

## 低次元強相関電子系におけるクロスオーバーと相転移 — 電子系繰り込み群ミニマム —

岸根順一郎 (分子科学研究所・理論研究系)

### 1 はじめに

繰り込み, 固定点, 有効理論, 自発的対称性の破れという基礎概念を素描し, 現代の凝縮系物理学を拓いたのはランダウである. その基盤理論であるフェルミ液体論 [1, 2] は, 断熱的連続性仮説: 「自由電子ガスから出発して電子間相互作用を ゆっくり 入れていくと, もとの低エネルギー個別励起状態は, 各状態の占有数と呼ばれる量子数の組  $n_\sigma(\vec{k}) = 0, 1$  でラベルできる個別素励起 (準粒子) 状態に断熱的に繋がる」に基づいている.<sup>1</sup> 「断熱的連続変形」をミクロな素過程に戻って実行する手法が, AGD[1] で広範に議論されている多体摂動論と繰り込み (diagrammatics) の処方である [3].

そして, 高エネルギー (バンド幅程度) から低エネルギー (フェルミ面) へ向けて系を眺める エネルギースケールを変えながら この連続変形を遂行するシステムティクスが「繰り込み群」の処方である. 繰り込み変換が充分進んだ先 (繰り込みの固定点) での作用 (action) が有効作用 (effective action) であり, 有効作用を議論すれば低温低エネルギーでの物理がわかると考えるのである.

擬 1 次元有機導体や, 梯子型伝導体, 高温超伝導の舞台となるモット絶縁体近傍の金属相など, いわゆる低次元強相関電子系では低次元性によって顕著に増強された揺らぎ<sup>2</sup>が準粒子コヒーレンスを著しく阻害する. その結果, 準粒子描像の破綻した金属 (インコヒーレント金属) からフェルミ液体 (コヒーレント金属) への乗り移り (クロスオーバー) が起こったり, インコヒーレント金属相からいきなり超伝導や磁気転移が起きるケースが遍在している. ここでは, この種の難題を繰り込み群の立場から理解する処方 (のミニマム) をまとめる. 路傍に古くて新しい問題が山積しているので, 適宜寄り道しながら進めたい.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 「ゆっくり」の条件をノジュール [2] 流に言うとし「1/ 準粒子の寿命  $\ll R \ll$  温度, となるような (ゆっくりした) スケール  $R$  が存在する」いうことになる.

<sup>2</sup> 絶対零度での量子揺らぎ (量子ゼロ点振動) と有限温度の熱揺らぎをひっくるめて揺らぎと呼ぶ. 有限温度では量子揺らぎと熱揺らぎを峻別することは原理的に不可能である.

<sup>3</sup> 詳細は [4] を参照されたい. また, 関連する計算ノート (ほとんど雑記状態) を

### 2 繰り込みから繰り込み群へ

外からの刺激 (外場) に対する系のレスポンスを調べるのがおよそすべての物性実験の手段であるが, 同じ系に対して実験を行った場合でも, プロブによって異なるエネルギースケールでのレスポンスを見ている点が重要である.<sup>4</sup> そこで, 理論の側から実験結果を解釈しようとするとき, その実験で問題となるエネルギースケールは何か? そのエネルギースケールのウィンドウ内で採るべきモデルハミルトニアン (有効理論) の形は何か? という見方が重要になる. この見方は繰り込み群の発想そのものであるといえる. この意味で, 繰り込み群と有効理論の発想法は極めて現実的なものの見方である, ともいえるだろう.

さて, 多体問題の難しさの本質は「一般に異なるエネルギースケールの物理は独立でない」という点に尽きる. この困難は, 「量子力学」の 2 次摂動公式に既に顕れる.

$$\delta\epsilon_n = \sum_{m \neq n} \frac{| \langle m | V | n \rangle |^2}{\epsilon_n - \epsilon_m},$$

において, 中間状態  $|m\rangle$  は, “EVERYTHING IN THE WORLD” を含む. ここで,  $\epsilon_m \sim \epsilon_n$  (擬縮重) となるペア  $(n, m)$  がたくさんあれば摂動補正は膨らむ. 金属電子の真空  $|0\rangle$  はフェルミ海が満ちた状態 (フェルミ真空) であり, 中間状態  $|m\rangle$  として粒子・正孔 (ph) 対, 粒子・粒子 (pp) 対をゼロエネルギーで励起することができる. これらの対励起を中間状態として足し上げたものをダイアグラムで表すと「ループ」ができる (Fig. 1). これが金属電子系における赤外発散<sup>5</sup>の起源である [6]. 繰り込み群は, この赤外発散が 対数特異性 の形で顕れる場合に強力な手法となる.<sup>6</sup> これが以降の主題である.

<http://magellan.ims.ac.jp/kishine/notes/contents.html> に置くので適宜参照されたい.

<sup>4</sup> 輸送, 熱測定は 0 Hz, NMR は  $10^6$  Hz,  $\mu$ SR は  $10^8$  Hz, 中性子散乱は  $10^{11}$  Hz, といったあたりが特徴的なエネルギースケールとなる.

<sup>5</sup> 金属電子系の場合, 高エネルギー側には格子間隔  $a$  で決まる自然なカットオフ  $\sim 1/a$  がある. このため赤外発散は有りえない.

<sup>6</sup> 以下で詳述するように, 1 次元電子系 [7] では pp ループ, ph

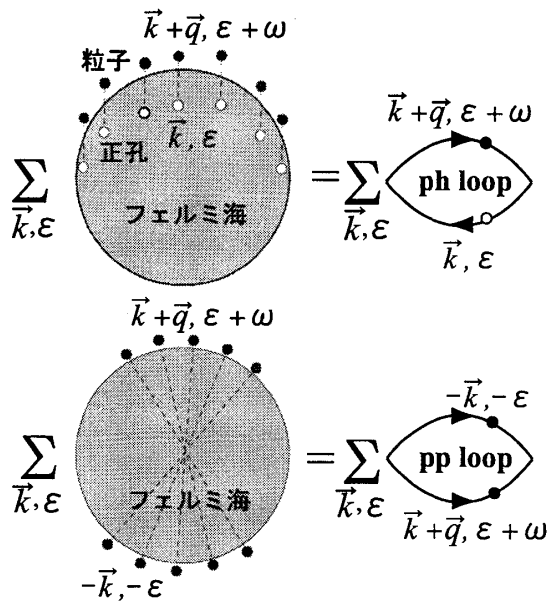


Figure 1: ph 励起, pp 励起とループ

波数  $\vec{k}$  と  $\vec{k}'$  を持った pp 対, ph 対の励起エネルギーは  $\xi_{\vec{k}} \pm \xi_{\vec{k}'}$  (プラスが pp 対, マイナスは ph 対) であり, これらを中間状態とする摂動補正は  $\sum_{\vec{k}} |\text{遷移行列要素}|^2 / |\xi_{\vec{k}} \pm \xi_{\vec{k}'}|$ , の形になる (Fig. 1 の記法に対応させると  $\varepsilon = 0, \omega = 0$ , ph 対については  $\vec{k}' \rightarrow \vec{k} + \vec{q}$ , pp 対については  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}, \vec{k}' \rightarrow \vec{k} + \vec{q}$ ). この和  $\sum_{\vec{k}}$  を積分に直したとき,  $\xi$  (の絶対値) がゼロからバンド幅  $E_0$  程度まで連続的な値をとり得る結果, 状況が災い<sup>7</sup>して

$$\sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{|\text{遷移行列要素}|^2}{\xi_{\vec{k}} \pm \xi_{\vec{k}'}} \rightarrow \int_0^{E_0} \frac{d\xi}{\xi} = \ln \frac{E_0}{0},$$

となってしまうと対数特異性が出る. このため, 繰り込まれた相互作用定数  $g$  を 2 次摂動で計算すると  $g^2 \ln \frac{E_0}{0}$  なる寄与が出て破綻が起きる.

さて, この災いを福に転じさせるのがスケールリングと繰り込み群の発想である. 積分をゼロから  $E_0$  に渡つ

ループ共に対数特異性を示す. 2 次元, 3 次元でも一般に pp ループの対数特異性は残る (これが超伝導を引き起こす). フェルミ面にネスティングがあれば ph ループも対数特異性を示す. 近藤問題 [6] では, 局在スピンと伝導電子の散乱過程が対数特異的である. 軟 X 線異常吸収端及び及び異常放射端問題 [6] も近藤問題と同根の対数特異性が出る. これらと異質ではあるが, アンダーソン局在の問題では 2 次元弱局在領域でクローン相互作用とクーロンの結合が対数特異的となる [8]. このように, case by case であるが, いろいろな場面で対数特異性が現れ, それぞれに繰り込み群の手法が発揮される.

<sup>7</sup>一目して, 災いの鍵を握るのは  $\xi_{\vec{k}}$  と  $\xi_{\vec{k}'}$  の関係 および和を積分に直したときの 測度 であることがわかる (具体例は後で).

ていきなりやったから発散が出たのだ. ここで, 対数の基本的な性質を思い出すと, 0 から  $E_0$  に渡るエネルギー  $0 \leq |\xi| \leq E_0$  の「窓」を

$$\ln \frac{E_0}{0} = \ln \frac{E_0}{\omega_1} + \ln \frac{\omega_1}{\omega_2} + \dots + \ln \frac{\omega_N}{0},$$

と「小窓」に分割できることに気づく. 重要なのは, 分割された各々の小窓がすべて同じ重みで効く点である. これがスケール不変性である. 電子系の繰り込み群解析の基本理念は, 隣接する小窓に属する状態を拾いながら, スケール不変性に基づいて漸化的に繰り込みを実行し, 低エネルギー有効作用の形を見極めようということである.<sup>8</sup> 逆にいえば, 繰り込みが漸化的に遂行できる根拠の背景に「対数特異性」ありきななのである.

さて, 繰り込み群の枠組みでは, 相互作用の結合定数  $g$  (一般には複数のチャンネルに分かれる) が系を眺めるエネルギースケール  $\omega_i$  に依存して変動すると考える. 概念図を Fig. 2 にまとめた. まずは  $\omega_0 \equiv E_0$  (バンド幅程度) での結合定数  $g(\omega_0)$  から出発する. すると  $g(\omega_1)$  は,  $g(\omega_0)$  を摂動として, 小窓 (1) から来る繰り込み補正 ( $\ln[\omega_0/\omega_1]$  に比例) を受ける.  $g(\omega_2)$  は,  $g(\omega_1)$  を摂動として, 小窓 (2) から来る繰り込み補正 ( $\ln[\omega_1/\omega_2]$  に比例) を受ける.... かくして,  $g(\omega_{i+1})$  は,  $g(\omega_i)$  を摂動として, 小窓 (i+1) から来る繰り込み補正 ( $\ln[\omega_i/\omega_{i+1}]$  に比例) を受け,

$$g(\omega_{i+1}) = g(\omega_i) + \beta[g(\omega_i)] \ln \left[ \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} \right], \quad (1)$$

なる形の漸化式が得られる.  $g(\omega_0)$  を初期値としてこれを解けば, 低エネルギーへ向けての  $g(\omega_i)$  の「流れ」が一意に定まることになる.  $\beta[g(\omega_i)]$  (繰り込みのベータ関数) は, 積分測度にかかる定数や遷移行列要素から来る. 重要なのは,  $g(\omega_i)$  が高エネルギー側のすべての  $g(\omega_j)$  ( $0 \leq j < i$ ) の繰り込み情報を抱き込んでいる為, Fig. 2 にダイアグラムで示したように単純な pp ループや ph ループを「種」としてこれらが「入れ子」になった複雑な繰り込み過程が自動生成される点である (Fig. 2 には入れ子構造のほんの一部の例しか描いていない).<sup>9</sup> この操作 (繰り込み変換) を充分繰り返した先を繰り込みの固定点と呼ぶ. 固定点での結合定数

<sup>8</sup>相転移点近傍の臨界現象に対する繰り込み群でも, 揺らぎの相関長が無限大になって特徴的な距離スケールが消失する, という事実が根底にあったことを思い出しておこう.

<sup>9</sup>この入れ子構造の生成をパルケ (寄木細工) と呼ぶこともある. アンダーソンは “Basic Notions” の中で, パルケのことを “This remarkable feat involves doing bubbles and ladders at the same time ... It works in special cases, but I suspect the renormalization group of always being behind this success.”

講義ノート

$g^* = \lim_{i \rightarrow \infty} g(\omega_i)$  を含む理論が低エネルギー有効理論である。

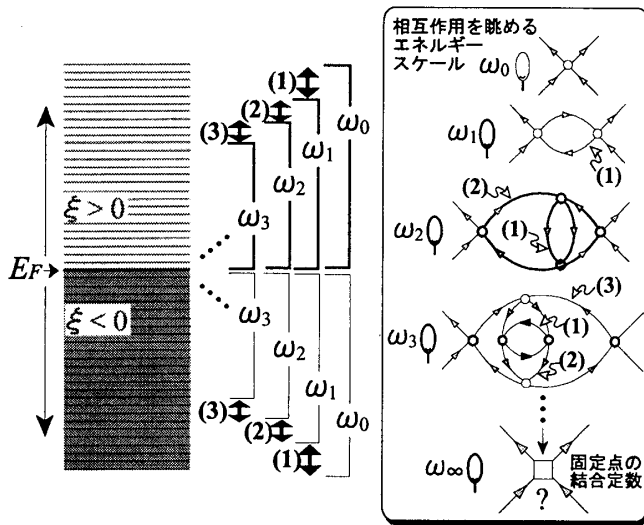


Figure 2: 電子系繰り込み群の概念図

さて、8 節で例示するように、この漸化式を正しく決定するためには次の3つのステップ(ウィルソン流の繰り込み群処方)を踏む必要がある:

- I. 粗視化,
- II. スケール変換と波動関数の繰り込み,
- III. 結合定数の漸化式=繰り込み群方程式の立式.

エネルギー準位は稠密なので、 $\omega_i$  を連続変数と見てスケールパラメータ  $l$  ( $0 \leq l \leq \infty$ ) を導入し、

$$\omega_l = E_0 e^{-l}, \tag{2}$$

とパラメタライズする。  $l \rightarrow \infty$  がゼロエネルギー極限である。すると

$$g(\omega_i) \rightarrow g_l, \quad g(\omega_{i+1}) \rightarrow g_{l+dl},$$

$$\ln[\omega_i/\omega_{i+1}] \rightarrow \ln[\omega_l/\omega_{l+dl}] = dl,$$

と対応するから (1) は

$$\frac{dg_l}{dl} = \beta[g], \tag{3}$$

なる“Lie の微分方程式”の形に書ける。これが繰り込み群方程式の一般形である。

ベータ関数  $\beta[g]$  の形によって結合定数は relevant, marginal, irrelevant な場合に分かれる (Fig. 3)。後で具体例を扱うが、 $\beta[g]$  を知るには具体的なループ計算 (Basic Notions[5]p. 124) と述べている。パルクとは対数特異的なループを足しこんでいく操作であり、背後に繰り込み群があるのはほぼ明白に思える。

が必要となる。固定点では irrelevant な結合定数を落として差し支えないので、marginal/relevant な結合定数だけを残せば有効作用 (有効ハミルトニアン) が書き下せる [universality (普遍性クラス) の考え方は「固定点の分類学」である]。

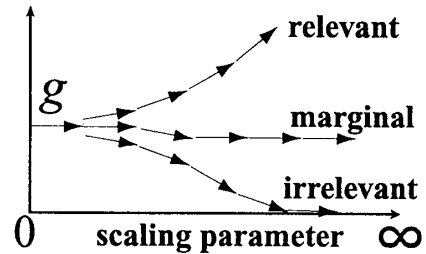


Figure 3: 繰り込みの流れ

### 3 「固定点」としてのフェルミ液体

#### 3.1 フェルミ液体論

ランダウは相互作用する (等方的3次元) フェルミ粒子系の低エネルギー有効理論は何か?と問うて固定点の有効ハミルトニアンを現象論的に書き下した [1]。これがランダウ汎関数

$$\delta E = \sum_{\vec{k}, \sigma} \xi_{\vec{k}}^* \delta n_{\sigma}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'; \sigma, \sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}') \delta n_{\sigma}(\vec{k}) \delta n_{\sigma'}(\vec{k}'), \tag{4}$$

である。  $\delta n_{\sigma}(\vec{k})$  は準粒子分布関数の基底状態 (フェルミ真空) からのズレ。1 粒子分散は  $\xi_{\vec{k}}^* = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} - \epsilon_F$  ( $k = k_F$ ) で与えられ、  $m^*$  はフェルミ面上の有効質量である ( $\hbar = k_B = 1$ )。系が等方的なら  $N_0 f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}') \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} [F_l^s + F_l^a \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'] P_l(\cos \theta)$  と分解してランダウ関数  $F_l^s, F_l^a$  が導入できる。これによって比熱の  $\gamma$ , スピン帯磁率  $\chi$ , 電荷圧縮率  $\kappa$  へのランダウ補正 (相互作用の無い場合との比) が、

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{m^*}{m}, \quad \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1+F_0^s}, \quad \frac{\chi}{\chi_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1+F_0^a}, \tag{5}$$

ウィルソン比は  $R_W = (\chi/\chi_0)/(\gamma/\gamma_0) = 1/(1+F_0^a)$  と書ける。さらにガリレイ不変な系では  $m^*/m = 1 + F_1^s/3$  となる。時間変化を含めた  $\delta n_{\sigma}(\vec{k}; \vec{r}, t)$  に対するボルツマン方程式を導き、解が極 (自発極) を持つ条件から ゼロ音波 の分散が求まる。この有効理論に基づく現象論は大成功を収めたが、同時にミステリーを

残す。(1)  $f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}')$  のマイクロな意味は何か?(2) 何故  $\delta n_{\sigma}(\vec{k})\delta n_{\sigma'}(\vec{k}')$  の形の積だけが  $E$  に入っているのか? などなど。

3.2 繰り込み群による解釈 [9]

3.2.1 Tree レヴェルの解析

このミステリーに対し, AGDは「骨格ダイアグラム+ウオード・高橋恒等式」を駆使した論証を展開する [1]. 一方, モダンな正当化を標榜するのがシャンカーによる繰り込み群によるアプローチ [9] である. これはフェルミ液体の有効作用 (ランダウ汎関数) を固定点の有効作用と捉え, 繰り込み群によって導こうという視点である. 問題は単純で, ランダウと同じ設定 (等方的フェルミ面) のもとで「フェルミ面上 (つまり低エネルギー極限) で marginal 或いは relevant な散乱チャンネルは何か?」ということである. Fig. 4 に示すようにフェルミ面近傍のエネルギー  $2E_0$  の薄皮内での散乱過程を考える. エネルギーは  $\varepsilon_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) に据え置き, 運動量保存  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4 = 0$  を満たしながらフェルミ面を挟み込むカットオフ  $E_0$  をどんどん狭めていく [ $|\xi_{\vec{k}_i}| \leq E_0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\xi_{\vec{k}} = |\vec{k}|^2/2m - E_F$  はフェルミ面から測った1電子エネルギー].

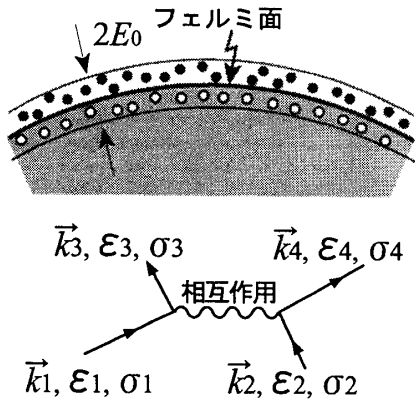


Figure 4: フェルミ面近傍の散乱過程

スピン反転過程が無ければスピンも保存 ( $\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = \sigma_4$ ) する. すると, 2次元3次元の丸いフェルミ面の場合, 「相空間の幾何」だけで散乱チャンネルの絞込みはほぼ完了する. この絞込みはループを含まないので「tree レベルの解析」と呼ばれる. 2次元の丸いフェルミ面の場合 (3次元フェルミ球の場合もほとんど同じ), Fig. 5 のような絵を描けば良い (文献 [9] ではもう少しきちんとした議論が与えられているが本質は同内容). 図中に示したような3つのチャンネル

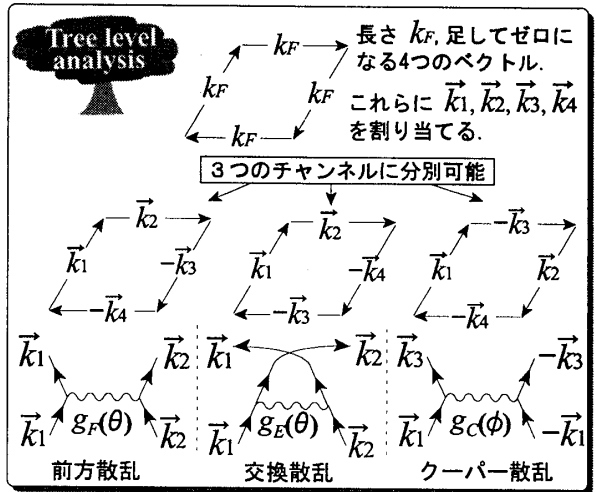


Figure 5: 2次元電子系散乱過程の tree レベル解析

ル, 前方 (forward) 散乱:  $g_F(\theta)$ , 交換 (exchange) 散乱:  $g_E(\theta)$ , クーパー (Cooper) 散乱:  $g_C(\phi)$  が生き残ることが判る. ここで,  $\theta$  も  $\phi$  も連続的な角度変数であるので無限個の散乱チャンネルが存在することになる. さて, tree level の議論は終わったので1ループレベル (pp 或いは ph ループひとつだけ) を種にした解析) に進む.

