頼集合は楕円体の内部と表面で与えられる，すなわち

$$[G:\ T\{G(\hat\theta,\hat\phi)-G\}^*H(\hat\theta,\hat\phi)^{-1}\{G(\hat\theta,\hat\phi)-G\}\leq\chi^2_\alpha(m)]$$

この集合は有意水準 α で，Wald 統計量によって棄却されない G 値から構成されている．たとえば，$m=2$ である場合，$G(\hat\theta,\hat\phi)=(\hat G_1-\hat G_2)$, $G=(G_1-G_2)$, $H(\hat\theta,\hat\phi)^{-1}=\{\hat h_{(ij)}\}$ $(\hat h_{(ij)}=\hat h_{(ji)})$ と置くと，さまざまな α にたいする漸近的信頼係数 $(1-\alpha)$ の信頼集合は,

$$F_2(G)=(G_1-\hat G_1)^2\hat h_{(11)}+(G_2-\hat G_2)^2\hat h_{(22)}+2(G_1-\hat G_1)(G_2-\hat G_2)\hat h_{(12)}$$

と置くとき，入れ子型集合

$$\{G:\ F_2(G)\leq\chi^2_\alpha(2)/T\},\quad 0<\alpha<1 \tag{9.6}$$

与えられる［Hosoya, Yao and Takimoto (2005) を参照］.

10. 結論

本論文の前半では，スペクトル密度関数の正準分解の先行研究を展望するとともに，Rozanov の有理型スペクトル分解法を数値解法に適するかたちに改良した方法を提案した．とくにスペクトル密度関数の代数的分解構造の知識に数値計算法を補強したスペクトル正準分解数値計算過程を提案した．

正準分解の応用の一つに定常時系列の最適予測問題があり，因果性は基本的に予測問題に帰着される．本論文の後半は第 3 時系列が現前する場合の偏因果諸測度の推定・検定方法を議論した．偏因果測度にたいしては，データ生成過程がたとえ AR 過程であっても，スペクトルを直接分解するアルゴリズムが必要となる．Hosoya (1991, 1997a) が導入した 2 系列間の単純因果測度と異なり，それらの構成には観測 ARMA モデルに対応しないスペクトル密度行列の正準因子の知識が必要である．本論文の前半で示した MA スペクトル分解法を適用することでこの構成が可能となることを示した．

未解決の問題としては，検定としては Wald 検定統計量の標準的な漸近理論と，漸近共分散行列の数値評価にもとづく検定と信頼域構成を用いているが，有限標本でのそれらの精度は議論していない．統計的推測法が小標本にも適合するよう改善するためには，時系列ブートストラップ法の利用などが考えられる．また基礎的時系列モデルとして多変量共和分 ARMA 過程のみ対象としているが，この方向での一般化も可能な拡張である［例えば Terasaka and Hosoya (2007) を参照］.

謝　辞

本論文第 8 節を書くにあたり，瀧本太郎氏（現在 LSE 客員研究員）との議論が大変有益であった．

参　考　文　献

Breitung, J. and Candelon, B. (2006). Testing for short- and long-run causality: A frequency-domain approach, *Journal of Econometrics*, **132**, 363–378.

Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices, Vol. 1*, New York: Chelsea Publishing Co.

Gel'fand, I. M. and Yaglom, A. M. (1959). Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function, *Ann. Mathematical Society Translation Ser.*2, **12**, 199–246.

Geweke, J. (1982). Measurement of linear dependence and feedback between multiple time series, *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 304–313.

Geweke, J. (1984). Measures of conditional linear dependence and feedback between time series, *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 907–915.

Goodman, T. N. T., Micchelli, C. A., Rodriguez, G. and Seatzu, S. (1997). Spectral factorization of Laurent polynomials, *Advances in Computational Mathematics*, **7**, 429–454.

Granger, C. W. J. (1963). Economic process involving feedback, *Information and Control*, **6**, 28–48.

Granger, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by cross-spectrum methods, *Econometrica*, **39**, 424–438.

Granger, C. W. J. (1980). Testing for causality: a personal view-point, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **2**, 329–352.

Granger, C. W. J. and Lin, J. L. (1995). Causality in the long run, *Econometric Theory*, **11**, 530–536.

Grenander, U. and Rosenblatt, M. (1957). *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, Johan Wiley, New York.

Hannan, E. J. (1960). Time Series Analysis, London: Methuen & Co. Ltd.

Hannan, E. J. (1970). *Multiple Time Series*, New York: Wiley.

Hannan, E. J. and Rissanen, J. (1982). Recursive estimation of mixed autoregressivemoving average order, *Biometrika*, **69**, 81–94.

Hannan, E. J. and Kavalieris, L. (1984). A method for autoregressive-moving average estimation, *Biometrika*, **71**, 273–

280.

Hoffman, K. (1962). *Banach Spaces of Analytic Functions*. New Jerzy: Prentice-Hall.