3.2.2 1ループレベルの解析: pp ループの計算

Fig. 1 に現れた有限の  $T, \omega, \vec{q}$  に対するループの計算は, 温度グリーン関数<sup>10</sup>

$$G_0(\vec{k}, i\varepsilon_n) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_{\vec{k}}}, \quad (6)$$

を使ってダイアグラムを式で書き, 下記の (7) を用いて松原和をとった後, 解析接続するのが一番簡単である.<sup>11</sup>  $\xi_{\vec{k}}$  はフェルミエネルギー  $E_F$  から測った電子の運動エネルギー,  $\varepsilon_n = (2n + 1)\pi T, \omega_m = 2m\pi T$  はそれぞれフェルミオン, ボゾンの松原振動数である. 公式

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon_n \eta}}{i\varepsilon_n - a} = f(a) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \frac{a}{2T} \right], \quad (7)$$

( $\eta$  は正の無限小数,  $a$  は実定数,  $f(a)$  はフェルミ分布関数) および  $\tanh \frac{a+i\omega_m}{2T} = \tanh \frac{a}{2T}$  を使うと, ph ルー

<sup>10</sup>温度グリーン関数 (6), グリーン関数 (19), 遅延/先進グリーン関数の解析的性質および相互関係については [1] 参照.

<sup>11</sup>通常 diagrammatics を実行する場合, 複雑なダイアグラムに対応する項を温度グリーン関数を使って書き下し, 必ず内線の松原和をすべてとり終えたあとに 外線の虚振動数を実振動数に解析接続する.

講義ノート

ブ, pp ループはそれぞれ (ダイアグラムを拾う際のウイック定理から来る符号を別にして),

$$\begin{aligned}
 & \text{ph ループ: } \tilde{\Pi}_{\vec{q}}(i\omega_m; T) \\
 & \equiv T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{k}} \mathcal{G}_0(\vec{k} + \vec{q}, i\varepsilon_n + i\omega_m) \mathcal{G}_0(\vec{k}, i\varepsilon_n) \\
 & = +\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh \frac{\xi_{\vec{k}+\vec{q}}}{2T} - \tanh \frac{\xi_{\vec{k}}}{2T}}{i\omega_m - \xi_{\vec{k}+\vec{q}} + \xi_{\vec{k}}}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{pp ループ: } \tilde{\Delta}_{\vec{q}}(i\omega_m; T) \\
 & \equiv T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{k}} \mathcal{G}_0(\vec{k} + \vec{q}, i\varepsilon_n + i\omega_m) \mathcal{G}_0(-\vec{k}, -i\varepsilon_n) \\
 & = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh \frac{\xi_{\vec{k}+\vec{q}}}{2T} + \tanh \frac{\xi_{-\vec{k}}}{2T}}{i\omega_m - \xi_{\vec{k}+\vec{q}} - \xi_{-\vec{k}}}, \tag{9}
 \end{aligned}$$

と求まる.  $m > 0$  に対して  $i\omega_m \rightarrow \omega + i0^+$  と解析接続すれば, 遅延部分の実振動数ループ関数が得られる.

$g_C$  を繰り込む対数特異的な 1 ループダイアグラムは Fig. 7 右辺第 2 項である (ph ループも  $g_C$  を繰り込むが, 対数特異性は出ないのでベータ関数には寄与しないとして捨てる). ここで, 後々のために pp ループの計算を最後までやっておく (類似の計算が揺らぎの関与する多体問題一般に頻出するので). (9) で  $i\omega_m \rightarrow \omega + i0^+$  と解析接続すると pp ループの実部は

$$\Delta(\omega; T) \equiv \Re \tilde{\Delta}_{\vec{q}=0}(\omega + i0^+; T) = - \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh \frac{\xi_{\vec{k}}}{2T}}{\omega - 2\xi_{\vec{k}}}$$

と書ける.  $\xi_{\vec{k}}$  にカットオフ  $|\xi_{\vec{k}}| \leq E_0$  がある点に注意しよう. フェルミ面近傍の状態密度を  $N_F = \text{一定}$ , として  $\sum_{\vec{k}} \rightarrow N_F \int d\xi$  と和を積分に直すと次元に依らずに

$$\Delta(\omega; T) = \frac{N_F}{2} \int_{-E_0}^{E_0} \frac{\tanh \frac{\xi}{2T}}{\xi - \omega/2} d\xi \equiv \frac{N_F}{2} S(\omega, T). \tag{10}$$

ここに出た積分を実行する為に,

$$I \equiv \oint_C dz \frac{\tanh \frac{z}{2T}}{z - \omega/2} = 0$$

を考える (積分路  $C$  内に特異点はない). 経路を実軸に沿う経路, 半円周部, 虚軸を這う部分に分け, 半円周部からの寄与が  $E_0/2T$  の大きい極限で消えることに注意すると

$$I = S(\omega, T) - \oint_C dz \frac{\tanh \frac{z}{2T}}{z - \omega/2} = 0$$

となる (経路  $C, \tilde{C}$  は Fig. 6 図参照).

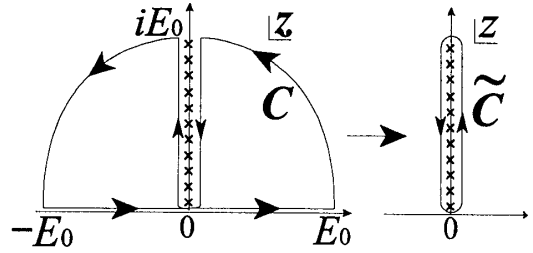


Figure 6: 積分路

第 2 項の積分路  $\tilde{C}$  は  $\tanh \frac{z}{2T}$  の 1 位の極  $z_n = i(2n+1)\pi T$  を囲む ( $C$  と  $\tilde{C}$  は逆向きなので第 2 項にマイナスがつく). これより,

$$S(\omega, T) = 4\pi iT \sum_{n=0}^{n_c} \frac{1}{i(2n+1)\pi T - \omega/2},$$

が得られる. ここで,  $n_c$  は  $(2n_c + 1)\pi T = E_0 \implies n_c = [E_0/2\pi T - 1/2]$  で決まる整数である. ダイガマン関数

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+z} - \frac{1}{k+1} \right),$$

を導入し,

$$\sum_{n=1}^{n_c} \frac{1}{n+a} = \psi(n_c + a + 1) - \psi(a + 1)$$

に  $a = -1/2 + i\omega/4\pi T$  を入れると,

$$S(\omega, T) = 2 \left[ \psi \left( \frac{E_0}{2\pi T} + i \frac{\omega}{4\pi T} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} + i \frac{\omega}{4\pi T} \right) \right].$$

$E_0$  に対して  $\omega$  を無視し, 大きな引数  $z$  に対する漸近形  $\psi(z) \sim \ln z$  及び  $\psi(1/2) = \ln \frac{e^{-\gamma}}{4}$  ( $\gamma = 0.57721\dots$ : オイラー数) を使うと,

$$\Delta(\omega; T) = N_F \left[ \ln \frac{2e^\gamma E_0}{\pi T} + \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{i\omega}{4\pi T} \right) \right] \tag{11}$$

が得られる. これより直ちに

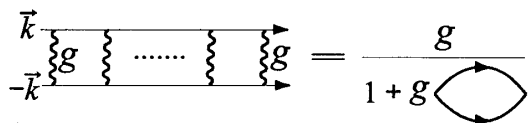
$$\Delta(\omega = 0; T) = N_F \ln \frac{2e^\gamma E_0}{\pi T} \tag{12}$$

が得られる. また,  $T \ll \omega$  で最も特異的な項を拾うと

$$\Delta(\omega; T \rightarrow 0) = N_F \ln \frac{E_0}{\omega}, \tag{13}$$

となることが判る [ $T \rightarrow 0$  の極限で  $\tanh[\xi/2T] \rightarrow \text{sign}(\xi)$ , に注意すると (10) からすぐ導ける].

pp ループを骨格として引力  $g < 0$  を仮定し、



の様にクーパー散乱が無限に繰り返された梯子型ダイアグラム (幾何級数の和) を計算すると、相互作用によって繰り込まれたクーパー散乱振幅として

$$C(T) = \frac{g}{1 - |g|\Delta(\omega = 0; T)} \quad (14)$$

が得られる。これが発散する温度

$$T_c^{\text{BCS}} = 1.13 E_0 e^{-1/|g|N_F}, \quad (15)$$

がBCS理論の与える超伝導転移温度である。  $T_c$  を使えば  $|g|\Delta(\omega = 0; T) = \ln[T_c/T]$  と書ける。ここで  $\Delta(\omega; T)$  が次元に依らず対数特異的であることを強調しておく。

さて、次に  $g_C$  の繰り込み群解析をやろう。2節の議論に従ってスケールパラメータに依存した  $g_{C;l}$  の微分方程式を導く。1ループレベルで  $g_C$  を繰り込む「種」は pp ループだけである。中間状態の積分を  $\omega_{l+d} \leq |\xi_{\vec{k}}| \leq \omega_l$  に限定して  $g_{C;l}$  と  $g_{C;l+d}$  の関係を図示すると Fig. 7 の様になる。<sup>12</sup>

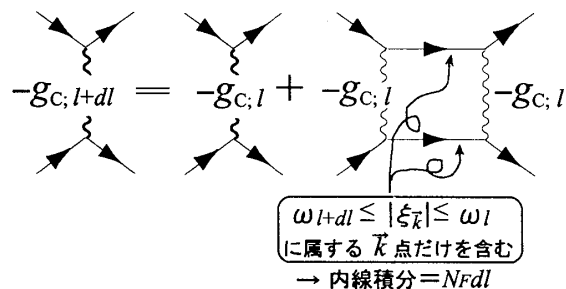


Figure 7: クーパー散乱の繰り込み群方程式

ループ部分の寄与は (13) より直ちに  $N_F \ln[\omega_l/\omega_{l+d}] = N_F d l$  であるから、繰り込み群方程式 (3) は

$$\begin{aligned} -g_{C;l+d} - (-g_{C;l}) &= (-g_{C;l}) N_F d l (-g_{C;l}) \\ \Rightarrow \frac{dg_{C;l}}{dl} &= -N_F g_{C;l}^2, \end{aligned} \quad (16)$$

<sup>12</sup>ダイアグラム中  $-g_C$  のマイナスは相互作用項を摂動展開するとき現れるものである。ハミルトニアンから作用を作るときマイナスがつく [式 (22), (24) を見よ]。このマイナスが摂動展開に顕れる、と見ても良い。

となる。ここで、(12) よりエネルギーと温度を入れ替えてスケールパラメータを  $l = \ln[E_0/T]$  と置き換えてもまったく同じ繰り込み群方程式が得られることに注意しよう。つまり、繰り込み群方程式において  $\omega$  と  $T$  はエネルギースケールとして同格である。

ここで、繰り込み群と梯子型求和との関係を考えよう。梯子型求和は  $\omega = 0$ , 有限の  $T$  に対して pp ループを骨格とする散乱過程を摂動のすべての次数に渡って足し上げたものである。一方、繰り込み群方程式はひとつの pp ループを「種」として、エネルギースケールを変えながら梯子型求和に含まれる過程を自動生成する。実際、(16) を解けば

$$g_{C;l} = \frac{g_{C;0}}{1 - |g_{C;0}| N_F l} = \frac{g_{C;0}}{1 - |g_{C;0}| N_F \ln[E_0/\omega]}, \quad (17)$$

( $g_{C;0}$  は繰り込みの初期値) となって (14) と一致することがわかる。<sup>13</sup>

フェルミ面にネスティングがあると ph ループも対数特異性を示す。これに伴う密度波転移については 5.2 節で触れる。

### 3.2.3 繰り込み群方程式

さて、残る前方散乱と交換散乱を繰り込む最も特異的な<sup>14</sup> ダイアグラムを Fig. 8 に示す。これらは短距離斥力系の集団励起であるゼロ音波の種となりフェルミ液体論の微視的正当化 [1] に際して主役を演じる。しかし、2次元、3次元の等方的フェルミ面の場合、この特異性は対数特異性には至らないので繰り込みのベータ関数には効かない。<sup>15</sup> よって繰り込み群のコンテキストのなかでは捨ててよい。

以上を踏まえて1ループレベルで繰り込み群方程式を改めて書き下す。  $g_C(\phi)$  を角運動量  $l$  ごとに分解して  $g_C^l = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i l \phi} g_C(\phi)$  と書くと、

$$\frac{dg_F}{dl} = 0, \quad \frac{dg_E}{dl} = 0, \quad \frac{dg_C^l}{dl} = -\frac{1}{4\pi} [g_C^l]^2 / 4, \quad (18)$$

となる (結合定数は適当に無次元化した)。  $g_F(\theta)$  と  $g_E(\theta)$  は流れない、つまり marginal である。一方、  $g_C^l$  は (17) 同様  $g_C^l = g_{C;0}^l / [1 + (g_{C;0}^l / 4\pi) l]$  となって、初

<sup>13</sup> だったら繰り込み群をやらずに梯子型求和と泡型求和 (これらをあわせて RPA) で済ませればよいではないか? と思われるかもしれないがそれは違う。いまの問題の場合クーパー散乱は pp ループによってのみ繰り込まれる。しかし一般に Fig. 2 に示したように pp ループと ph ループが絡み合って繰り込みが進行する。このような場合 RPA は使えない。

<sup>14</sup> ループが  $\lim_{q \rightarrow 0} G_0(k) G_0(k+q)$  を含むので。詳しくは AGD[1] のセクション 18。

<sup>15</sup> 1次元では Fig. 7, 8 のダイアグラムすべてが対数発散する (Fig. 17 を見よ)。

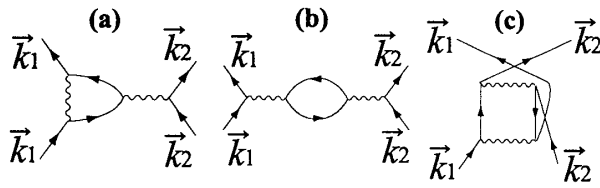


Figure 8: 前方散乱 (a と b) と交換散乱 (c) を繰り返す “最も特異的な” ダイアグラム。2,3 次元の丸いフェルミ面の場合, 対数特異性は示さない。

期値  $g_{C,0}^l$  が斥力か引力かによってそれぞれ irrelevant 或いは relevant となる。  $g_{C,0}^l < 0$  となる  $l$  が存在すれば, 対応する角運動量のチャンネルでクーパー不安定性が起きる, というのがコーン・ラッティンジャーの定理である。これを「繰り返みの流れ図」として表すと Fig. 9 の様になる。つまり,  $g_{C,0}^l > 0$  なら  $g_C$  はゼロへ繰り返まれて流れは止まる。これがフェルミ液体固定点である。一方  $g_{C,0}^l < 0$  なら超伝導転移が起こる。ここに「固定点としてのフェルミ液体」という見方が整えられた。フェルミ液体論とは, 前方散乱と交換散乱を marginal な結合定数として持つ固定点理論というわけである。

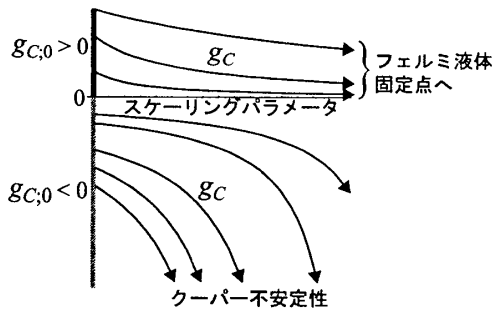


Figure 9: 2,3 次元等方的フェルミ系の繰り返みフロー

ここから (4) へ辿り着くために, Fig. 4 の相互作用定数を  $g(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4; \omega)$  と書く ( $\omega$  は散乱に伴うエネルギー移行). 小さな運動量移行  $\vec{q} \rightarrow 0$  を考えると,  $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_4 = \vec{k}_2 - \vec{q}$  の場合が前方散乱,  $\vec{k}_3 = \vec{k}_2 - \vec{q}, \vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{q}$  の場合が交換散乱である.<sup>16</sup> これらの引き起こす集団励起 (ゼロ音波) の種 (Fig. 8 のダイアグラム) を注意深く扱うと, ランダウ関数が極限値

$$f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = z^2 \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[ \lim_{\vec{q} \rightarrow 0} g(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4; \omega) \right]$$

<sup>16</sup>AGD はじめ従来の文献では, (ここで述べている繰り返み群のコンテキストでの) 前方散乱と交換散乱をひっくり返して ( $\vec{q} \rightarrow 0$  の意味で) “前方散乱”と呼んでいる。言葉の問題ではあるが, 混乱を避けるために指摘しておく。

で与えられることが判る [1].

#### 4 フェルミ液体と非フェルミ液体 [1, 10]

準粒子過程 (1 粒子過程) についての情報は, グリーン関数

$$G(\vec{k}, t) = -i \langle 0 | T c_{\vec{k}}(t) c_{\vec{k}}^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (19)$$

に込められている。相互作用のないバンド電子の場合,  $T$ -積に注意してフーリエ変換すると

$$G_0(\vec{k}, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \xi_{\vec{k}} + i0 + \text{sign}(\xi_{\vec{k}})}$$

となる。スペクトル関数

$$A(\vec{k}, \epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_0(\vec{k}, \epsilon) = \delta(\epsilon - \xi_{\vec{k}}) \text{ for } \epsilon > 0$$

が励起された粒子 ( $\epsilon < 0$  に対してはホール) のスペクトル密度分布を与える。

相互作用があると自己エネルギー (の既約部分)  $\Sigma(\vec{k}, \epsilon) = \Sigma'(\vec{k}, \epsilon) + i\Sigma''(\vec{k}, \epsilon)$  が生じ, ダイソン方程式を通して相互作用する電子系のグリーン関数

$$G(\vec{k}, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \xi_{\vec{k}} - \Sigma(\vec{k}, \epsilon)}$$

が求まる。

「フェルミ液体挙動」は,  $G(\vec{k}, \epsilon)$  の挙動によって以下のように定義される (大切なのは, 「 $\Sigma'$  と  $\Sigma''$  の両方を見よ」という点である)。

グリーン関数が

$$G(\vec{k}, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \xi_{\vec{k}} - \Sigma(\vec{k}, \epsilon)} \sim \frac{z}{\epsilon - \xi_{\vec{k}} + i\Gamma_{\vec{k}}^*},$$

$$\xi_{\vec{k}}^* \equiv a\xi_{\vec{k}} = \frac{k_F}{m^*} (|k| - k_F), \quad \Gamma_{\vec{k}}^* \equiv b\Sigma''(\vec{k}, \xi_{\vec{k}})$$

と極 (pole) を持つ形にかけ [ $z, a, b$  は定数], 次の (1), (2) の二つの条件をとともに満たす。

- (1)  $0 < z < 1 \implies$  フェルミ面の存在 [バンド幅  $z$  倍に縮む。DOS, 比熱の  $\gamma$   $1/z$  倍に増強]
- (2)  $\Gamma_{\vec{k}}^* \ll |\xi_{\vec{k}}^*| \implies$  寿命  $\tau = \Gamma_{\vec{k}}^{*-1}$  が十分長い

この条件は  $\Sigma'(\vec{k}, \epsilon)$  の  $k = k_F, \epsilon = 0$  周りでの展開可能性と等価であり,

$$z = \left[ 1 - \left. \frac{\partial \Sigma'(k_F, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right]^{-1},$$

を与える。  $a$  も  $b$  も自己エネルギーの微係数で書ける定数となる。準粒子の波動関数は

$$| \text{準粒子 } \vec{k}, \sigma \rangle = \sqrt{z} | \text{自由電子 } \vec{k}, \sigma \rangle + \text{粒子} \cdot \text{正孔対励起など多電子励起},$$

という形に書け、一個の準粒子励起は多電子励起を引きずる。|準粒子 $\vec{k}, \sigma$ )と|自由電子 $\vec{k}, \sigma$ )が1対1対応する、というのが断熱連続性原理のマイクロな表現であり、 $\Sigma'(\vec{k}, 0)$ のためにフェルミ面は変形するがフェルミ海の体積は不変 (Luttinger の定理) となる。

さて、ハバード型の短距離相互作用  $U$  を仮定して 3次元、2次元の丸いフェルミ面の場合に 2次 (2ループ) 自己エネルギーを計算すると、

$$\Sigma(\mathbf{k}, \epsilon) = \text{---} = \begin{cases} c_1\epsilon - ic_2\epsilon^2, (d=3), \\ c_3\epsilon - ic_4\epsilon^2 \ln|\epsilon|, (d=2). \end{cases}$$

となり ( $c_1, \dots, c_4$  は定数), フェルミ液体挙動の条件がクリアできていることがわかる [11]. この条件がクリアできている場合の準粒子の分布関数はフェルミ面で不連続な跳びを示し、スペクトル関数はローレンツアンになる。これらを Fig. 10 にまとめる。

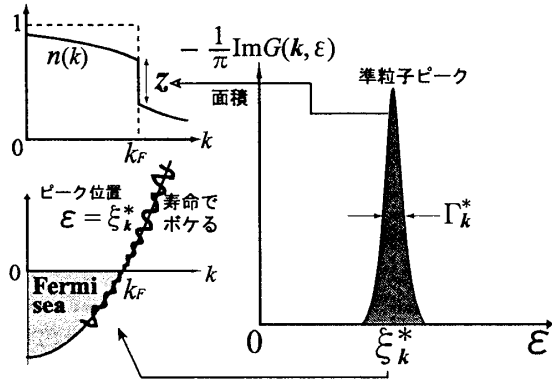


Figure 10: フェルミ液体

どんなに小さくとも準粒子ウエイト  $z$  が有限である限り、準粒子コヒーレンスは健在である.<sup>17</sup> この意味で、 $z$  をフェルミ液体の“オーダーパラメータ”と呼んでよい。

一方、後述する朝永・ラッティンジャー (TL) 液体の場合、グリーン関数の特異性は極 (pole) から分岐 (branch cut) に代わり [式 (32) 参照],  $z=0$  となって分布関数の跳びは消失し、スペクトル関数の形状は下図のようになる。

光電子分光はスペクトル関数  $A(\vec{k}, \epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G(\vec{k}, \epsilon)$  を直視するのでフェルミ液体挙動の検出に極めて有効である。しかし、入射光子エネルギーが  $\sim \text{eV}$  のオーダーである為に  $z$  が「ゼロ」の場合と「極めて小さいが有限」場合を判別することは事実上不可能である。TL 液体の直接検出がほとんど不可能な所以である。

<sup>17</sup>例えば、重い電子系  $\text{CeAl}_3$  では  $z \sim 10^{-3}$

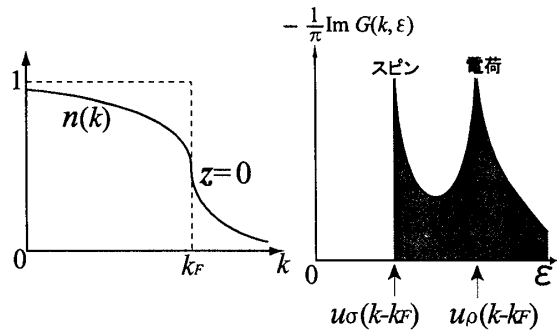


Figure 11: 朝永・ラッティンジャー (TL) 液体

さて、3次元の等方的フェルミ液体の場合、短距離斥力ならゼロ音波、長距離クーロンならプラズマ振動がコヒーレントなボゾンの励起 (集団励起) となって個別励起と結合する。しかし電子運動の幾何学的制限が緩いため、準粒子コヒーレンスを破壊するには至らない (集団励起の波が襲ってきても相空間に個別励起の逃げ道がたくさんある)。これに対して 2次元、1次元と次元が下がるにつれて集団励起と個別励起の結合が強くなって準粒子コヒーレンスが脅かされるようになる。高温超伝導の問題と関連してアンダーソンは、2次元では前方散乱の位相シフトが直交性カタストロフを引きこして  $z \rightarrow 0$  になるという見解を述べた [12]. 要は、1次元フェルミ点が集積したものが 2次元フェルミ面であると考えて特異性の起源を 1次元性に求めるのである [tomographic (断層的) Luttinger liquids]. これは誰も証明していないが、高温超伝導体常伝導相のフェルミ面にはヴァン・ホッフ特異性やフェルミ面から少し離れた処にあるフラットバンドなど広義の 1次元の特異性が潜んでいる場合が多い。これらの場合を繰り込み群によって解析する方向の研究は、ヨーロッパを中心に現在も活発に続いている [13]. 高次元ボゾン化 [14] のアイデアも類似の路線に沿ったものである。

High  $T_c$  に関してはさらに、始めから自己エネルギーを

$$\Sigma_R(\epsilon) = \lambda \left[ \epsilon \ln \frac{|\epsilon|}{E_0} - i \frac{\pi}{2} |\epsilon| \text{sign}(\epsilon) \right]$$

の形で与えているいろいろな物理量を計算すると実験と良く合う、という marginal Fermi liquid のヴァルマのアイデア ([10]7.2 節) もある。準粒子ウエイトは  $\epsilon \rightarrow 0$  で

$$z = [1 + \lambda \ln(E_0/|\epsilon|)]^{-1} \rightarrow 0$$



講義ノート

となって非フェルミ液体となる。この形の自己エネルギーは1次元電子系の2ループ自己エネルギーそのものである [28 ページの (42) 参照]。2次元で非フェルミ液体挙動を出そうとすれば、1次元的特異性に起源を求めるのはひとつの自然な発想であるといえる。しかし、1次元的特異性を潰さないように2次元方位角積分をすることが可能か否かは (取り入れるべき散乱チャンネルの問題も含めて)、現時点でも極めて非自明な問題である。

さて、若干横道にそれるが、非フェルミ液体挙動が現れる興味深い例が横波ゲージ場と結合した電子系である。この例は Holstein-Norton-Pincus によって見出され、固体物理の側から Reizer が、原子核の側から Polonyi と Baym らが再発見したという経緯を持つ [15]。自己エネルギーを計算すると

$$\Sigma_R(\varepsilon) = \begin{cases} c_1\varepsilon \ln|\varepsilon| + ic_2|\varepsilon|, & (d=3), \\ c_3|\varepsilon|^{2/3}\text{sign}(\varepsilon) + ic_4|\varepsilon|^{2/3}, & (d=2), \end{cases}$$

( $c_1, \dots, c_4$  は定数) なる特異性が出る [16]。この特異性は酸化物高温超伝導体のゲージ理論や量子ホール効果における複合フェルミオン ([18] 第5章) と深く関連している。

### 5 フェルミ面の不安定性

低温になると準粒子間の残留相互作用が効いてフェルミ面は崩壊し、残留相互作用のチャンネルによって超伝導、密度波といった巨視的量子状態に落ち込む。

#### 5.1 超伝導転移

既に見たように、粒子間に引力があれば粒子・粒子対形成に対してフェルミ面が不安定となり  $T_c^{\text{BCS}}$  で超伝導転移を起こす。さて、超伝導状態はクーパー対という2粒子対がマクロコヒーレンス獲得した状態であり、準粒子コヒーレンスが消失した状態である。超伝導状態を記述する有効理論がギンツブルク・ランダウ (GL) 理論である。相転移は不連続である為、高温側常伝導相の固定点理論であるフェルミ液体論から GL の有効作用を繰り込み操作によって連続的に得ることはできない。仕切りなおしが必要である。ランダウはフェルミ液体論の有効作用を書き下す10年前に超伝導状態の有効作用 (GL 汎関数)

$$S_{\text{GL}} = a\Psi\Psi^* + b(\Psi\Psi^*)^2 + c\Psi^* \left[ -\frac{1}{4m}(\vec{\nabla} - 2ie\vec{A})^2 \right] \Psi,$$

$a \propto \ln T/T_c$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\vec{A}$  は電磁場のベクトルポテンシャル, を書き下した。  $\Psi$  はオーダーパラメータ (ハバード・ストラトノビッチ場 [18, 19, 20]) である。分配関数の経路積分表示から出発し、クーパー対  $c_{\vec{k}\uparrow}c_{-\vec{k}\downarrow}$  を補助場と見て相互作用をガウシアン化し、個別励起過程を積分 (integrate out) すると Fig. 12 のようにして  $S_{\text{GL}}$  が得られる (詳細は [19])。  $a \propto \ln[T/T_c]$  は ppループから来る。この形は既に求めた  $\Delta(\omega = 0; T)$  に他ならない [式 (15) 直下の議論]。

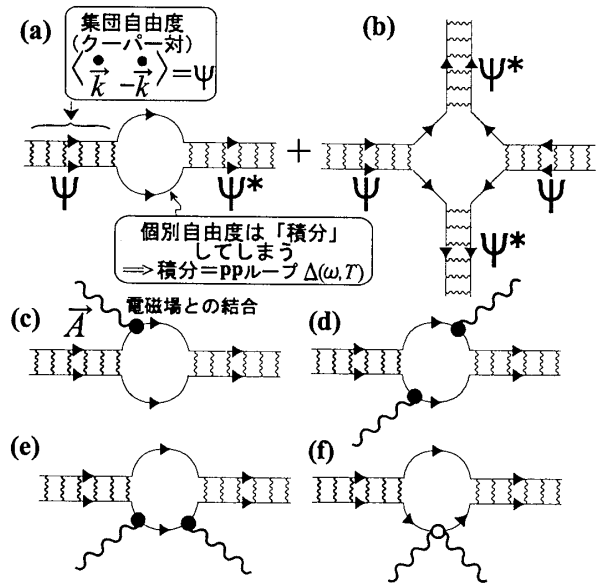


Figure 12: 超伝導状態の有効作用  $S_{\text{GL}}$  の導出。(a) が  $a\Psi\Psi^* - c\Psi^*\vec{\nabla}^2\Psi/4m$  を, (b) が  $b(\Psi\Psi^*)^2$  を, (c) が  $ice\Psi^*\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi/m$  を, (d)+(e)+(f) が  $ce^2\Psi^*\vec{A}^2\Psi/m$  を与え, これらを寄せ集めるとゲージ不変な有効作用  $S_{\text{GL}}$  の形にまとまる。電磁場との結合を表すパーテックスは, [15] で与えたものと同じ。

さて、オーダーパラメータは一般に複素数であり、転移温度以下で振幅と位相の自由度に分離する:

$$\Psi(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|e^{i\theta(\vec{r})}.$$

位相角  $\theta(\vec{r})$  がマクロなスケールに渡って  $\theta(\vec{r}) = \theta_0$  と凍結した [U(1) ゲージ対称性が自発的に破れた] 状態が超伝導状態である。  $\Psi(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|e^{i\theta_0}$  を  $S_{\text{GL}}$  に代入すると、超伝導状態ではフォトンが質量を獲得すること (アンダーソン・ヒッグス機構) がわかる。巨視的スケールで凝縮したクーパー対がヒッグス場となってフォトンが質量を獲得するのがマイスナー効果であり、超伝導の本質である。超伝導はフォトンに質量を与えるただひとつの方法である。

5.2 密度波転移

クーパー不安定性は粒子・粒子対形成に対するフェルミ面の不安定化であり, 超伝導転移を引き起こした. これに対し, 粒子・正孔対形成に対するフェルミ面の不安定性 (広くストーナー不安定性と呼ぶ) は密度波 (スピン密度波, 電荷密度波) 転移を引き起こす. 対応する粒子・正孔対の運動量移行が  $\vec{q} = 0$  なら一様な密度波 (例えば強磁性),  $\vec{q} \neq 0$  なら空間変調を伴う密度波となる. ストーナー不安定性が起こるには粒子・正孔対が大増殖する必要がある.

空間変調を伴う密度波を発生させる一般的な機構がフェルミ面のネスティングである. フェルミ面上の  $\vec{k}$  点に対し,

$$\text{ネスティング条件 } \xi_{\vec{k}} = -\xi_{\vec{k}+\vec{Q}} \text{ を満たす } \vec{Q} \text{ が存在}$$

する場合, そのフェルミ面はネストしているという. フェルミ面上の全  $\vec{k}$ -点に対してネスティング条件が成立している場合を完全ネスティングという. 限られた  $\vec{k}$ -点でのみネストしていれば部分ネスティングである (Fig. 13).

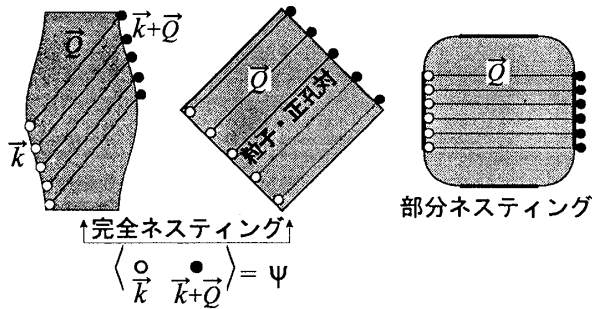


Figure 13: フェルミ面のネスティング

完全ネスティングの場合 (1次元の場合は常にそうである), (8) で  $i\omega_m \rightarrow \omega + i0^+$  と解析接続すると, phループの実部は

$$\begin{aligned} \text{Re} \Pi_{\vec{Q}}(\omega; T) &\equiv \text{Re} \tilde{\Pi}_{\vec{Q}}(\omega + i0^+; T) \\ &= +\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh \frac{\xi_{\vec{k}}}{2T} - \tanh \frac{\xi_{\vec{k}+\vec{Q}}}{2T}}{\omega - \xi_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}+\vec{Q}}} \\ &= + \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh \frac{\xi(\vec{k})}{2T}}{\omega - 2\xi(\vec{k})} \end{aligned}$$

となり, 3.2.2 節で議論した ppループの符号が逆転したものが得られる.

(11) より

$$\text{Re} \Pi_{\vec{Q}}(\omega; T) = -\Delta(\omega; T)$$

$$= -N_F \left[ \ln \frac{2e^\gamma E_0}{\pi T} + \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} + i \frac{\omega}{4\pi T} \right) \right] \quad (20)$$

3.2.2 節での超伝導転移と平行な議論ができ, ネスティングベクトル  $\vec{Q}$  をやりとりする粒子・正孔散乱が relevant となって密度波転移 (粒子・正孔対凝縮) が起こり得ることがわかる. phループの対数特異性はネスティングの度合いに非常に敏感であり, ネスティングが不完全になると潰れてしまう. Fig. 14 にいろいろなフェルミ面に対する ppループと phループの  $\omega$  依存性を比較する [4].

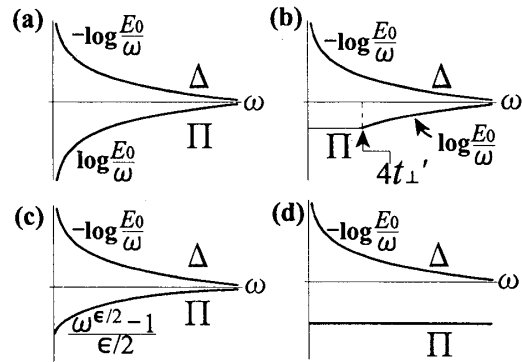


Figure 14: ppループ  $\Delta(\omega, T = 0)$  と phループ  $\Pi_{\vec{Q}}(\omega, T = 0)$  の  $\omega$  依存. (a) 1次元 [ $Q = 2k_F$ ], (b)  $\xi(\vec{k}) = v_F(|k| - k_F) - 2t_\perp \cos k_\perp + 2t'_\perp \cos 2k_\perp$ , の形の擬1次元的フェルミ面 [ $\vec{Q} = (\pi, \pi)$ ], (c)  $d = 1 + \epsilon$  次元の等方的フェルミ面 [ $|\vec{Q}| = 2k_F$ ], (d) 2次元等方的フェルミ面 [ $|\vec{Q}| = 2k_F$ ].

フェルミ面がネストしているとしても, どのようなチャンネルの密度波 (スピン密度波, 反強磁性, 螺旋磁性, 電荷密度波, ...) が誘起されるかは相互作用の中身 (ハバード斥力  $U$ , 次隣接サイト間斥力  $V$  その他の大小関係など) に敏感なので case by case の考察が必要となる.

6 結合定数の relevance: 相転移とクロスオーバー

結合定数  $g$  が relevant である場合, 特に1ループレベルの解析では, あるエネルギースケール  $T_0$  で  $g$  が発散することがしばしばある. この場合,  $T_0$  で (不連続) 相転移が起こると即断するのは重大な誤りである. 次の二つの可能性がある:

- (1)  $T_0$  で不連続変化 (相転移) が起きる.
- (2)  $T_0$  近傍で連続変化 (クロスオーバー) が起きる.

どちらが起こるか知るには marginal/relevant cou-

## 講義ノート

pling の入ったモデルをきちんと調べるしかない。(1) の例が先に見た超伝導転移, 密度波転移である。

(2) の例として, 物性物理において最もよく理解の進んだ(かつ重要な)クロスオーバー現象が近藤効果である。1963年近藤は, 非磁性金属中伝導電子と磁性不純物局在スピンの間の反強磁性交換相互作用  $J$  が, 温度低下とともに対数的に増大する電気抵抗をもたらすことを摂動計算によって見出した [6]。この「対数的」増大という数学の背後にスケール不変性を見て取り, 近藤問題に繰り込み群の視点を持ち込んだのはアブリコゾフ [21] であった。

近藤問題のスケール理論として最も簡単な例題はアンダーソンによる Poorman's scaling である。これは交換相互作用  $J_z, J_{\perp}$  に関する 2 次 (1 ループレベル) の解析であって, 繰り込み群方程式は

$$dJ_{z,\ell}/d\ell = N_F J_{\perp,\ell}^2, \quad dJ_{\perp,\ell}/d\ell = N_F J_{z,\ell} J_{\perp,\ell}$$

となり [6],  $J_z^2 - J_{\perp}^2 = \text{const.}$  に沿った繰り込みフローが得られる。相互作用がスピン空間で等方的な (現実的な) 場合 ( $J = J_z = J_{\perp}$ ), 近藤温度

$$T_K = E_0 e^{-1/J_0 N_F}, \quad (21)$$

と呼ばれるエネルギースケールで  $J_{\ell}$  が発散することが見て取れる [(15),(21),(29) が同型であることと背後の物理の相違 (転移とクロスオーバー) に注意]。近藤問題は自由電子系に 1 自由度の不純物が付加されただけの “0 次元” 問題なので不連続転移が起こらないことは自明である (Basic Notions [5] p. 191, 下から 21 行目)。しかし,  $T_K$  という温度の「上」と「下」をどう繋ぐか? という一点が, 65 年から 75 年に至る 10 年の歳月を強いた近藤問題の本質である。 $T_K$  はクロスオーバー温度スケールであって不連続転移 (不安定性) がどこにも無いこと, 基底状態で伝導電子のスピン分極と局在スピンのシングレットを組んで局在スピンの消失すること, を知るにはより精緻な議論 (詳細は [6]) が要求された。低温側から眺めると, 絶対零度では局在スピンは存在しないが, 温度が上昇すると局所的にスピンの揺らぎが発生する。Poorman's scaling による  $J$  の成長は, この揺らぎが高温 ( $T \gg T_K$ ) 側から  $T_K$  付近へ向けて成長する様子を見ているのである。

近藤効果の他のクロスオーバー現象としては, 以下に詳述する擬 1 次元電子系の次元クロスオーバー, 乱れた金属における高温金属相から低温絶縁体 (アンダーソン絶縁体) 相へのクロスオーバー, 整合フィリングの擬 1 次元有機導体 TMTTF 系に見られる高温金属相から低温絶縁体 (モット絶縁体) 相へのクロスオー

バーなどが挙げられる。これらはいずれも繰り込み群による解析の格好のターゲットとなる。<sup>18</sup>

## 7 量子的無秩序

1966 年, マーミンとワグナー [22] は「1 次元, 2 次元の短 (有限) 距離相互作用を持つハイゼンベルク模型に有限温度の長距離秩序は存在しない。1 次元では絶対零度でも然り」という定理を示した。この定理はハイゼンベルク模型に限ったものではなく, 連続対称性 [スピン空間での回転対称性, 並進対称性, 連続的ゲージ対称性など] を持つ系で成立する極めて一般的な (generic な) 性質であることがワグナー [22] によって示され, 「マーミン・ワグナーの定理」として広く知られている。「1, 2 次元では, 連続対称性の破れに伴うギャップ励起 (南部・ゴールドストーンモード) が長距離秩序を破壊する」と言い換えても良い。“ワインボトル” の底を巡る位相の揺らぎが秩序を破壊するのである (量子的無秩序)。

モデルハミルトニアンを設定し, 揺らぎの効果を無視して自由エネルギーを極小化する状態 (平均場基底状態) が得られても, 1 次元系では量子揺らぎ (有限温度では熱揺らぎ) がこれを破壊することになる。一般には, 相関関数が距離のべきで減衰する複数のチャンネルで特徴付けられる平均場状態が競合する。揺らぎを介したツバ迫り合いの結果, このうちいずれかが優勢な相関 (もっとも緩やかなべき減衰を示す相関) の地位を獲得する。系が純粋な 1 次元系であれば長距離秩序は望めないが, 揺らぎを押さえる要因 (3 次元性) があれば優勢な相関が真の長距離相関として浮き出し, 平均場基底状態が真の長距離秩序状態となる。<sup>19</sup>

## 8 朝永・ラッティンジャー (TL) 液体

1 次元電子系に戻ろう。1 次元ではフェルミ面は点であり, 電子の kinematics は著しく制限され, 考慮すべき散乱チャンネルも有限個しかない。1 次元電子系の散乱強度を Fig. 15 に示すようなチャンネルに分別する流儀を  $g$ -ology [7] と呼ぶ。2 次元の前方, 交換, クーパー散乱との対応をつけると,  $g_1 = g_E(\pi) = g_C(\pi)$ ,  $g_2 = g_F(\pi) = g_C(0)$ ,  $g_4 = g_F(0) = g_E(0)$ , となる。ウ

<sup>18</sup> 繰り込み群はもともと連続変化を追跡する処方であるからクロスオーバー挙動の解明に最適なのである。

<sup>19</sup> この表現で伝わるとは思うが, 1 次元系の平均場解析が断じて無意味でないことを強調しておく。平均場解析なくして多様なハミルトニアンに潜む多彩な基底状態を見抜くことは不可能である。一方, 揺らぎによる他の平均場状態との競合や破綻の危機が控えている。この意味で, 低次元強相関系の平均場解析は極端なプラスとマイナスの面を併せ持っているといえる。