Hosoya, Y. (1977). On the Granger condition for non-causality, *Econometrica*, **45**, 1735-1736.

Hosoya, Y. (1991). The decomposition and measurement of the interdependency between second-order stationary processes, *Probability Theory and Related Fields*, **88**, 429-444.

Hosoya, Y. (1997a). Causal analysis and statistical inference on possibly nonstationary time series, in *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Application, Seventh World Congress Vol. III*, eds D. M. Kreps and K. F. Wallis, Cambridge: Cambridge University press.

Hosoya, Y. (1997b). A limit theory for long-range dependence and statistical inference on related models, *The Annals of Statistics*, **25**, 105-137.

Hosoya, Y. (2001). Elimination of third-series effect and defining partial measures of causality, *Journal of Time Series Analysis*, **22**, 537-554.

Hosoya, Y. (2005). Fractional invariance principle, *Journal of Time Series Analysis*, **26**, 463-486.

Hosoya, Y., Yao, F. and Takimoto, T. (2005). Testing the one-way effect in the presence of trend breaks, *The Japanese Economic Review*, **56**, 107-126.

Hosoya, T. and Takimoto, T. (2006). A numerical method for factorizing the rational spectral density matrix, *Discussion Paper Series, Graduate School of Economics, Kyushu University*, No. 2006-5.

Hsiao, C. (1982). Time series modelling and causal ordering of Canadian money, income and interest rates, in *Time Series Analysis: Theory and Practice I*, ed. O. D. Anderson, 671-98, Amsterdam: North-Holland.

Ježek, J. and Kučera, V. (1985). Efficient algorithm for matrix spectral factorization, *Automatica*, **21**, 663-669.

Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors, *Journal of Economic Dynamic and Control*, **12**, 231-254.

Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, **59**, 1551-1580.

Kailath, T., Sayed, A. H. and Hassibi, B. (2000). *Linear Estimation*, New Jersey: Prentice Hall.

Lancaster, P. and Rodman, L. (1995). *Algebraic Riccati Equations*, Oxford: Clarendon Press.

Li, L. M. (2005). Factorization of moving-average spectral densities by state-space representations and stacking, *Journal of Multivariate Analysis*, **96**, 425-438.

Lütkepohl, H. and Reimers, H. E. (1992). Granger causality in cointegrated VAR process, *Economics Letters*, **40**, 263-268.

Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1988). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, New York: John Wiley & Sons.

Masani, P. (1960). The prediction theory of multivariate stochastic process, III, *Acta. Math*, **104**, 141-162.

Mosconi, R. and Giannini, C. (1992). Non-causality in cointegrated systems: Representation, estimation and testing, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **54**, 399-417.

Oară, C. and Varga, A. (2000). Computation of general inner-outer and spectral factorization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**, 307-2325.

Reinsel, G. C. (1997). *Elements of Multivariate Time Series Analysis* (*second edition*), New York: Springer.

Rozanov, Y. A. (1967). *Stationary Random Processes*, San Francisco: Holden-day.

Sayed, A. H. and Kailath, T. (2001). A survey of spectral factorization methods, *Numerical Linear Algebra with Applications*, **8**, 467-496.

Takimoto, T. and Hosoya, Y. (2004). A three-step procedure for estimating and testing cointegrated ARMAX models, *The Japanese Economic Review*, **55**, 418-450.

Takimoto, T. and Hosoya, Y. (2006). Inference on the cointegration rank and a procedure for VARMA root-modification, *Journal of Japan Statistical Society*, **36**, 149-171.

Terasaka, T. and Hosoya, Y (2007). A modified Box-Cox transformation in the multivariate ARMA model, *Journal of The Japan Statistical Society*, **37**, 1-24.

Toda, H. Y. and Phillips, P. C. B. (1993). Vector autoregression and causality, *Econometrica*, **59**, 229-255.

Toda, H. Y. and Phillips, P. C. B. (1994). Vector autoregression and causality: a theoretical overview and simulation study, *Econometric Review*, **13**, 259-285.

Toda, H. Y. and Yamamoto, T. (1995). Statistical inference in vector autoregressions with possibly integrated processes, *Journal of Econometrics*, **66**, 225-250.

Tuel, W. G. (1968). Computer algorithm for spectral factorization of rational matrices, *IBM Journal of Research and*

Development, **12**, 163–170.

Wilson, G. T. (1972). The factorization of matricial spectral densities, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **23**, 420–426.

Yamamoto, T. and Kurozumi, E. (2006). Tests for long-run Granger non-causality in cointegrated systems, *Journal of Time Series Analysis*, **27**, 703–723.

Yao, F. and Hosoya, Y. (2000). Inference on one-way effect and evidence in Japanese macroeconomic data, *Journal of Econometrics*, **98**, 225–255.

Youla, D. C. (1961). On the factorization of rational matrices, *IRE Transactions on Information Theory*, **IT-7**, 172–189.