ムラップ散乱  $g_3$  は電子のフィリングが整合である場合に現れるが、これについては後述する。

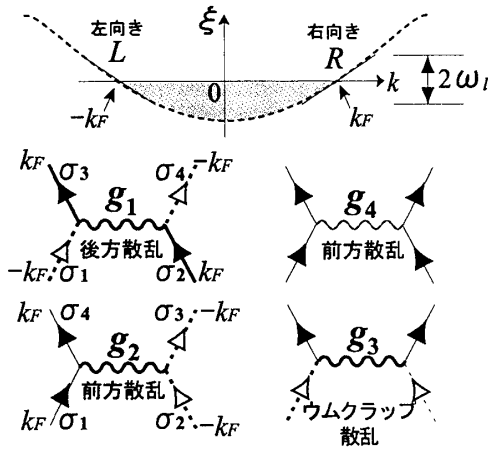


Figure 15: 散乱チャンネルの分類 ( $g$ -ology). 実線は右向き電子の伝播, 破線は左向き電子の伝播を表す。

### 8.1 繰り込み群解析

1次元格子系をホップする電子系に対し、まず、連続極限をとる。次に低エネルギーの物理に限ればフェルミ点近傍の励起のみが寄与すると考え、バンド分散をフェルミ点近傍で線形化する (Fig. 15)。この操作 (連続極限+分散の線形化) を経ないと、系のスケール不変性が破れて繰り込み群が well-defined でなくなる。

さて、 $g_1$  と  $g_2$  のみ取り入れた  $g$ -ology 模型 ( $g_1$ - $g_2$  模型) を使って TL 液体を議論しよう。ウィルソン流の摂動的繰り込み群を定式化するに当たって、分配関数の経路積分表示 [23]

$$Z(\beta) = \int_{c(\beta)=-c(0)} Dc^* Dc e^{S(c^*, c)}$$

から出発する。  $c, c^*$  は時間空間スピンドラベルされたグラスマン数を表しており、  $Dc^* Dc$  は積分測度、指数の肩に乗っているのは作用

$$S(c^*, c) = - \int_0^\beta d\vec{x} d\tau c^*(\vec{x}, \tau) \frac{\partial c(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} - \int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(\tau), \quad (22)$$

である。フェルミオンの反周期的境界条件に注意してグラスマン数をフーリエ分解すると

$$c(\vec{x}, \tau) = \beta^{-1/2} \sum_{\vec{k}, \epsilon_n} e^{-i\epsilon_n \tau + i\vec{k} \cdot \vec{x}} c(\vec{k}, \epsilon_n),$$

となつてフェルミオンの松原振動数  $\epsilon_n = (2n+1)\pi/\beta$  が現れる。

さて、フェルミ点周りで線形化されたバンド分散を

$$\begin{aligned} \xi_R(k) &= v_F(+k - k_F) \quad (k > 0), \\ \xi_L(k) &= v_F(-k - k_F) \quad (k < 0), \end{aligned}$$

とし ( $v_F$  は相互作用の無い場合のフェルミ速度)、カットオフ (2) を導入し、  $k$ -点を集合  $C_\ell^< = \{k \mid -\omega_\ell \leq \xi_\nu(k) \leq \omega_\ell\}$  に限定する (Fig. 15)。系を眺めるエネルギースケールを  $\omega_\ell$  とするわけである。作用の形自体が  $\ell$  に依存するので  $\ell$  依存性を顕わに書いて  $g_1$ - $g_2$  模型の作用をまとめると  $S_\ell = S_{0,\ell} + S_{\text{int},\ell}$ ,

$$S_{0,\ell} = \sum_{k \in C_\ell^<} [G_R^{-1} R^* R + G_L^{-1} L^* L], \quad (23)$$

$$S_{\text{int},\ell} = -\pi v_F T \sum_{\{k_i\} \in C_\ell^<} g_\ell^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} R_4^* L_3^* L_2 R_1, \quad (24)$$

となる。  $R$  と  $L$  はそれぞれ右向き、左向きブランチ上のフェルミオンに対応するグラスマン数であり、  $R_1$  は  $R_{\sigma_1}(K_1)$  [ $K_1 = (k_1, \epsilon_1)$ ] を略記したものである。相互作用項で、エネルギー-運動量は保存している ( $K_1 + K_2 = K_3 + K_4$ )。エネルギーとスピンについての和の表記は省いた。また、結合定数を無次元化するため  $\pi v_F$  をくくりだした。<sup>20</sup> 作用の定義から、運動エネルギー項に温度グリーン関数

$$G_\nu(k, i\epsilon) = \frac{1}{i\epsilon - \xi_\nu(k)}, \quad (\nu = R, L)$$

が現れることが自然に理解できよう。相互作用定数は、

$$g_\ell^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} = \delta_{\sigma_1 \sigma_4} \delta_{\sigma_2 \sigma_3} g_{2,\ell} - \delta_{\sigma_1 \sigma_3} \delta_{\sigma_2 \sigma_4} g_{1,\ell},$$

と分離して書くことができる (Fig. 15 でスピンのインデックスに注意)。

さて、繰り込み群の処方を実行してみよう。

#### STEP I. 粗視化

高エネルギー側から漸化的に繰り込みを実行する為に、  $C_\ell^<$  を  $C_\ell^< = C_{\ell+de}^< \oplus dC_\ell^>$  と分割する。ここで、

$$\begin{aligned} \text{低波数領域} : C_{\ell+de}^< &\equiv \{k \mid |\xi_\nu(k)| \leq \omega_{\ell+de}\}, \\ \text{高波数領域} : dC_\ell^> &\equiv \{k \mid \omega_{\ell+de} \leq |\xi_\nu(k)| \leq \omega_\ell\}. \end{aligned}$$

これに応じてグラスマン数は低波数領域の波数のみを含む成分 ( $<$ ) と高波数領域の波数のみを含む成分 ( $>$ ) に分かれ、  $L \rightarrow L_< + L_>$ ,  $R \rightarrow R_< + R_>$  と書ける。作用も  $S_\ell = S_0^< + S_{\text{int}}^< + S_0^> + S_{\text{int}}^>$  となる。ここで、1粒子過程 (運動エネルギー項) は  $R^* R \rightarrow (R_>^* + R_<^*)(R_> + R_<)$   $\rightarrow R_>^* R_> + R_<^* R_<$  というふうにならざるを得ない。

<sup>20</sup>  $2\pi v_F$  でくくりだしている文献が多いが。

講義ノート

成分に完全に分離できる ( $R^*_<R_>$  というような項は運動量を保存しないので消える). 一方, 相互作用は  $R^*L^*LR \rightarrow (R^*_>+R^*_<)(L^*_>+L^*_<)(L_>+L_<)(R_>+R_<)$  となり, エネルギー運動量を保存する項を拾い上げても 4 つの  $R^*, L^*, L, R$  のうち  $>$  に属するものがゼロ, 1, 2, 3, 4 個の場合がある. ゼロの場合の項が  $S_{\text{int}}^<$  であり, 残りの場合がすべて  $S_{\text{int}}^>$  に入る.

さて, 高波数領域に属する自由度の積分 (粗視化 = coarse graining) を摂動的に行うのが摂動的繰り込み群の処方である.  $>$  のついた場を積分 (integrate out) してしまうと, 形式的に (積分測度省略),

$$\begin{aligned} Z &= \int C_{\ell}^< e^{S_0^<+S_{\text{int}}^<+S_0^>+S_{\text{int}}^>} \\ &= \int C_{\ell+d\ell}^< e^{S_0^<+S_{\text{int}}^<} \left[ \int dC_{\ell}^> e^{S_0^>+S_{\text{int}}^>} \right] \\ &= \int C_{\ell+d\ell}^< e^{S_0^<+S_{\text{int}}^<} \left[ \int dC_{\ell}^> e^{S_0^>} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} [S_{\text{int}}^>]^p \right] \\ &= \int C_{\ell+d\ell}^< \exp \left[ S_0^< + S_{\text{int}}^< + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \langle\langle [S_{\text{int}}^>]^p \rangle\rangle_c \right]. \end{aligned}$$

ここで,  $\langle\langle (\dots) \rangle\rangle = Z_>^{-1} \int dC_{\ell}^> e^{S_0^>} (\dots)$ ,

$Z_> = \int dC_{\ell}^> e^{S_0^>}$ , であり,  $\langle\langle (\dots) \rangle\rangle_c$  は連結 (connected) ダイアグラムだけを拾うことを意味する. 結果, 粗視化された作用が

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0^< + \tilde{S}_{\text{int}}^< &\equiv S_0^< + S_{\text{int}}^< + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \langle\langle [S_{\text{int}}^>]^p \rangle\rangle_c, \\ \tilde{S}_0^< &= \sum_{k \in C_{\ell+d\ell}^<} (1 + \theta_{\ell} d\ell) \left[ G_R^{-1} R^*_< R_< + G_L^{-1} L^*_< L_< \right], \\ \tilde{S}_{\text{int}}^< &= -\pi v_F T \sum_{\{k_i\} \in C_{\ell+d\ell}^<} (g_{\ell} + w_{\ell} d\ell) R^*_< L^*_< L_< R_<. \end{aligned}$$

と得られる. ここで  $g_{\ell}$ ,  $w_{\ell}$  はそれぞれ  $g_{\ell}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}$ ,  $w_{\ell}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}$  と書くべきところを略記した. 各項のうち,  $\theta_{\ell}$  は自己エネルギー過程から,  $w_{\ell}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}$  はバーテックス補正から来る.

さて, 粗視化された作用の運動エネルギー項  $\tilde{S}_0^<$  を眺めると, 準粒子ウエイト  $z_{\ell}$  に対する繰り込み群方程式

$$z_{\ell+d\ell}^{-1} = (1 + \theta_{\ell} d\ell) z_{\ell}^{-1} \implies \frac{d \ln z_{\ell}}{d\ell} = -\theta_{\ell}, \quad (25)$$

が得られる.  $\theta_{\ell} > 0$  なら  $z_{\ell}$  はゼロに繰り込まれ, 系は非フェルミ液体相に繰り込まれる. ここで, 有限の

$\theta_{\ell}$  を与える (赤外対数発散を示す) 最低次の自己エネルギー過程は Fig. 16 に示す 2 ループ (相互作用の 2 次摂動) レベルであることを強調しておく (計算手順を [24] にまとめた).

準粒子ウエイトの繰り込みフローを議論するには最低でも 2 ループレベルでの解析が必要. 1 ループ解析で非フェルミ液体性は云々できない

ということである. この場合, 摂動を自己無撞着に実行するにはウォード・高橋恒等式に注意して, バーテックス補正を 3 次まで取り込む必要がある.

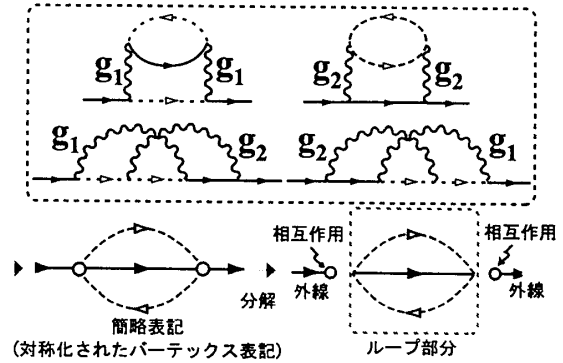


Figure 16: 赤外対数発散する自己エネルギー

STEP II. スケール変換と波動関数の繰り込み

粗視化の都度カットオフを回復し, 作用の運動エネルギー項をスケール不変にしておく必要がある.<sup>21</sup>  $\tilde{S}_0^<$  の中身が

$$\sum_{\varepsilon} \int_{-\omega_{\ell}+d\ell/v_F}^{\omega_{\ell}+d\ell/v_F} \frac{dk}{2\pi} (1 + \theta_{\ell} d\ell) [i\varepsilon - v_F k] R^*_< R_<$$

であることに注意すると [ $K \equiv (k, i\varepsilon)$  として],

$$\begin{cases} \bar{K} = e^{d\ell} K = (1 + d\ell) K, \\ \bar{R}_<(\bar{K}) = \left(1 + \frac{\theta_{\ell}-3}{2} d\ell\right) R_<(K), \end{cases}$$

なるスケール変換を施せばよいことが判る.

STEP III. 相互作用定数  $g_{\ell}$  の繰り込み

スケール変換の結果, 相互作用項  $\tilde{S}_{\text{int}}^<$  には因子  $(1 - d\ell)^6 [1 - (\theta_{\ell} - 3)d\ell/2]^4$  が掛かり, バーテックス補正からの繰り込み因子と掛け合わせると

$$\begin{aligned} &(1 - d\ell)^6 [1 - (\theta_{\ell} - 3)d\ell/2]^4 \times (g_{\ell} + w_{\ell} d\ell) \\ &= g_{\ell} + (w_{\ell} - 2\theta_{\ell} g_{\ell}) d\ell + \mathcal{O}(d\ell^2) \end{aligned}$$

<sup>21</sup> 例えば  $S_0^< + S_{\text{int}}^<$  は  $2S_0^< + 2S_{\text{int}}^<$  と等価であるが  $S_0^< + 2S_{\text{int}}^<$  とは等価でない. 知りたいのは運動エネルギー項と相互作用項の関係であるから, 運動エネルギー項を揃えておく必要がある.

が得られる。この結果、粗視化+スケール変換を受けた相互作用項は

$$\bar{S}_{\text{int}}^< = -\pi v_F T \sum_{\{k_i\} \in C_\ell^<} [g_\ell + (w_\ell - 2\theta_\ell g_\ell) d\ell] \bar{R}_<^* \bar{L}_<^* \bar{L}_< \bar{R}_<$$

となる。{k<sub>i</sub>}の範囲が C<sub>ℓ+dℓ</sub><sup><</sup> から C<sub>ℓ</sub><sup><</sup> に戻っていることに注意しよう。これより相互作用定数の繰り込み群方程式 (3) が

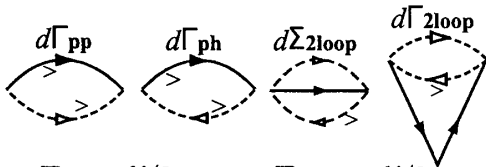
$$g_{\ell+d\ell}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} = g_\ell^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} + (w_\ell^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} - 2\theta_\ell g_\ell^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}) d\ell \\ \Rightarrow \frac{d}{d\ell} g_\ell^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} = w_\ell^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} - 2\theta_\ell g_\ell^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}, \quad (26)$$

の形で得られる (2ループレベルで θ ≠ 0 の場合、波動関数の繰り込みに由来する右辺第 2 項 -2θ<sub>ℓ</sub>g<sub>ℓ</sub> を忘れると決定的なミスになる)。g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub> に対する繰り込み群方程式は

$$dg_1/d\ell = w_1 - 2\theta g_1, \quad dg_2/d\ell = w_2 - 2\theta g_2,$$

となるが、g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub> に対する w<sub>1</sub>, w<sub>2</sub> を 2ループレベルで求めるには、Fig. 17 のすべてのダイアグラムを捨てる必要がある。ループの中に pp と書いたのが pp ループ、ph は ph ループ、残りが 2ループダイアグラムである。対数発散するダイアグラムは他にもたくさんあるがキャンセルされて Fig. 17 のダイアグラムだけが残る。

内線波数を高波数領域 dC<sub>ℓ</sub><sup>></sup> に割り当ててループ部分だけを評価すると、



$$d\Gamma_{\text{pp}} = d\ell/2\pi v_F, \quad d\Gamma_{\text{ph}} = -d\ell/2\pi v_F,$$

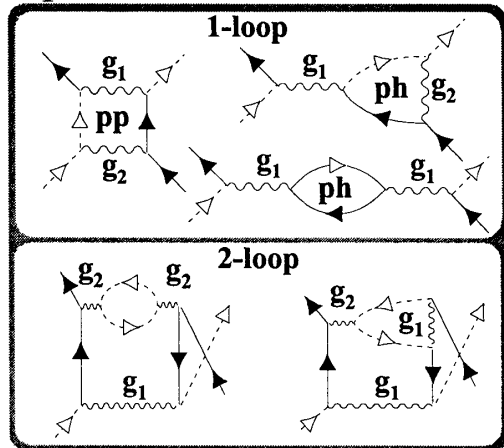
$$d\Sigma_{2\text{loop}}(k, i\varepsilon) = -G_R^{-1}(k, i\varepsilon) d\ell/8\pi^2 v_F^2, \quad (27)$$

$$d\Gamma_{2\text{loop}} = v_F^{-1} \partial[d\Sigma(k, i\varepsilon)]/\partial k = d\ell/8\pi^2 v_F^2,$$

となる (2ループの評価は [24] を見よ)。ここで自然に現れたウオード・高橋 (WT) 恒等式 dΓ<sub>2loop</sub> = v<sub>F</sub><sup>-1</sup>∂[dΣ(k, iε)]/∂k は摂動の各ステップで自己エネルギー補正とバーテックス補正をコンシステントに取り入れなくてはならないことを保証するものである。WT 恒等式を図解すると、Fig. 18 のように自己エネルギーダイアグラムを加工して対応するバーテックス補正の 2ループダイアグラムを切り出す操作となる。これを心得ておくとダイアグラムの拾い落としが防げる。

さて、符号勘定、スピン、等価なダイアグラムの数に注意して寄与を拾い集めると、

### w<sub>1</sub>に寄与するダイアグラム



### w<sub>2</sub>に寄与するダイアグラム

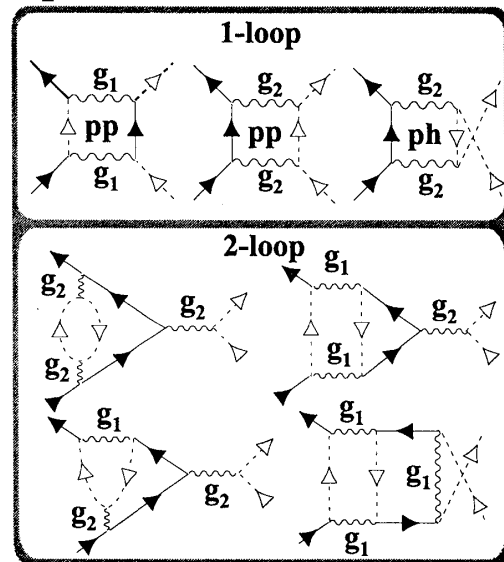


Figure 17: 2ループレベルでのすべてのダイアグラム

$$w_1 = \underbrace{-g_1 g_2}_{\text{pp ループ}} + \underbrace{(g_1 g_2 - g_1^2)}_{\text{ph ループ}} + \underbrace{+g_1 g_2^2/2 - g_1^2 g_2/2}_{\text{2ループバーテックス補正}}, \\ w_2 = \underbrace{-(g_1^2 + g_2^2)/2}_{\text{pp ループ}} + \underbrace{+g_2^2/2}_{\text{ph ループ}} + \underbrace{+g_2^3/2 + g_1^2 g_2/2 - g_1 g_2^2/2 - g_1^3/4}_{\text{2ループバーテックス補正}}, \\ \theta = (g_1^2 + g_2^2 - g_1 g_2)/4 \leftarrow \text{自己エネルギー}.$$

講義ノート

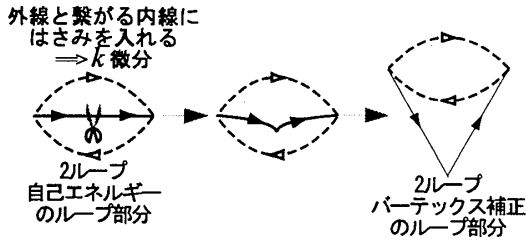


Figure 18: WT 恒等式を表すダイアグラムの加工

これより、繰り込み群方程式

$$\left. \begin{aligned} dg_1/dl &= \underbrace{-g_1g_2}_{\text{pp ループ}} + \underbrace{(g_1g_2 - g_1^2)}_{\text{ph ループ}} - \underbrace{g_1^3/2}_{\text{2ループ}}, \\ dg_2/dl &= \underbrace{-(g_1^2 + g_2^2)/2}_{\text{pp ループ}} + \underbrace{+g_2^2/2}_{\text{ph ループ}} - \underbrace{g_1^3/4}_{\text{2ループ}}, \end{aligned} \right\} (28)$$

が得られる。粒子・粒子 (pp) の1ループからの寄与、粒子・正孔 (ph) の1ループからの寄与、2ループからの寄与を分けて示した。ここで、 $G = g_1 - 2g_2$  がスケール不変にとどまることに注意しよう。Gは系の圧縮率に入ってくる量であり、Gが不変であるということは圧縮率が弱結合領域から変化せず、系が圧縮性の金属状態を維持することを示唆する。

ハバード模型から出発して繰り込みを行う場合、繰り込みの初期値は、ハバード斥力  $U$  によって  $g_{1;0} = g_{2;0} = U/\pi v_F$ 、と与えられる [7]。摂動的繰り込み群をやっているので、 $U/\pi v_F$  は1より小さく(弱結合で)なくてはならない。連立1次微分方程式 (28) を解けば Fig. 19 のような繰り込みフローが得られる。

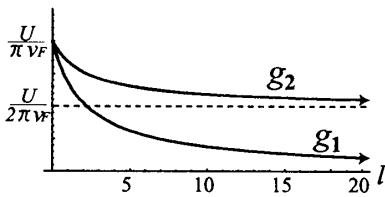


Figure 19:  $g_1$ - $g_2$  模型の繰り込みフロー。

繰り込みの固定点は

$$g_1^* = 0, \quad g_2^* = U/2\pi v_F$$

であり、 $g_1$  は irrelevant,  $g_2$  は marginal な結合であることがわかる。relevant な結合が無い為、この固定点は弱結合固定点である。かくして、固定点の有効ハミルトニアンには  $g_2$  のみを残せばよい。尚、ここで考慮しなかった前方散乱  $g_4$  も marginal (こちらは2ループ

レベルではまったく流れない。つまりベータ関数がゼロ) である。ハバード相互作用から派生する  $g$ -ology 結合定数のうち、 $g_2$  と  $g_4$  を取り入れた模型を朝永・ラッティンジャー (TL) 模型と呼ぶ。

ところで、1次元では pp ループと ph ループは異符号で同じ大きさの対数発散を示す (perfect cancellation)。3次元性が入ると両者のバランスが崩れる。エメリーは、1ループ繰り込み群方程式で pp ループと ph ループのアンバランスを手で入れ [(28) で pp ループと2ループの寄与を落とす]、高エネルギー側の1次元領域から低エネルギー側の RPA 領域へのクロスオーバーを論じた [25]。これは次元クロスオーバーの現象論である。ph ループのみが赤外対数発散すると仮定すれば、斥力ハバード模型の場合  $g_2$  が relevant な結合になる。

1ループレベルで繰り込みフローをみると、5.1 節で見たのと同様に、 $g_2$  は RPA ダイアグラム (Fig. 17 で、 $w_2$  に寄与する ph ダイアグラムを骨格とした梯子型求和<sup>22)</sup>

$$\text{Diagram} = \frac{g_2}{1 + g_2}$$

が発散する温度  $T_N^{\text{RPA}}$  で無限大に繰り込まれる。この温度でスピン密度波転移が起きる。(20) より ph ループが  $\Pi_{2k_F}(\omega = 0; T) = -\ln[2e^\gamma E_0/\pi T]$  となることに注意すれば

$$T_N^{\text{RPA}} = 1.13 E_0 e^{-1/g_2}, \quad (29)$$

が得られる (1次元では  $N_F = 1/2\pi v_F$  であることに注意)。5.1 節の議論と照らし合わせながら、pp ループと ph ループの対数特異性のバランスとアンバランス、超伝導と密度波、結合定数の relevance、1ループ繰り込みフローの発散と平均場的相転移の関係といった諸点を確認するとよい。

### 8.2 固定点の物理：ボゾン化

繰り込み群解析によって準粒子ウエイトがゼロとなって非フェルミ液体相が実現していることは判っているが、基底状態と素励起がどのようなものであるかは判らない。これを明らかにするには、TL 模型をボゾン化で扱う必要がある。ボゾン化を経て始めて、素励起が

<sup>22</sup>エメリー [25] は、文字通り pp の1ループを「手で」落とす。そのココロは、1) 擬1次元で斥力、フェルミ面は perfect nesting の場合を考え、2) 「斥力なら pp チャンネルは irrelevant」であることを踏まえ、ph の1ループのみを残せば擬1次元のスピン密度波転移が議論できるだろうということである。

コヒーレントなボゾンの集団励起 (朝永ボゾン) で尽くされ、個別励起のコヒーレンスが完全破壊される様子が明らかになる。自由粒子のフェルミ点は相互作用によってズレ、ボゾンの自由度 (位相) に吸収される。

この状況を発見法的に論じたのが朝永であり、ソルユムのレビュー [7] で詳述されている。一方、ハルデン [26] は有限サイズ格子系に戻って構成的論理構築を展開しボゾン化の基礎付けを行った [28]。ここでは前者に従って実用的な要点をまとめる。右向き、左向きフェルミオンの演算子を

$$\left. \begin{aligned} R_\alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp[+ik_F x - 2i\Phi_{R,\alpha}(x)] \\ L_\alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp[-ik_F x - 2i\Phi_{L,\alpha}(x)] \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

と書く。\$a\$ は短距離カットオフ、\$\alpha = \uparrow / \downarrow\$ はスピン。位相 \$\Phi\_{R/L,\alpha}(x)\$ は、ボゾン自由度 \$\phi\_\alpha(x)\$、と共役 (ジョセフソン) 自由度 \$\theta\_\alpha(x) = \pi \int^x \Pi\_\alpha(y) dy\$ を使って

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{R,\alpha}(x) &= [\phi_\alpha(x) - \theta_\alpha(x)]/2, \\ \Phi_{L,\alpha}(x) &= [\phi_\alpha(x) + \theta_\alpha(x)]/2, \end{aligned} \right.$$

と書け、これらはさらに電荷 \$\rho\$ とスピン \$\sigma\$ のチャンネルに組み分けられる:

$$\begin{aligned} \phi_{\rho/\sigma} &= [\phi_\uparrow \pm \phi_\downarrow]/\sqrt{2}, \quad \theta_{\rho/\sigma} = [\theta_\uparrow \pm \theta_\downarrow]/\sqrt{2}, \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \Phi_{R,\nu}(x) &= [\phi_\nu(x) - \theta_\nu(x)]/2, \\ \Phi_{L,\nu}(x) &= [\phi_\nu(x) + \theta_\nu(x)]/2, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

(\$\nu = \rho, \sigma\$). チャンネルの組換えの際、共役関係

$$[\phi_\mu(x), \Pi_\nu(y)] = i\delta_{\mu\nu}\delta(x-y),$$

(\$\mu, \nu = \rho, \sigma\$) のチェックには注意を払う (特に多バンド等でチャンネルが多い場合は要注意)。組換えのせいで混乱するが、例えば

$$R_\uparrow(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{ik_F x} \prod_{\nu=\rho,\sigma} e^{-i\sqrt{2}\Phi_{R,\nu}(x)}, \quad (31)$$

となる (master formula を使ってグリーン関数を計算するとき使う)。

TL 模型は位相ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_{TL}^* &= \sum_{\nu=\rho,\sigma} \frac{u_\nu}{2} \int dx \left[ \frac{1}{\pi K_\nu} (\partial_x \phi_\nu(x))^2 + \pi K_\nu \Pi_\nu(x)^2 \right] \\ &= \sum_{\nu=\rho,\sigma} \frac{u_\nu}{2\pi} \int dx \left[ \frac{1}{K_\nu} (\partial_x \phi_\nu(x))^2 + K_\nu (\partial_x \theta_\nu(x))^2 \right], \end{aligned}$$

の形に書き換えられる。つまりスピン励起 (スピノン) と電荷励起 (ホロン) は独立な (\$c=1\$) ガウシアン理論で記述され (スピン電荷分離)、ともにギャップレス励

起であることが判る。ホロンとスピノンの速さはそれぞれ \$u\_\rho = v\_F \sqrt{(1+g\_4^\*)^2 - g\_2^{\*2}}\$, \$u\_\sigma = v\_F(1-g\_4^\*)\$, つまり、\$u\_\sigma \neq u\_\rho\$ であり、相互作用効果によってスピノンとホロンの速度にズレが生じる。電荷とスピンの剛性度 (stiffness) は

$$K_\rho = \sqrt{(1+g_4^* - g_2^*)/(1+g_4^* + g_2^*)}, \quad K_\sigma = 1,$$

と与えられる。\$K\_\sigma = 1\$ は、「スピン励起に関しては相互作用効果無し」ということを意味している。

ボゾン化された演算子を使うと遅延グリーン関数が計算でき、

$$\begin{aligned} G_{R\uparrow}(x,t) &= -i\Theta(t) \langle \{ R_\uparrow(x,t), R_\uparrow^\dagger(0,0) \} \rangle \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{(x-u_\rho t)(x-u_\sigma t)}} \left[ \frac{a^2}{(a+iu_\rho t)^2 + x^2} \right]^{\gamma/2} \end{aligned} \quad (32)$$

が得られる (\$a\$ は短距離カットオフ) [導出は [27]]. 1 粒子分布関数は

$$n(k) \sim \frac{1}{2} - \text{const.} \text{sgn}(k - k_F) |k - k_F|^\gamma.$$

となる。これらを Fig. 11 にまとめてある。

ここに、anomalous exponent と呼ばれる重要な指数

$$\gamma = (K_\rho + 1/K_\rho - 2)/4$$

が現れた (相互作用がなければ \$\gamma=0\$). \$g\_4^\*\$ を無視してこれを \$g\_2^\*\$ について展開すれば \$\gamma = (g\_2^\*)^2/4 + \mathcal{O}[(g\_2^\*)^3]\$ となる。一方、摂動的繰り込み群で 2 ループの自己エネルギー補正から出て来る \$\theta\$ の固定点での値は \$\theta^\* = \lim\_{\ell \rightarrow \infty} \theta\_\ell = (g\_2^\*)^2/4\$ である。相互作用が小さい限り \$\gamma\$ と \$\theta^\*\$ が等価であることが判る。低温の応答関数は [29]

$$\begin{aligned} \text{CDW} &\sim T^{K_\rho-1} |\ln T|^{-3/2} \\ \xleftrightarrow{\text{双対}} \text{SS} &\sim T^{1/K_\rho-1} |\ln T|^{-3/2} \\ \text{SDW} &\sim T^{K_\rho-1} |\ln T|^{1/2} \\ \xleftrightarrow{\text{双対}} \text{TS} &\sim T^{1/K_\rho-1} |\ln T|^{1/2}, \end{aligned}$$

となる (CDW=\$2k\_F\$ 電荷密度波, SDW=\$2k\_F\$ スピン密度波, SS=シングレット超伝導, TS=トリプレット超伝導)。双対性 (duality) は \$K\_\rho \leftrightarrow 1/K\_\rho\$ の入れ替えに対する対称性を意味している。絶対零度へ向けてベキで成長する相関 (量子臨界性) が見て取れる。\$K\_\rho < 1\$ (斥力ハバード模型の場合に対応) ならスピン密度波相関が他を凌駕して優勢となるが、これは対数補正まで考



慮して始めていえることである。他の平均場状態との競合がいかに微妙なものであるか判る。

TL液体の比熱  $\gamma$ , スピン帯磁率  $\chi$ , 電荷圧縮率  $\kappa$ , への補正はそれぞれ,

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_F}{u_\rho} + \frac{v_F}{u_\sigma} \right), \quad \frac{\chi}{\chi_0} = \frac{v_F}{u_\sigma}, \quad \frac{\kappa}{\kappa_0} = K_\rho \frac{v_F}{u_\rho}, \quad (33)$$

ウィルソン比は  $R_W = 2u_\rho/(u_\rho + u_\sigma)$  と与えられる。フェルミ液体補正 (5) と対比してみよう。

### 9 モット絶縁体

格子上的電子系に対して連続極限をとった時点で格子の離散性は塗り潰され、電子が1格子点あたり何個 ( $0 \leq n \leq 2$ ) いるのか (充填率), という情報はフェルミ波数に吸収されて終いである。しかし、充填率が有理数  $n/m$  である (整合フィリングと呼ぶ) 場合、逆格子ベクトルを吸ったり吐いたりする散乱過程が現れる。これがウムクラブ散乱である。ウムクラブ散乱では、実空間で見ると同方向へ走る複数の電子が同時に反対方向へ折り込まれて (umklappen) 散乱されるため電子の遍歴性が顕著に抑制される。格子系を背景として電子波の定常波が形成されるといっても良い。広く、電子相関によるウムクラブ散乱が引き起こす絶縁体をモット絶縁体と呼ぶ。Fig. 20に、いくつかの単純な場合のウムクラブ散乱とモット絶縁体の関係を示す。一般に、充填率  $1/m$  なら逆格子ベクトルは  $mk_F$  となる。この場合のウムクラブ散乱を  $mk_F$ -ウムクラブ散乱と呼ぶ。

#### 9.1 ハーフフィリングの場合

さて、ハーフフィリング (Fig. 20a) の場合、 $2k_F$ -ウムクラブ散乱 (強度を  $g_3$  と書く) を入れて2ループレベルの摂動的繰り込みを実行すると、自己エネルギー補正から

$$\theta = (g_1^2 + g_2^2 - g_1 g_2 + g_3^2/2)/4,$$

が得られる。結合定数の繰り込み群方程式は

$$\begin{aligned} dg_1/dl &= \underbrace{-g_1 g_2}_{\text{pp ループ}} + \underbrace{(g_1 g_2 - g_1^2)}_{\text{ph ループ}} - \underbrace{g_1^3/2}_{\text{2 ループ}}, \\ dg_2/dl &= \underbrace{-(g_1^2 + g_2^2)/2}_{\text{pp ループ}} + \underbrace{(g_2^2 + g_3^2)/2}_{\text{ph ループ}} - \underbrace{(g_1^3 - g_3^2 G)/4}_{\text{2 ループ}}, \\ dg_3/dl &= \underbrace{-g_3 G}_{\text{ph ループ}} - \underbrace{(g_3 G^2 + g_3^3)/4}_{\text{2 ループ}}, \end{aligned}$$

となり、 $(G - \text{const.})^2 - g_3^2$  に沿った繰り込みの流れが得られる。ここにも電荷圧縮率と関係する量  $G =$

$g_1 - 2g_2$ , が現れたが、 $g_1 - g_2$  モデルの場合と違って今度は  $G$  も“流れる”ことに注意しよう。ハバード模型を考えて繰り込みの初期値を  $g_{1;0} = g_{2;0} = g_{3;0} = U/\pi v_F$  と設定する。1ループレベルだと  $G$  も  $g_3$  も発散してしまうが2ループまで進むと非自明な固定点 (non-trivial fixed point)

$$g_1^* = 0, \quad g_3^* = -G^* = 2,$$

が現れる。 $g_3, G$  の絶対値はともに初期値からどんどん成長して弱結合領域を突き破り2という強結合値に落ち着く。この意味で、この固定点は強結合固定点である。

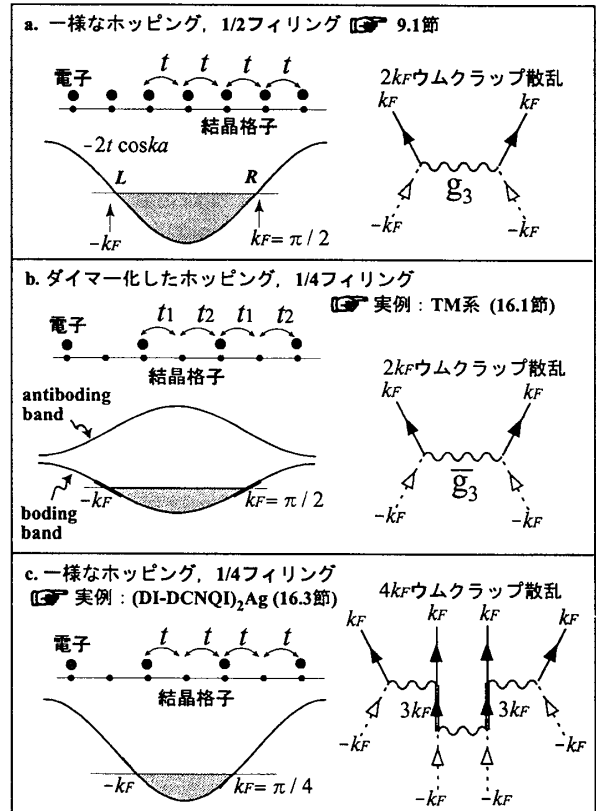


Figure 20: いろいろなウムクラブ散乱とモット絶縁体

非自明な固定点の物理を直接考察するには再びボゾン化を用いる。対応する固定点の有効ハミルトニアンはサイン・ゴルドン模型

$$\begin{aligned} H_{SG}^* &= \sum_{\nu=\rho,\sigma} \frac{u_\nu}{2} \int dx \left[ (\partial_x \phi_\nu(x))^2 + \Pi_\nu(x)^2 \right] \\ &+ \frac{2g_3}{(\pi a)^2} \int dx \cos[\sqrt{8\pi} K_\rho \phi_\rho(x)], \quad (34) \end{aligned}$$

となる.<sup>23</sup> さて, この非線型項をガウシアン項に対する摂動とみて  $g_3$  の2次のオーダーまで評価して繰り込み群方程式を立ててみよう.<sup>24</sup> ウィグマン流の処方 [30] に従うと,

$$\frac{dg_3}{d\ell} = 2(1 - K_\rho)g_3, \quad \frac{dK_\rho}{d\ell} = -\frac{8A\pi^2}{\Lambda_\ell^4} g_3^2 K_\rho^3,$$

が得られる.<sup>25</sup> ここで  $A = \int_0^1 d\rho \rho^3 J_0(\rho)$  であり,  $\Lambda_\ell = \Lambda_0 e^{-\ell}$  は時空カットオフである.

初期値の  $K_\rho < 1$  なら  $g_3$  は relevant (35)

となり, つられて  $K_\rho$  がゼロに繰り込まれる [非圧縮性絶縁体, (33) を見よ] ことがわかる.  $K_\rho < 1$  は  $U > 0$  に対応している.  $g_3$  が relevant であれば,  $\cos[\sqrt{8\pi K_\rho} \phi]$  項が支配的となり, 位相  $\phi$  がロックされ, 電荷励起にギャップが開く.

さて, 電荷ギャップ (モットギャップ) の正確な大きさについてはベレー仮説によるハバード模型の厳密解 [31] から

$$\Delta_{\text{exact}}(\tilde{U}) = \frac{2v_F}{\pi^2 \tilde{U}^2} \int_1^\infty d\eta \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{\sinh[\eta/\tilde{U}]},$$

( $\tilde{U} = U/\pi v_F$ ) であることが知られている.

一方, 繰り込みフローから電荷ギャップを見積もることが可能である. ウムクラップ散乱強度が強結合領域に突入するエネルギースケール, つまり  $g_{3,\ell_{\text{gap}}} = 1$  で決まる  $\Delta_{\text{RG}} = E_0 e^{-\ell_{\text{gap}}}$  をギャップの大きさで見なすことができる.  $\Delta_{\text{RG}}$  と  $\Delta_{\text{exact}}$  の  $U$  依存性を比較すると, 少なくとも弱結合領域  $\tilde{U} \ll 1$  では両者の一致が見られ, 繰り込み群によるギャップ同定の信頼性がわかる (Fig. 21).

<sup>23</sup> フェルミオンで書いたウムクラップ散乱  $R^\dagger R^\dagger LL$  を (30) を使ってボゾンで書き, さらに  $\phi_\rho/\sqrt{\pi K_\rho} \rightarrow \phi_\rho$ ,  $\sqrt{\pi K_\rho} \theta_\rho \rightarrow \theta_\rho$  と置き換える.

<sup>24</sup> このロジックだと, まず  $g$ -ology で元のフェルミオン系の繰り込みフローを調べる. 次に marginal/relevant な項のみを残し, そのような項をボゾンで書く. その結果得られたサインゴールドン模型に対し再度繰り込みをしている, という混乱めいた印象を受けるだろう. 実は, irrelevant な項も含めて最初からボゾン化しても等価な繰り込み群の議論に至る. この意味で, 1次元繰り込み群解析をフェルミオンのまま進めても, 始めからボゾン化して進めても結論は等価である (等価でなければオカシイ). ただ, フェルミオンのままの進め方は高次元の場合でも使えるので, この意味では一般性があるといえるだろう. この当たり, 技術的な問題も絡むので微妙である (14節での議論が参考になると思う).

<sup>25</sup>  $\beta = \sqrt{8\pi K_\rho}$  と置くと, 繰り込み群方程式は時空次元  $d = 1 + 1 = 2$  とスケール次元  $D = \beta^2/4\pi$  を用いて  $dg/d\ell = (d-D)g_3$  ときれいにまとめることができる. 一般に, 共形スピンゼロ, スケール次元  $D = \beta^2/4\pi$  を持つ摂動  $\cos[\beta\phi]$  は,  $d > D$  なら relevant,  $d < D$  なら irrelevant である ([17] の22章参照).

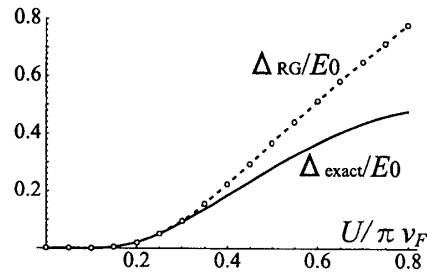


Figure 21: 厳密解と繰り込み群によるモットギャップの比較

## 9.2 一般の整合フィリングの場合

例えば  $1/4$  フィリングの場合,  $4k_F$  ウムクラップ散乱は Fig. 20c に示したような多重散乱によって生成される. これをフェルミオンのまま議論するのは見るからに困難であるが, ボゾン化を使うと容易に扱える [33]. フィリングが  $1/m$  ( $m$  は偶数とする)<sup>26</sup> である場合, もとのフェルミオン演算子で見ると  $mk_F$  の高次ウムクラップ散乱は  $[R^\dagger]^m L^m$  と書ける. これを (30) を使ってボゾン化すると, (34) と同様に

$$H_{mk_F}^{\text{um}} \sim g_m^{\text{um}} \int dx \cos \left[ m \sqrt{2\pi K_\rho} \phi_\rho(x) \right],$$

なる非線型項が現れる. この項のスケール次元は  $D = (m\sqrt{2\pi K_\rho})^2/4\pi = m^2 K_\rho/2$  であるから, 条件 (35) は,

初期値の  $K_\rho < 4/m^2$  なら  $g_m^{\text{um}}$  は relevant (36)

と一般化できる.  $m = 4$  なら  $K_\rho < 1/4$  でないと絶縁化が起きないことになる. on-site 斥力  $U$  のみ含むハバード模型の場合,  $K_\rho$  を  $U$  に関して摂動展開すると  $K_\rho = 1 - U/2\pi v_F + \mathcal{O}[(U/\pi v_F)^2]$  となるので, (摂動破綻を知りながら)  $U$  を大きくすれば絶縁化が起こるかに思われる. ところがフィリングを  $0 \leq n < 1$  で振って ( $n = 1$  はモット絶縁体なので特異点)  $U$  をどんなに強くしても, 厳密に  $K_\rho > 1/2$  であることが知られている [32]. 摂動的には, 長距離クーロン斥力を入れると  $K_\rho$  を小さくできるが,  $K_\rho$  の厳密な下限は不明である.

高次ウムクラップ散乱による絶縁化は, 実空間で見ると電荷整列 (CDW) に対応する (Fig. 20c を見よ). 実際, 妹尾・福山の平均場解析では  $1/4$  フィリングで最隣接サイト間クーロン斥力  $V$  があれば  $4k_F$  電荷整

<sup>26</sup> 奇数の場合, 電荷とスピンの自由度がカップルして状況が複雑になる. 詳細は [33].

## 講義ノート

列が起きることが示されている [34]. (TMTTF)<sub>2</sub>X 系や (DI-DCNQI)<sub>2</sub>Ag は現実の 1/4 フィリング擬 1 次元系であり, 実際に  $4k_F$  電荷整列が観測されている. しかしながら, 高次整合フィリングによるウムクラップ散乱, これに起因する絶縁化と電荷整列を非摂動的に理解する問題は, 依然 open problem であるといえよう. 酸化物高温超伝導の母体であるモット絶縁体も 2 次元 ウムクラップ散乱が引き起こしていることは明らかであるが, これをうまく取り込むのは至難である (17 節の議論も参照のこと). ウムクラップ散乱の物理を明らかにすることは, 「運動量空間における折り返し」と「実空間での局在」という電子の「波動性」と「粒子性」の両面を同時に記述することを迫る大問題である. ウムクラップは, 低次元強相関電子系の根底に横たわる「つわもの」であるといえよう.

## 10 梯子系とスピンギャップ金属

1 次元電子系の, よりエキゾチックな固定点が梯子型伝導体 [35] に見られるスピンギャップ金属である. 梯子上電子系は, ハーフフィリングの場合  $S = 1/2$  ハイゼンベルク梯子系と等価である. この場合, 再隣接サイトスピン間の反強磁性交換相互作用としては梯子桁に沿ったもの ( $J_{\parallel}$ ) と棧方向のもの ( $J_{\perp}$ ) がある.  $J_{\perp}$  が正 (反強磁性的) で有限であれば同一棧上の二つの  $S = 1/2$  がシングレットを組んでスピン励起にギャップ (スピンギャップ) が開くことが知られている.<sup>27</sup>

反強磁性スピン梯子にホールをドープすると, ホールは背景のシングレット対をできるだけ壊さないように入るだろう. ホールドープによって孔が開いたため, シングレット対は桁上を滑走する.

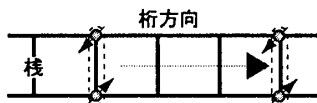


Figure 22: スピンギャップ金属

<sup>27</sup>  $J_{\perp}$  の符号に依らず絶対値が有限であれば必ずギャップが開く ( $J_{\perp}$  の絶対値を振ったときに量子相転移は無い).  $J_{\perp}$  を負 (強磁性的) にしてどんどん強めていくと  $S = 1/2$  がフント結合によって  $S = 1$  となって桁上に並んだスピン 1 のハイゼンベルク鎖 (ハルデン系) ができる. ハルデン系にはスピンギャップ (ハルデンギャップ) が開く. この意味で, 反強磁性スピン梯子とハルデン系は同じユニバーサルリティクラスに属する. スピン梯子とハルデン系の連続的な繋がりや磁気励起の関係を示唆する重要な実験事実が, 静帯磁率と核磁気緩和から見積もったギャップの大きさを様々な系についてプロットした伊藤・安岡プロット [36] である. このプロットは示唆に富んでいるが, 背後にある磁気励起とギャップの関係は未解決問題である.

これがスピンギャップ金属の描像 (Fig. 22) である. さて, 2 粒子シングレット対は超伝導の種である. これがマクロに凝縮すればコヒーレンス長の極端に短い新奇の超伝導出現が期待される. この状況を 2 次元銅酸素面で起こる高温超伝導と対比して見よう, というあたりが 90 年代半ばに梯子型電子系研究が勃興した所以である.

しかし, 梯子は電子鎖 2 本が棧によって結ばれた 1 次元系である. 孤立した梯子では長距離秩序は望めない. 乱れの効果も甚大であろう. そこで系に圧力をかければ梯子間に 3 次元的なネットワークができて超伝導がおきるのでは? と期待される. この期待を現実のものとしたのが秋光グループによる  $\text{Sr}_{14-x}\text{Ca}_x\text{Cu}_{24}\text{O}_{41}$  系の超伝導発見 [37] である.

梯子型ハバード模型に対して, バンド間の遷移に伴う 6 種類の結合定数の 2 ループ繰り込みを実行すると, バンド内前方散乱 ( $g_0^{(1)}$ ) とバンド間トンネル散乱 ( $g_t^{(1)}, g_t^{(2)}$ ) が強結合領域へ繰り込まれ, 強結合固定点が現れる [38]. 固定点のハミルトニアンをボゾン化すると, 結合性電荷モード (棧上シングレット対の重心運動) の位相のみがギャップレスとなり, 桁上電荷の相対運動モード, 2 つのスピンモードの位相はロックされてギャップが開くことがわかる [38]. これは「梯子の桁上を滑走するシングレット対」の描像と整合する.

## 11 弱結合、強結合固定点と準粒子ウエイトの繰り込み

1 次元電子系の様々な固定点と準粒子ウエイトの繰り込みの関係を議論しよう [4]. 準粒子ウエイトの繰り込み群方程式 (25) をハバード模型 ( $U > 0$ ) の場合に解いて  $\theta_\ell$  の赤外固定点での値をまとめると,

- 朝永-ラッティンジャー液体: 弱結合固定点  
 $\Rightarrow \theta^* = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \theta_\ell = U^2/16\pi^2 v_F^2 \ll 1$
- モット絶縁体: 強結合固定点  
 $\Rightarrow \theta^* = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \theta_\ell = 3/4$
- スピンギャップ金属: 強結合固定点  
 $\Rightarrow \theta^* = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \theta_\ell = U^2/16\pi^2 v_F^2 + 15/8 > 1$

となる. 対応する繰り込みの流れを描くと Fig. 23 のようになる. いずれ低エネルギー極限で準粒子ウエイトはゼロに繰り込まれるが, 強結合固定点を持つ系の場合準粒子ウエイトの死に方が激しいことが見て取れる. TL 液体の場合, 準粒子ウエイトは非常に緩やかに減衰する.  $\ell = 6$ , つまり  $\omega \sim 10^{-3} E_0$  ( $\sim 1\text{K}$  程度のエネルギースケール) に至ってもまだ  $z = 0.5$  程度である. これに対し, モット絶縁体やスピンギャップ金属ではこの程度の温度スケールですでに準粒子ウエイト

トは死滅しており、非フェルミ液体効果が顕著に見えてくる。この事情は、すぐあとで次元性効果を議論する際の重要ポイントとなる。

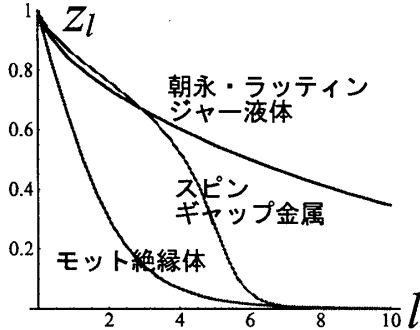


Figure 23: 準粒子ウエイトの繰り込みフロー

## 12 アンダーソン絶縁体

ここまでで、電子相関が引き起こす TL 液体、モット絶縁体、スピンギャップ金属という3つの固定点を見た。残るひとつの1次元電子系固定点が、乱れによるアンダーソン絶縁体である。1次元電子系に乱れを入れると必ず局在する。これを摂動的繰り込み群で見ると、不純物による前方散乱と後方散乱を取り入れ、レプリカ法を使って作用を書き、繰り込み群方程式を立てればよい。その結果、初期値がどんなに弱くともランダムポテンシャルによる後方散乱が成長して系が局在することがわかる。興味深いのは電子相関とアンダーソン局在のインタープレイである [8, 39]。

## 13 次元性効果

### 13.1 一般論

1次元金属に対する次元性効果を調べよう。1次元金属が弱い1電子ホッピング  $t_{\perp}$  によってレギュラーに繋がれスタックした擬1次元系を考える。これまでの話で、

1次元系: 長距離秩序 $\times$ , 準粒子コヒーレンス $\times$   
 3次元系: 長距離秩序 $\circ$ , 準粒子コヒーレンス $\circ$

ということが判っている。擬1次元系ではどうなるだろう。例えば、擬1次元有機導体 TM 系は伝導性の高い順に3つの結晶軸  $a, b, c$  を持ち、それぞれの方向のホッピング積分強度は  $t_a \sim 0.1\text{eV}$ ,  $t_b \sim 0.01\text{eV}$ ,  $t_c \sim 0.001\text{eV}$ , 程度である。  $t_b \ll T \ll t_a$  なる温度領域では熱揺らぎのせいで系は1次元的に振舞う(熱的閉じ込め)。鎖間方向にコヒーレントなバンド運動ができ

ない為である。温度を下げて  $T \sim t_b$  程度になると系の3次元的なネットワークが浮き出してくる。この先低温へ向けて系の辿る道筋には二通りのパス考えられる (Fig. 24)。

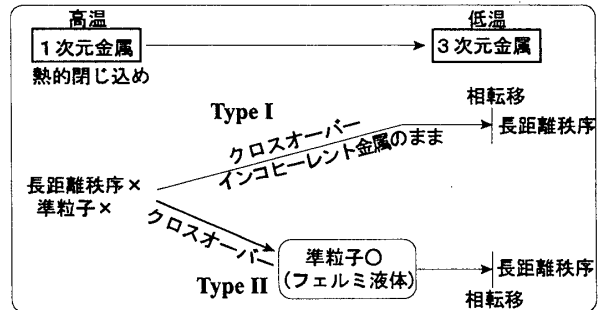


Figure 24: 擬1次元電子系の辿る二つのパス

つまり、フェルミ液体相を経ずに相転移が起きて長距離秩序化が起きる場合 (Type I) と、いったんフェルミ液体相を経て、フェルミ面の不安定化という形で相転移が起きる場合 (Type II) があり得る。Type I の場合、骨格となる1次元系の優勢なベキ相関がそのまま3次元的に凍結したと見ることができる。ここで

Q1. 相転移温度は鎖間ホッピング強度と同程度か?  
 Q2. Type I と Type II どちらのパスが実現するか?

が問題になる。これに対して繰り込み群で答えようというわけである [40]。

### 13.2 鎖間2粒子過程の生成と繰り込み

Type I の場合、低エネルギーへ向けて(繰り込みの過程で)ダイナミカルに生成される鎖間2体相関の成長が相転移の鍵を握る。<sup>28</sup> このように繰り込みの初期値では存在しなくても、繰り込みが進む過程で発生、増殖する過程が現れることがある。このような場合、このタイプの過程をあらかじめ繰り込みの初期段階で有効作用に取り入れておかななくてはならない。<sup>29</sup>

<sup>28</sup> この過程は、隣接した二つの超伝導体間にバーチャルな粒子・粒子対トンネル(ジョセフソントンネル)が起きてオーダーパラメータの結合(ジョセフソン結合)が生じる機構と本質的に同じである。この点で、 $V_{\perp}$  の生成は Type I に限ったことでなく、極めて一般的なことである。後述するように、いまの(次元クロスオーバーの)コンテキストでは、 $V_{\perp}$  が発散するエネルギースケールと、鎖間1粒子ホッピング  $t_{\perp}$  が強結合領域へ繰り込まれるスケールを比較して Type I と Type II を分別する。「気持ち」としては、Type II の場合、 $t_{\perp}$  が発達してフェルミ面の曲率が無視できなくなると、1ループの対数特性が潰れる為  $V_{\perp}$  の成長は著しく抑制されるはずである。よって、 $V_{\perp}$  は irrelevant とは言わないまでも、少なくとも1次元的なベキ相関の凍結はありえないだろうということになる。

<sup>29</sup> 強相関系では、繰り込みの初期段階ではゼロ(あるいは非常に小さい)であるような過程が多体効果によって生成され、繰り

鎖間 2 粒子過程に対する繰り込み群方程式は Fig. 25 の様に描ける (鎖内相互作用を○, 鎖間の 1 電子ホッピング ( $t_{\perp}$ ) 過程をジグザグ線, 鎖間 2 粒子結合を■で表す).

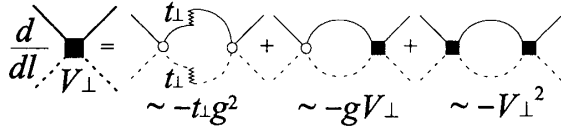


Figure 25: 鎖間 2 粒子過程に対する繰り込み群方程式

式で書くと

$$\frac{dV_{\perp;l}}{dl} = -t_{\perp;l}^2 g_l^2 + g_l V_{\perp;l} - \frac{1}{2} V_{\perp;l}^2, \quad (37)$$

の形になる. 第 1 項が鎖間過程の生成, 第 2 項がその指数関数的成長をもたらす, 第 3 項によって発散が起きる. この発散は RPA(平均場) 的な不安定性に対応しており, 発散  $V_{\perp;l} = -\infty$ , が起きるエネルギースケールに対応する温度

$$T_c^{RG} = E_0 e^{-\ell_c} \quad (38)$$

で相転移が起きることを意味する. この扱いは「鎖内の相関をできるだけ正確に (いまの場合は 2 ループレベル繰り込み群) 扱った上で鎖間方向については乱雑位相近似を用いる」という鎖間平均場近似 [41] と本質的に同等である.

### 13.3 鎖間 1 粒子過程の繰り込み

次に鎖間 1 粒子過程の繰り込み ( $t_{\perp}$  の繰り込み) を考えよう. 隣接する鎖への飛び移りの度合いを考えるのであるから, 隣の鎖にどれだけ跳びやすいか? つまり鎖内の 1 粒子状態密度 (準粒子ウェイト) がどれくらいあるか? を考えればよいことになる. これは鎖内自己エネルギー過程の問題であり, 準粒子ウェイトが大きければそれだけ飛び移りの度合いが増す. 繰り込みをダイアグラムで書くと Fig. 26 の形になる.

ここで  $t_{\perp}$  が小さいので鎖間方向の熱的コヒーレンス長が鎖間距離と同程度になり, 鎖間方向に対してはスケール仮説を適用することはできないことに注意しよう. 言い換えれば, 鎖間方向の波数  $k_{\perp}$  は繰り込みの過程で不変でなくてはならない. この点に注

込みの流れを分岐させ, しまいには予想だにしない赤外固定点に向かわせる可能性が常にある.

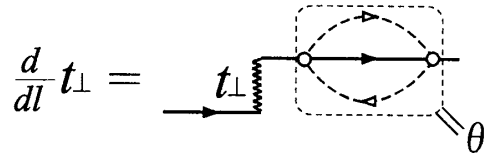


Figure 26: 鎖間 1 粒子過程の繰り込み

意すると, 鎖間 1 粒子過程に対する作用には単にファクター

$$(1 - d\ell)^2 [1 - (\theta_{\ell} - 3)d\ell/2]^2 = 1 + (1 - \theta_{\ell})d\ell$$

がかかるだけ (つまり鎖内スケールリングの効果を被るだけ) ということになる. これより直ちに繰り込み群方程式

$$t_{\perp;l+d\ell} = [1 + (1 - \theta_{\ell})d\ell] t_{\perp;l} \implies \frac{d \ln t_{\perp;l}}{d\ell} = 1 - \theta_{\ell} \quad (39)$$

が得られる. ここで, 準粒子がコヒーレンスを回復する (1 粒子クロスオーバー) エネルギースケールを  $t_{\perp;l_{1P}} = E_0$  によって定義しよう. 対応する温度スケールは

$$T_{1P}^{RG} = E_0 e^{-\ell_{1P}} \quad (40)$$

である. このエネルギースケール以下では鎖間のホッピング積分が鎖内のバンド幅程度にまで成長しているため, 鎖間方向にも 1 電子コヒーレンス (準粒子コヒーレンス) が十分発達していると考えるのである.

以上まとめると, 3 本の繰り込み群方程式 (26), (37), (39) を連立して解き, (38) と (40) に従って  $T_c^{RG}$  と  $T_{1P}^{RG}$  を決定した結果

<p><b>Type I:</b> <math>T_{1P}^{RG} &lt; T_c^{RG}</math> である場合, 鎖内の優勢なベキ相関が 3 次元性によって凍結 (長距離秩序化) し, <math>T = T_c^{RG}</math> でインコヒーレント金属相からの相転移が起きる.</p> <p><b>Type II:</b> <math>T_{1P}^{RG} &gt; T_c^{RG}</math> である場合, <math>T = T_{1P}^{RG}</math> 付近で準粒子コヒーレンスが回復し, フェルミ面が形成される. しかしフェルミ面は低温で不安定化を起こして密度波或いは超伝導相に転移する.</p>
--

この事情をより直感的に Fig. 27 にまとめておく.

## 14 TL 液体の不安定性

弱結合固定点である TL 液体に対する次元性効果を概観しておこう. この場合, 弱結合であることが幸いし

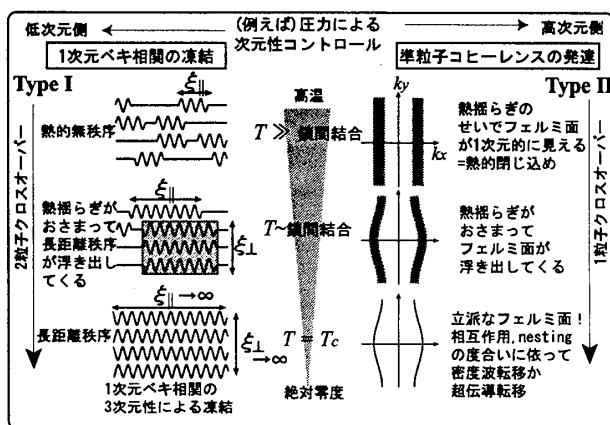


Figure 27: 次元性効果と秩序形成. Type I, II どちらが起こるか繰り込み群で判定できる.

複数のアプローチが可能である。朝永ボゾン，スピン電荷分離といった TL 液体の個性が次元性に耐えて生き残る（鎖内に「閉じ込め」られる）か否かが焦点となるが，議論は収束しておらず名うての難問として残っている。

### 14.1 無限本のハバード鎖に対する摂動的繰り込み群

まずはこの問題を前節で述べた摂動的繰り込み群で扱おう [40, 42]. この方法だとハバード鎖が無限本並んで格子を組んだ現実的な系を扱うことができる。前節に従って容易に繰り込み群方程式を立てることができ、

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{dl} &= -g_1^2 - g_1^3/2, & \frac{dg_2}{dl} &= -g_1^2/2 - g_1^3/4, \\ \frac{d \ln t_{\perp}}{dl} &= 1 - \theta = 1 - \frac{1}{4}(g_1^2 + g_2^2 - g_1 g_2), \\ \frac{dV_{SDW}}{dl} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{t_{\perp}}{E_0} g_2 \right)^2 + \frac{1}{2} g_2 V_{SDW} - \frac{1}{4} V_{SDW}^2, \end{aligned}$$

が得られる。優勢な相関は  $2k_F$  スピン密度波相関であり，対応する鎖間相関の強さを  $V_{SDW}$  とした。

さて，簡単な為  $\theta$  のスケール依存性を無視して  $t_{\perp}$  の繰り込み群方程式を解くと， $t_{\perp 0} e^{(1-\theta)l_{1P}} = E_0$  より 1 粒子クロスオーバーのエネルギースケールが

$$T_{IP}^{RG} = E_0 e^{-l_{1P}} = E_0 \left( \frac{t_{\perp 0}}{E_0} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} = t_{\perp 0} \left( \frac{t_{\perp 0}}{E_0} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}},$$

と求まる。  $\theta = 0$  なら  $T_{IP}^{RG} = t_{\perp 0}$  であるが，  $\theta > 0$  なら  $T_{IP}^{RG} < t_{\perp 0}$  となり，「電子相関が次元クロスオーバーエネルギースケールを抑える」ことが判る (13.1 節最後の Q1. に対する答え)。弱結合固定点を反映して  $\theta$

が小さい（厳密解は  $\theta \leq 1/8$  を与える）ので 1 粒子過程は繰り込みが進むと指数関数的に成長する。この結果，Type II の流れだけが実現することになる。繰り込みの初期値を  $g_1 = g_2 = U/\pi v_F$ ,  $t_{\perp} = t_{\perp 0}$ ,  $V_{SDW} = 0$ , として  $t_{\perp 0}$  を振ると，Type I の SDW 転移温度に対応する温度  $T_{SDW}^{RG}$  はつねに  $T_{IP}^{RG}$  の下に埋もれてしまうことが判る（詳細は [42] 内で議論した）。斥力  $U > 0$  をどんなに強くしてもこの相図は定性的に変化しない。つまり，摂動的繰り込み群の枠内では Type II の流れのみが実現し，TL 液体は不安定ということになる。

### 14.2 スピンレスフェルミオン 2 本鎖：ボゾン化

次にスピンレスフェルミオン (TL 液体の電荷自由度だけを取り出したと考えてよい) 2 本が鎖間のフェルミオンホッピング  $t_{\perp}$  で繋がれた系を考える。ボゾン化を用いて位相ハミルトニアンで記述したのちに繰り込み群解析を実行する [43]. この模型はおもちゃ (toy model) といえるが，ボゾン化によって鎖内を非摂動的に記述できるのが利点である。位相ハミルトニアンは鎖 1 上の位相と鎖 2 上の位相の和 [対称 (+) モード] と差 [反対称 (-) モード] に分離できる。ボゾン場  $\Phi_{\mu}$  と  $\Theta_{\mu} (\mu = \pm)$  の共役関係に注意を払いながらボゾン化すると， $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_{+}(x) + \mathcal{H}_{-}(x)$ , と分離できる。  $\mathcal{H}_{+}(x)$  はガウシアンで

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-}(x) &= \frac{1}{2} \left[ (\nabla \Theta_{-})^2 + (\nabla \Phi_{-})^2 \right] \\ &+ \frac{t_{\perp}}{(\pi a)^2} \cos[\sqrt{2\pi K} \Phi_{-}] \cos[\sqrt{2\pi \tilde{K}} \Theta_{-}] \\ &+ \frac{2J_{\perp}}{(2\pi a)^2} \cos[\sqrt{8\pi K} \Phi_{-}] + \frac{2\tilde{J}_{\perp}}{(2\pi a)^2} \cos[\sqrt{8\pi \tilde{K}} \Theta_{-}], \end{aligned}$$

となる。  $\tilde{K} = 1/K$  であり，  $t_{\perp}$  の項は  $t_{\perp} [R_2^{\dagger} R_1 + L_2^{\dagger} L_1]$ ,  $J_{\perp}$  の項は  $J_{\perp} R_2^{\dagger} L_2 L_1^{\dagger} R_1$ ,  $\tilde{J}_{\perp}$  の項は  $\tilde{J}_{\perp} R_2^{\dagger} L_2^{\dagger} L_1 R_1$  から来る (例えば  $R_2$  は鎖 2 上の右向きフェルミオンの演算子)。  $J_{\perp}$ ,  $\tilde{J}_{\perp}$  が繰り込みの過程で生成される鎖間 2 粒子過程である。この位相ハミルトニアンに対し，ウィグマン流の繰り込み操作を施すと繰り込み群方程式 [43]

$$\begin{aligned} \frac{d \ln K}{dl} &= \frac{1}{2} \left( -K J^2 + \tilde{J}^2 / K \right), \\ \frac{dt_{\perp}}{dl} &= (2 - 1/2K - K/2) t_{\perp}, \\ \frac{dJ_{\perp}}{dl} &= t_{\perp}^2 (K - 1/K) + 2(1 - K) J_{\perp}, \\ \frac{d\tilde{J}_{\perp}}{dl} &= t_{\perp}^2 (1/K - K) + 2(1 - 1/K) \tilde{J}_{\perp}, \end{aligned}$$

が得られる。繰り込みの初期値  $K = K_0$ ,  $t_{\perp} = t_{\perp 0}$ ,  $J = \tilde{J} = 0$  を与えてこれを解く。  $K$  の繰り込み群方程式の右辺に  $J, \tilde{J}$  が現れている点に注意しよう。こ

## 講義ノート

のために  $K$  か  $1/K$  のいずれかは必ずゼロに繰り返されることになる。つまり  $t_{\perp}$  は必ず irrelevant ということになる。これは閉じ込めを意味しているのだろうか? 特に  $K_0$  に  $2 - (K_0 + 1/K_0)/2 = 0$  で決まる臨界値  $K_0^* = 2 - \sqrt{3} \sim 0.28$  があって、 $K_0 < K_0^*$  なら  $t_{\perp}$  は単調減少してゼロへ向かう。ツベリックはこの場合を「強い閉じ込め (strong confinement)」と呼んだ [44]。しかしながら再び注意が必要である。低エネルギー漸近極限で  $t_{\perp}$  がゼロになるからといって「閉じ込め」が示されたことにはならないのである。 $J_{\perp}$  あるいは  $\tilde{J}$  が強結合領域に繰り返されて 2 粒子クロスオーバーが起こる可能性を併せると、この場合も結局固定点で TL 液体は壊れると考えるのが妥当である。この点はヤコベンコによって強調された。<sup>30</sup>

ここで  $K$  の繰り返込み群方程式の右辺に  $J, \tilde{J}$  が現れた点を強調しておく。これは、鎖間 2 粒子過程が鎖内過程を繰り返込むフィードバック効果であり、 $t_{\perp}$  をゼロへ追いやる主役となる。この効果を前節の摂動的繰り返込み群で扱うのは至難であり、2 本鎖をボゾン化で扱って始めて明らかになる点である。<sup>31</sup>

14.3 配位数  $\infty$  の極限

次元性によって準粒子コヒーレンスが回復する状況を字義どおり記述するには系の 1 粒子グリーン関数が極を持つ条件を探らねばならない。この目的のための toy model が、一本の電子鎖の周囲に無限本の電子鎖が配位した模型の平均場解析 [46] である。簡単の為、鎖内の 1 次元切断型グリーン関数の anomalous exponent  $\gamma = 0$  の場合を考え [式 (32) で  $\gamma = 0$  と置いた後フーリエ変換],

$$G^{1D}(k, \varepsilon) \sim \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon - u_{\rho}k)(\varepsilon - u_{\sigma}k)}}$$

とする。スピンも電荷も両方考えており、スピン電荷分離 ( $u_{\rho} \neq u_{\sigma}$ ) の情報も入っている。配位数無限大であるから鎖間ホッピングを平均場的に扱うことができ、<sup>32</sup> 系のグリーン関数が

$$G^{3D}(k, \varepsilon) = \frac{G^{1D}(k, \varepsilon)}{1 - t_{\perp} G^{1D}(k, \varepsilon)},$$

と求まる。ここから得られるスペクトル関数

$$A(k, \varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G^{3D}(k, \varepsilon + i0^+)$$

<sup>30</sup>文献 [43] は “Once again about interchain hopping” と題した簡潔な論文。

<sup>31</sup>フィードバック効果が  $t_{\perp}$  を強く抑制する傾向と閉じ込め問題との関連については土射津・鈴村 [45] による一連の研究がある。

<sup>32</sup>無限大次元での動的平均場理論の発想と同じである。

の挙動を見るのである。すると、Fig. 28 に示すように  $t_{\perp}$  が入ると準粒子ピークの現れることが見て取れる。対応する準粒子ウエイトは  $z =$

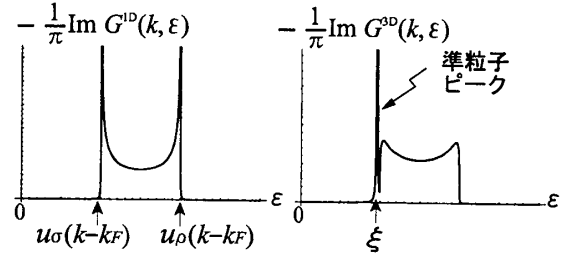


Figure 28: 配位数無限大系のスペクトル関数

$t_{\perp} / \sqrt{\Delta u^2(k - k_F)^2 + t_{\perp}^2}$  で与えられ、準粒子ピーク位置は  $\xi_k = k\bar{u} + \sqrt{\Delta u^2(k - k_F)^2 + t_{\perp}^2}$  となる。ここで  $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_{\rho} + u_{\sigma})$ ,  $\Delta u = \frac{1}{2}(u_{\rho} - u_{\sigma})$ . この処方準粒子コヒーレンスを直接議論できるという利点を持つが、なにぶん配位数無限大という非現実的状況を考えている。

以上、TL 液体の不安定性を巡る三つのアプローチを紹介した。どのアプローチもそれぞれに長所と短所を抱えている上に結論も整合的とはいえない。<sup>33</sup> この問題がいかにか微妙であるかが伝わただろうか。

## 15 スピン系の次元クロスオーバー

ここで若干脱線してスピン系の次元クロスオーバーに触れる。この問題は 1975 年のスカラピーノらによる先駆的な研究 [41] に遡る長い歴史を持ち、かつ未解決の問題だからである。坂井・高橋はまず、擬 1 次元反強磁性ハイゼンベルク模型をスピン波理論で扱った [48]。鎖内と鎖間の反強磁性相互作用をそれぞれ  $J_{\parallel}$ ,  $J_{\perp}$  とし、量子揺らぎによるスピンの縮みをスピン波近似で計算する。小さな  $r = J_{\perp}/J_{\parallel}$  に対する自発モーメントは

$$|\langle S^z \rangle| \sim S - \frac{1}{2\pi} |\ln r|,$$

となり、 $r \sim 1$  程度の領域 (2 次元) から徐々に  $r$  を小さくすると臨界値  $r_c \sim e^{-2\pi S}$  で自発モーメントがゼロと

<sup>33</sup>特に最初の摂動的繰り返込みに対しては、 $t_{\perp}$  と  $U$  をともに摂動的に扱うのはけしからんというアンダーソンの有名な批判がある。 $U$  の効果を非摂動的に扱った後に弱い  $t_{\perp}$  を摂動として入れれば「閉じ込め」が起こる [12]. というのである。アンダーソン一派は問題を 2 本鎖系に限定し、鎖間を 1 電子が跳ぶ際に背景の朝永ボゾンと結合する効果をコヒーレンス/ディコヒーレンスの立場から議論した [47]. この論法は数学的に危うい点も有り、他のグループを巻き込むには至っていない。

なって秩序が壊されることを示唆している。  $S = 1/2$  に対し  $r_c \sim 0.04$ ,  $S = 1$  に対し  $r_c \sim 0.002$  という値が得られる。 スピン波理論を改良するため、坂井・高橋は鎖内を数値対角化で扱った後に鎖間結合を平均場近似で扱い、  $S = 1/2$  に対し  $r_c = 0$ ,  $S = 1$  に対し  $r_c \geq 0.025$  を得た [48]。

$S = 1/2$  反強磁性ハイゼンベルク模型はスピンレスの TL 模型にマップでき、ギャップレスのスピノン励起 (ドクロゾ・ピアソンモード) が得られる [31]。 繰り込み群の観点から見ればこれは弱結合固定点である。 一方、  $S = 1$  反強磁性ハイゼンベルク模型 (ハルデン系) にはギャップが開き、強結合固定点であるといえる。 これらの系での次元性効果については電子系の繰り込み群解析からの類推ができる。 つまり、  $S = 1/2$  の場合次元性に対して極めて不安定、  $S = 1$  なら有限の  $r$  に対しても安定になりうると期待される。 実際に坂井・高橋の結論はこれと符合する。 しかしながらこれを完全に解析的に示した仕事はまだ無い。<sup>34</sup>

## 16 現実の系への応用

理論面での長い準備がほぼ終わった。 いちばん exciting な「現実の系への応用」について手短かにまとめる (詳細は [4])。

### 16.1 TM 系スピン密度波転移

擬 1 次元有機導体  $(\text{TMTTF})_2\text{X}$ ,  $(\text{TMTSF})_2\text{X}$  ( $\text{X}=\text{Br}, \text{PF}_6, \text{ClO}_4$ , etc.) は、  $1/4$  フィリングの  $\pi$  電子鎖が陰イオン  $\text{X}$  を介して擬 1 次元的に並んだ構造を持つ。 伝導鎖 ( $a$  軸) 方向のホッピング積分がダイマー化 ( $t_{a1}$ ,  $t_{a2}$ ) しているためにバンドが bonding, antibonding に分裂し、bonding バンドが  $1/2$  フィリングになっている (Fig. 20b の状況)。 これら一連の系は 20 年来、驚くほど豊かな問題を提供しつづけている [49]。

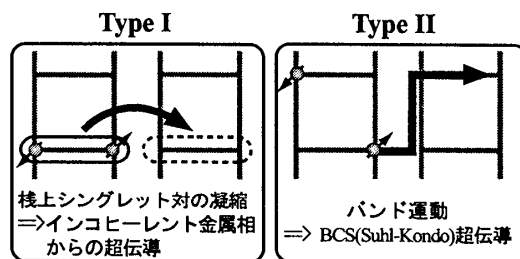
我々の視点から興味深いのは、  $(\text{TMTTF})_2\text{Br}$  と  $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$  のスピン密度波転移と金属相の質的相違である。 実験事実を総合すると、常圧下金属相について、  $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$  はフェルミ液体であり、非整合スピン密度波相への転移は擬 1 次元的なフェルミ面のネスティングによって引き起こされる。 これは、Type II の場合に当たる。 一方の  $(\text{TMTTF})_2\text{Br}$  での反強磁

<sup>34</sup>例えば  $S = 1/2$  反強磁性鎖はジョルダン・ウイグナー変換によってフェルミオン系にマップできる [18]。 このフェルミオン系に対して次元性効果を調べることができそうな気がする。 しかしジョルダン・ウイグナーフェルミオンには非局所的な位相がつく [素励起が非局所的なキルク (ソリトン) であることの顕れである]。 この厄介な位相のために議論がスタックしてしまうのである。

性 (整合スピン密度波) 転移は、準粒子コヒーレンスが不在のインコヒーレント金属相からの転移、つまり、Type I の場合に当たると考えられる [50]。

### 16.2 $\text{Sr}_{14-x}\text{Ca}_x\text{Cu}_{24}\text{O}_{41}$ 超伝導

1996 年に秋光グループは梯子系  $\text{Sr}_{14-x}\text{Ca}_x\text{Cu}_{24}\text{O}_{41}$  の高圧 ( $\sim 3$  GPa) 下超伝導を発見した [37]。 超伝導が圧力下で起こるということは、系の次元性が重要な役割を担っているを示唆している。 3GPa から 8GPa にわたって圧力を増していくと、超伝導転移温度は山を持ち、この山を挟んで低圧側から高圧側へかけて、常伝導相での梯子の伝導軸 ( $c$  軸) 方向の電気抵抗の振る舞いが  $T$  に比例する振る舞いから  $T^2$  に比例する振る舞いへと推移する。 これは、加圧にともなって 3 次元的な準粒子コヒーレンスが発達し、非フェルミ液体的な挙動からフェルミ液体的な挙動へのクロスオーバーが起きていることを示唆している。



ハバード梯子系を 1 粒子ホッピングで弱く繋いだ系 (上図) を調べると、骨格である 1 次元梯子が強結合固定点を持つことを反映して、Type I フローが可能となる [42]。 Type I の場合、鎖上シングレット対が凝縮してインコヒーレント金属相からの超伝導転移が起こる。 Type II の場合、フェルミ液体相へのクロスオーバーが起きる。 この領域では、2 バンド系のバンド間ネスティングによって増強されたスピン揺らぎを媒介とする超伝導 (スール・近藤機構) が実現していると考えられる。

### 16.3 有機混晶系 $(\text{DI-DCNQI})_2\text{Ag}_{1-x}\text{Cu}_x$

鹿野田グループによって合成された擬 1 次元有機混晶系  $(\text{DI-DCNQI})_2\text{Ag}_{1-x}\text{Cu}_x$  は、整合フィリングによるウムクラップ散乱, Cu ドーピングによる乱れ, ドーピングに伴う次元性制御という相関と乱れと次元性のインタープレイを実現する上でのすべての要素を有し、擬 1 次元強相関電子系における局在問題を考える上での格好の舞台を提供した [51]。 実際の  $(\text{DI-DCNQI})_2\text{Ag}$  は  $1/4$  フィリングであるので、9.2 節で



## 講義ノート

議論した多重散乱による高次のウムクラップ散乱が出てくるが、本質は乱れによる局在とウムクラップ過程によるモット絶縁化の競合問題として捉えられる。

ここで起きている物理をつかむモデルとして、 $1/2$  フィリングの乱れたハバード鎖が弱い鎖間ホッピング  $t_{\perp}$  で3次元的に繋がれたモデルを考えよう。この場合、乱れによる後方散乱が引き起こす1次元的な局在、鎖間1粒子ホッピングによる準粒子コヒーレンス、鎖間反強磁性相互作用による反強磁性秩序の三者が競合する。クエンチされた弱いランダムポテンシャルを想定してレプリカ法を用いて有効作用を構築し、これに対する2ループ繰り込み群解析を実行することができ、 $(\text{DI-DCNQI})_2\text{Ag}_{1-x}\text{Cu}_x$  でのCuドーピングに伴う相変化を定性的に理解できる。

## 17 2次元系

銅酸化物高温超伝導体常伝導相における非フェルミ液体挙動は、相互作用する二次元電子系を繰り込み群の観点から理解する研究を促した。研究の流れに拍車をかけたシャンカーのレビュー [9] 以降、もっぱら1ループレベルで2次元フェルミ液体の不安定性を議論する研究が盛んになされた。しかしながら、8.1節で強調したように、本来の興味である非フェルミ液体挙動の兆候を捉えるには準粒子ウェイトの2ループレベルでの繰り込み群解析が必要となる。一般にフェルミ面が曲率を持つと、2ループ自己エネルギーの対数特異性はつぶれてしまう(5.2節で述べた不完全ネスティングによってphループの対数特異性が潰れることと根は同じ)。Fig. 29の(a), (b)のような場合には、フェルミ面の限られた部分で分散を線形化すれば対数特異性が出るので何とか2ループ解析を実行できる [4]。

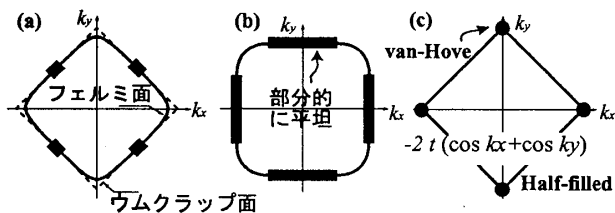


Figure 29: 2次元電子系のフェルミ面。太線、●で強調した処から特異性が出る。

(c) の場合には、フェルミ面の4隅にバンホーブ特異点があるので特異性は  $(\ln[E_0/\omega])^2$  となる。この場合に、スケールリングパラメータを  $\tilde{\ell} = (\ln[E_0/\omega])^2$  と取り直した1ループ繰り込み [52] ができるが、2ループ

ではうまくいかない。2次元系での2ループ解析の難しさは、そのまま繰り込み可能性自体の問題と密接に関連しているように思われる。繰り込み群の処方 は広義の意味で摂動的であり、対数特異的な過程を拾い出す手法である。何とか非摂動的なアプローチができればよいのだがこれがなかなか難しい。ひとつの手法として既に触れた高次元ボゾン化 [14] の考え方が ある。フェルミ面近傍をパッチに分割し、パッチ上のボゾンの集団自由度のみを取り出すわけである。しかし、準粒子コヒーレンスを議論するためには、パッチ間の1電子遷移を取り入れることが本質的である。この問題は、電子の個別自由度と集団自由度の結合という点で、コヒーレンス競合の問題と繋がっている。擬1次元系における準粒子コヒーレンスの定義づけの問題 (14節) とも関連して、今後の研究の進展が望まれる。

## 18 Competing Orders-結語にかえて

既に触れたように、低次元強相関電子系に潜む共通の難題として、平均場基底状態に隣接(共存, 競合)する平均場状態 (competing orders) が複数存在し、これらの周りの揺らぎと個別励起が強く結合する、ということが挙げられる。例えば銅酸化物高温超伝導の物理の本質が、ドーピングされたモット絶縁体に潜む多様な赤外不安定性 ( $d$ 波超伝導状態, 反強磁性状態, フラックス状態, ストライプ状態など) の間の競合および共存の問題にあることは間違いないと思われる。そこでは、可能な限り多くの平均場解を含んだ低エネルギー有効理論を与え、できるだけ正確にエネルギースペクトルを決定することが目標となる。実際、この問題意識を共有する理論研究がいろいろな立場から極めて活発に進んでいる。

High  $T_c$  における “competing orders” の問題 [53] に対して、ここで述べてきた繰り込み群の概念と手法がどれほど有効であるかは未知である。繰り込み群は、広義の意味での「摂動的」枠組みでしかないからである。その切ない限界を楽観的に直視しながら今後のブレークスルーに臨みたい。

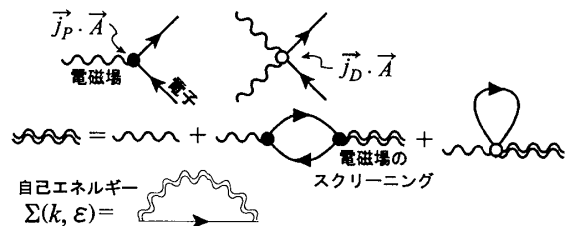
## 謝辞

石井力, 小形正男, Xiao-Gang Wen, 生井澤寛, 福山秀敏, Patrick A. Lee, 米満賢治 (敬称略) の各先生方からは、強相関電子系について共同研究等を通して貴重なご教示をいただきました。また、小形研究室の安楽臨太郎氏には原稿に目を通していただき、貴重な

コメントを多数いただきました。この場をお借りして深く感謝いたします。

## References

- [1] Abrikosov, Gorkov, and Dzyaloshinskii, “Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics” (Dover).
- [2] Nozières, “Interacting Fermi Systems” (Addison-Wesley).
- [3] 物性における“diagrammatics”に関して, Leonid Levitov(現 MIT)の講義ノート“Zadachi po teoreticheskoj fizike s reshenijami”には秘伝の?計算術が満載されている。ロシア語で書かれているのが難点だが式を追うだけでも十分価値があると思う。プリンストンの Akakii Melikidze による文献紹介のページ <http://pupgg.princeton.edu/melikidze/lit.htmlx> から迎れば入手できる。
- [4] Kishine and Yonemitsu, Int. J. Mod. Phys. **B16**, 711 (2002).
- [5] Anderson, “Basic Notions of Condensed Matter Physics” (Addison-Wesley).
- [6] フェルミ縮重に起因する特異性一般を近藤先生は(近藤効果を含めて)「フェルミ面効果」呼ばれた。近藤 淳著『金属電子論-磁性合金を中心に』(裳華房)に関連する問題の緻密な記述がある。
- [7] Sólyom, Adv. Phys. **28**, 201 (1979), が1次元電子系の(古典的)バイブル。また, H. J. Schulz が遺した, ここで挙げ切れない膨大な講義ノートはすべて cond-mat から入手できる。1次元系を学ぶ者にとってはいずれも得がたい文献である。邦書では, 黒木一彦, 青木秀夫『多体電子論II-超伝導』(東大出版会)が情報密度が濃く有用である。
- [8] アンダーソン局在における電子相関効果については, 福山秀敏『アンダーソン局在』(物理学最前線2, 共立出版)。
- [9] Shankar, Rev. Mod. Phys. **66**, 129 (1994) が基本文献。電子系の繰り込み群処方についての懇切丁寧なレビュー。
- [10] Varma, “Singular Fermi Liquids” (cond-mat/0103393) は, フェルミ液体論から近藤問題, 局在, 高温超伝導までを実験研究を含めて150ページに凝縮したレビュー。非摂動(トポロジー)的な観点が抜けてはいるものの, 強相関電子系研究の現況を把握する上で貴重な文献。
- [11] 自己エネルギー計算の詳細については, 藤本聡「低次元フェルミ粒子系の性質」物性研究 **54-3**, 207(1990) が参考になる。
- [12] この議論に興味があれば Anderson, “The Theory of Superconductivity in the High  $T_c$  Cuprates” (Princeton), の Part II.A を参照のこと。
- [13] 例えば, Metzner, Castellani and Castro, “Fermi Systems with Strong Forward Scattering” Adv. Phys. **47**, 317 (1998), を参照のこと (cond-mat/9701012 から入手できる)。
- [14] Kopietz, “Bosonization of interacting fermions in arbitrary dimensions” (Springer) は高次元ボゾン化を主題にしたモノグラフ。
- [15] Holstein, Norton, Pincuns, Rhys. Rev. **B8**, 2649(1973); Reizer, Phys. Rev. **B40**, 11571(1989). Reizer 特異性については, [17] の12章にも記述がある。
- [16] クーロンゲージでの電磁場の温度グリーン関数は(自然単位系  $c = 1$ )  $D_{ij}^0(\vec{q}, i\omega_n) = -\langle T_\tau A_i(\vec{q}, i\omega_n) A_j(-\vec{q}, -i\omega_n) \rangle = D^0(\vec{q}, i\omega_n)(\delta_{ij} - q_i q_j / q^2)$ ,  $D^0(\vec{q}, i\omega_n) = -4\pi / (\omega_n^2 + q^2)$  (ボゾン松原振動数  $\omega_n = 2\pi nT$ , AGD[1] 第6章)。カレント演算子は  $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_P(\vec{r}) + \vec{j}_D(\vec{r})$ ,  $\vec{j}_P(\vec{r}) = \frac{ie}{2m}(\vec{\nabla}_{\vec{r}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}})_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}'} c^\dagger(\vec{r}') c(\vec{r})$ ,  $\vec{j}_D(\vec{r}) = -\frac{e^2}{m} \vec{A}(\vec{r}) c^\dagger(\vec{r}) c(\vec{r})$  である。電子と電磁場との結合は  $H_{int} = \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$  である。これより出る3点, 4点バーテックスを考慮し, 電子によってRPA的にスクリーンされた電磁場による自己エネルギーを考える。
- ところがこの場合, カレント相関関数  $K_{\mu\nu}(\vec{q}, i\omega) \equiv -\int e^{i\omega\tau} d\tau \langle T_\tau j_\mu(\vec{q}, \tau) j_\nu(-\vec{q}, 0) \rangle$  は  $\omega = 0, \vec{q} = 0$  の極限で消える, つまり普通の常伝導金属ランダウ反磁性型,  $K_{\mu\nu}(\vec{q}, i\omega) = (\chi_D q^2 + a|\omega|/q)(\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2)$  ( $\chi_D$  はランダウ反磁性磁化率,  $a$  は定数) になるため, 電磁場は“スクリーン”されずに長距離のままである[電荷揺らぎ(プラズマ振動)によるスクリーニングとの大きな違いに注意]。Reizer 特異性の起源はこの長距離性にある。



講義ノート

の手順で計算し、最後に解析接続して遅延関数にすると  $\varepsilon$  に対して特異的なこの結果が得られる。カレントの揺らぎによる比熱補正が 3, 2 次元でそれぞれ  $\Delta C_V \propto T \ln T, T^{2/3}$  となることも指摘しておく。

- [17] Tsvelik, "Field Theory in Condensed Matter Physics" (Cambridge) は非摂動的観点を強調した場の理論の現代的教科書。記述が簡潔すぎるが示唆に富む。
- [18] 経路積分に基づく有効理論解説の邦書は、永長直人『物性論における場の量子論』, 『電子相関における場の量子論』(岩波書店)。
- [19] 超伝導状態の有効理論 (GL) 導出については、崎田文二, 吉川圭二『経路積分による多自由度系の量子力学』(岩波書店) 第 11 章の記述が簡潔である。
- [20] A. M. J. Schakel, "Boulevard of Broken Symmetries[破れた対称性の小路]" (cond-mat/9805152) は非摂動的な視点を学ぶのに役立つ。
- [21] Abrikosov, Physics 2, 5 (1965). ここでの議論はパルク近似であるが、本質的に繰り込み群である。
- [22] 原論文は Mermin and Wagner, Phys. Rev. Lett. 17, 1133 (1966). 連続対称性を持つ系一般への拡張は Wagner, Z. Phys. 195, 273 (1966)。
- [23] スタンダードな教科書は, Negele and Orland, "Quantum Many-Particle Systems" (Addison-Wesley) であるが多少フォーマルすぎる。Popov, "Functional Integrals and Collective Excitations" (Cambridge) が簡潔で含蓄がある。
- [24] 2ループ自己エネルギーの計算手順は以下の通り。まずはもとの相互作用からダイアグラムが出てくるところをパネルでまとめた (notation 説明は不要と思う)。

エネルギー, 運動量を割り振ったパネル下のダイアグラムで中間状態のエネルギー分母をさらうと,

$$\begin{aligned}
 & [i(\varepsilon' + \omega) - \xi_L(k' + q)] + [i(\varepsilon - \omega) - \xi_R(k - q)] \\
 & - [i\varepsilon' - \xi_L(k')] \\
 & = i\varepsilon - v_F(k - k_F) + 2v_Fq \\
 & = G_R^{-1}(k, i\varepsilon) + 2v_Fq,
 \end{aligned}$$

である (外線のグリーン関数  $G_R^{-1}(k, i\varepsilon)$  が生の形で現れた点に注目。これは 1 次元の線形分散に由

**STEP 1. 相互作用バーテックスの対称化**

相互作用項全体にかかるマイナス [(24)式を見よ]

**STEP 2. 4本足のそれぞれに '<' か '>' を振り当てる**

など(以下 '>' は省略)

**STEP 3. 1粒子グリーン関数を繰り込む積の組合せを拾う**

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2!} \langle\langle (\text{diagram 1} + \text{diagram 2}) (\text{diagram 3} + \text{diagram 4}) \rangle\rangle \\
 & = \frac{1}{2!} 2 \langle\langle \text{diagram with labels } L^3, R^4, L^7, R^8, R_1, L_2, R_5, L_6 \rangle\rangle \\
 & = \langle\langle -g R^4 L^3 L_2 R_1 \quad -g R^8 L^7 L_6 R_5 \rangle\rangle \\
 & \text{演算子にラベルして式で書く}
 \end{aligned}$$

**STEP 4. Wick contraction**

$(-g)(-g) \langle\langle R^4 L^3 L_2 R_1 R^8 L^7 L_6 R_5 \rangle\rangle$

Wick contraction

**STEP 5. 演算子の並べ替え(Wick signの同定)**

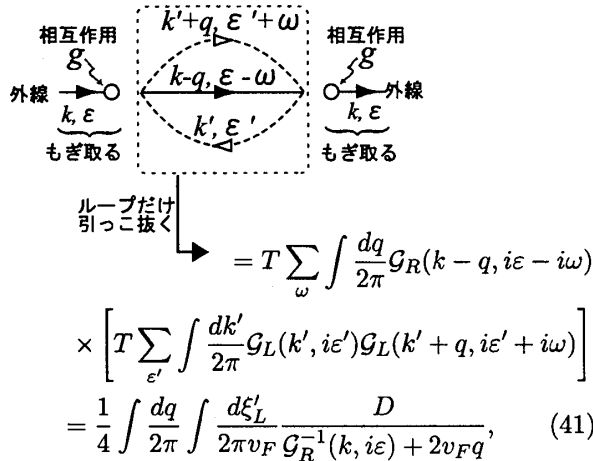
$-(-g)(-g) \underbrace{R_1 R^8}_{-g_R} \langle\langle R_5 R^4 \rangle\rangle \underbrace{\langle\langle L_2 L^7 \rangle\rangle}_{-g_L} \underbrace{\langle\langle L_6 L^3 \rangle\rangle}_{-g_L}$

↑  
グラスマン数の並べ替えから

来する決定的に重要なポイントであり, 非フェルミ液体挙動を招来する). グリーン関数の積を部分分数の和に分解し, 松原和公式

$$\begin{aligned}
 T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varepsilon_n \eta}}{i\varepsilon_n - a} &= f(a) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \frac{a}{2T} \right], \\
 T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_m \eta}}{i\omega_m - a} &= -n(a) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \coth \frac{a}{2T} \right],
 \end{aligned}$$

( $\eta$  は正の無限小数,  $\varepsilon_n = (2n + 1)\pi T$ ,  $\omega_m = 2m\pi T$  はそれぞれフェルミオン, ボゾンの松原振動数,  $f(a)$ ,  $n(a)$  はそれぞれフェルミオン, ボゾンの分布関数) を繰り返し繰り返し使うと (ダイアグラム評価のルーチンワーク),



が得られる。赤外カットオフ  $\omega$  を導入して、

$$\omega < |\xi'_L| < E_0,$$

とする。  $T \rightarrow 0$  を考えると、thermal factor  $D$  が生き残る条件 (パウリ原理) は、  $\xi_R \sim 0$  を見ているので

$$\begin{aligned} \lceil \omega < \xi'_L < E_0 \text{ かつ } \xi'_L/v_F < q < q_c \rceil \\ \implies D = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lceil -E_0 < \xi'_L < -\omega \text{ かつ } -q_c < q < \xi'_L/v_F \rceil \\ \implies D = 4, \end{aligned}$$

( $q_c$  は運動量移行  $q$  の上限カットオフであるが、積分の過程でキャンセルされて消える)。  $\xi'_L$  がこれ以外の領域にあるとパウリ原理に抵触して  $D = 0$  となる。よって (41) は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2 v_F} \left[ \int_{\omega}^{E_0} d\xi'_L \int_{\xi'_L/v_F}^{q_c} + \int_{-E_0}^{-\omega} d\xi'_L \int_{-q_c}^{\xi'_L/v_F} \right] \\ & \frac{dq}{G_R^{-1}(k, i\varepsilon) + 2v_F q} \\ & = \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} \int_{\omega}^{E_0} d\xi'_L \log \left| \frac{\xi'_L - G_R^{-1}/2}{\xi'_L + G_R^{-1}/2} \right| \\ & \sim -\frac{1}{8\pi^2 v_F^2} G_R^{-1} \log \left[ \frac{E_0}{\omega} \right], \end{aligned}$$

となる [(27) の  $\Sigma_{2\text{loop}}$  の形が導けた]。ここで、  $G_R^{-1} \ll \omega \ll E_0$  として dominant terms のみ

残した。この自己エネルギーによって繰り込まれたグリーン関数は、ダイソン方程式より

$$\tilde{G}_R(k, i\varepsilon) = \left( 1 + \theta[g] \ln \left[ \frac{E_0}{\omega} \right] \right)^{-1} G_R(k, i\varepsilon), \quad (42)$$

の形となり、準粒子ウエイト

$$z = [1 + \theta[g] \ln(E_0/\omega)]^{-1},$$

が  $\omega \rightarrow 0$  でゼロとなって非フェルミ液体になることが判る。

[25] Emery, Bruinsma and Barisic, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1039.

[26] Haldane, J. Phys. **C14**. 2585 (1981).

[27]  $K_\nu = 1$  (自由ボゾン場) 理論

$$H_\nu^{(0)} = \frac{u_\nu}{2} \int dx \left[ \frac{1}{\pi} (\partial_x \phi_\nu)^2 + \pi \Pi_\nu^2 \right],$$

に対する有限温度相関関数の公式 (master formula) は

$$\begin{aligned} & \langle e^{i\sqrt{2}\Phi_{R/L,\nu}(x,t)} e^{-i\sqrt{2}\Phi_{R/L,\nu}(0,0)} \rangle_{H_\nu^{(0)}} \\ & = \sqrt{\frac{\pm ia}{x \mp u_\nu t \pm ia}} \sqrt{\frac{(x \mp u_\nu t)/\beta u_\nu}{\sinh[(x \mp u_\nu t)/\beta u_\nu]}} \\ & \equiv \mathcal{K}_{R/L,\nu}(x, t). \end{aligned}$$

ここで  $\langle \dots \rangle_{H_\nu^{(0)}} \equiv \text{Tr}[e^{-\beta H_\nu^{(0)}}(\dots)] / \text{Tr}[e^{-\beta H_\nu^{(0)}}]$  (気持ち悪いので計算ノートを <http://magellan.ims.ac.jp/kishine/notes/bosonization2.pdf> に置いた)。さて、  $K_\nu \neq 1$  なる理論

$$H_\nu = \frac{u_\nu}{2} \int dx \left[ \frac{1}{\pi K_\nu} (\partial_x \phi_\nu)^2 + \pi K_\nu \Pi_\nu^2 \right],$$

は、係数因子だけ異なるボゾン場

$$\tilde{\phi}_\nu = \phi_\nu / \sqrt{K_\nu}, \quad \tilde{\theta}_\nu = \sqrt{K_\nu} \theta_\nu,$$

を導入 (右向き、左向きのセクターに戻って見ると、ボゴリュウボフ変換) すると自由ボゾン場理論、

$$H_\nu \rightarrow \tilde{H}_\nu^{(0)} = \frac{u_\nu}{2} \int dx \left[ \frac{1}{\pi} (\partial_x \tilde{\phi}_\nu)^2 + \pi \tilde{\Pi}_\nu^2 \right],$$

に変換できるので、上記の master formula が使える。つまり  $\langle e^{i\sqrt{2}\Phi_{R/L,\nu}(x,t)} e^{-i\sqrt{2}\Phi_{R/L,\nu}(0,0)} \rangle_{\tilde{H}_\nu^{(0)}} = \mathcal{K}_{R/L,\nu}(x, t)$ 。あと一歩、もとの右向きセクターの場  $\Phi_{R,\nu}$  が、ボゴリュウボフ変換後の右向きセクター場  $\tilde{\Phi}_{R,\nu}$ 、左向きセクター場  $\tilde{\Phi}_{L,\nu}$  で

$$\begin{aligned} \Phi_{R,\nu} & = [(\sqrt{K_\nu} + 1/\sqrt{K_\nu})\tilde{\Phi}_{R,\nu} \\ & + (\sqrt{K_\nu} - 1/\sqrt{K_\nu})\tilde{\Phi}_{L,\nu}], \end{aligned}$$

## 講義ノート

と書けることに注意する. すると, (31) より TL 模型のグリーン関数 (1 粒子相関関数) が

$$\begin{aligned} & \langle R_{\uparrow}(x, t) R_{\uparrow}^{\dagger}(0, 0) \rangle_{H_{\text{TL}}^*} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \prod_{\nu=\rho, \sigma} \langle e^{i\sqrt{2}\Phi_{R, \nu}(x, t)} e^{-i\sqrt{2}\Phi_{R, \nu}(0, 0)} \rangle_{H_{\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \prod_{\nu=\rho, \sigma} \mathcal{K}_{R, \nu}(x, t) \\ & \quad \times [\mathcal{K}_{R, \nu}(x, t) \mathcal{K}_{L, \nu}(x, t)]^{(K_{\nu} + k_{\nu}^{-1} - 2)/4}, \end{aligned}$$

と求まる.  $K_{\sigma}=1$  に注意すると, 絶対零度  $\beta \rightarrow \infty$  で (32) が得られる. 同様な計算を反復すればいろいろな相関関数をたやすく求めることができる.

- [28] 詳細は von Delft and Schoeller, “Bosonization for Beginners, Refermionization for Experts” (cond-mat/9805275) が読みやすい [メゾスコピック系 (量子細線) への応用を含む]. Fradkin, “Field Theory of Condensed Matter Systems” (Addison-Wesley) の第 4 章もよい.
- [29] Giamarchi and Schulz, Phys. Rev. **B39**, 4620(1989).
- [30] サインゴルドン模型に対する繰り込み群操作は, 最初 Wiegmann [J. Phys. C **11**, 1583 (1978)] によって議論され, Kogut のレビュー [Rev. Mod. Phys. **55**, 775 (1983)] の中でも詳細に取り扱われている. 以下コメントであるが, Wiegmann は 2 次のキュムラント展開をきちんと行っていない. 一方 Kogut は, キュムラント展開はきちんとやっているがボゾン場のスケール変換に際して同時に考慮すべき時空のスケール変換を適切に行っていない. これらを考慮して計算しなおすとこの結果になる. 計算ノートを, <http://magellan.ims.ac.jp/kishine/notes/sine-Gordon.pdf> に置いておきます.
- [31] M. Takahashi “Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models” (Cambridge University Press, 1999).
- [32] Kawakami and Yang, Phys. Lett. **A148**, 359 (1990).
- [33] 一般の整合フィリングのウムクラップの議論は, Schulz, cond-mat/9412036, の第 3 節を見よ. この文献は, 1 次元系のレビューとしても秀逸.
- [34] Seo and Fukuyama, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 1249 (1997).
- [35] 梯子系については Dagotto and Rice, Science **271**, 618 (1996) とその中の文献参照.
- [36] Itoh and Yasuoka, J. Phys. Soc. Jpn **66**, 334 (1997).
- [37] Uehara *et al*, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 2764 (1996).
- [38] Fabrizio, Phys. Rev. **B48**, 15838 (1993).
- [39] ボゾン化による 1 ループ繰り込み群解析は Giamarchi and H. J. Schulz, Phys. Rev. **B37**, 325 (1988). モット絶縁体とアンダーソン絶縁体間の量子相転移については Fujimoto and Kawakami, Phys. Rev. **B54**, 11018 (1996). フェルミオンのままでの 2 ループ繰り込み群解析は Kishine and Yonemitsu, Phys. Rev. **B62**, 13323 (2000).
- [40] 次元クロスオーバー問題への (経路積分に基づく) 繰り込み群の適用はブルボネらが創始したもので, ここでの記述は彼らのフォーミュレーションに従ったものである. 原論文は, Bourbonnais and Caron, Int. J. Mod. Phys. **B5**, 1033 (1991).
- [41] Scalapino, Imry and Pincus, Phys. Rev. **B11**, 2042 (1975).
- [42] Kishine and Yonemitsu, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 1714 (1998).
- [43] Yakovenko, JETP Lett. **56**, 510 (1992).
- [44] Gogolin, Nersesyan and Tselik, “Bosonization and Strongly Correlated Systems” Cambridge University Press, 1998 はボゾン化の数理と物理を広く扱っている. 第 17 章で TL 液体の不安定性が議論されている.
- [45] Tsuchiizu and Suzumura, Phys. Rev. **B59**, 12326 (1999).
- [46] Boies, Bourbonnais and Tremblay, Phys. Rev. Lett. **74**, 968 (1995).
- [47] Clarke and Strong, Adv. Phys. **46**, 545 (1997).
- [48] Sakai and Takahashi, J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 3131 (1989).
- [49] 有機導体の物理への指南書は, 鹿兒島誠一『低次元導体-有機導体の多彩な物理と密度波-』(裳華房) および Ishiguro, Saito and Yamaji, “Organic Superconductors” (Springer Series in Solid-State Sciences, 88) (1998).
- [50] TM 系の解説として, 中村敏和, 高橋利宏「有機導体の NMR」固体物理 **32**, 929 (1997), が情報密度濃く有用.
- [51] Itoh, Kanoda, Hiraki and Takahashi, Synth. Met. **120**, 845 (2001).
- [52] Schulz, Europhys. Let. **4**, 609 (1987).
- [53] 現時点では完全な “open problem” なので, (パイアスなしに) 文献を挙げるのは不可能と思われる.