量子測定理論入門

名古屋大学大学院情報科学研究科 小 澤　正 直

概 要

有限次元の状態空間をもつ量子力学系に対する測定で，可能な測定値が有限個の測定の一般論を解説する．理論の展開は公理的な方法を用い，（射影仮説を含まない）少数の量子力学の基本原理と測定に関する自明な仮説から理論を演繹する．測定理論に不可欠なPOVMや完全正値インストルメント等の数学的方法は，それらの自明性の高い基本仮説から理論の結論として導かれ，数学的道具を出発点に理論を展開する方法はとらない．目標の一つは，それらの数学的方法が概念的に極めて堅固な基礎の上に打ち立てられていることを明らかにすることである．この方法の利点の一つは，物理的に可能な測定の全体を数学的に特徴付けることを可能にすることで，最適測定の特徴付けや測定誤差と擾乱とのトレードオフなど究極的な限界を導くための方法論を提供する．一つの応用として，Heisenbergがガンマ線顕微鏡を用いて提案したような測定精度と擾乱の間の関係を考察し，新たな普遍的な関係の導出を目標とする．

1　量子力学

有限準位の量子力学系に関する公理系は次のように与えられる．

公理 Q1 (量子力学系，状態，物理量). 各量子力学系には状態空間と呼ばれる有限次元 Hilbert 空間が対応し，系の状態は状態空間上の密度作用素で表現され，系の物理量は状態空間上の自己共役作用素で表現される．また，すべての密度作用素はある状態に対応し，すべての自己共役作用素はある物理量に対応する．

公理 Q1 から，以下，状態と状態空間上の密度作用素，物理量と状態空間上の自己共役作用素を同一視する．$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ の形の状態を純粋状態といい，状態 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ にあるとき，系は（ベクトル）状態 ψ にあるという．

公理 Q2 (Born 統計公式). 原理的に，任意の状態で一つの系 S の任意の物理量を一つ正確に測定することが可能であり，系が状態 ρ にあるとき物理量 A を正

確に測定すると，測定値 $\mathbf{x}$ が x である確率 $\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}$ は Born の統計公式

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}=\mathrm{Tr}[E^A(x)\rho] \tag{1}$$

で与えられる．ただし，$E^A(x)$ は部分空間 $\{\psi\in\mathcal{H}|A\psi=x\psi\}$ の上への射影作用素を表す．

写像 $E^A: x\mapsto E^A(x)$ は A のスペクトル測度と呼ばれる [1]. 公理 Q2 から，測定値の平均値 $\langle A\rangle$ と標準偏差 $\sigma(A)$ は，

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}[A\rho] \tag{2}$$

及び

$$\sigma(A)^2=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2 \tag{3}$$

で与えられる．同一の状態で二つの物理量 A,B の正確な測定をそれぞれ異なる系（統計集団）について行なう場合のそれぞれの測定値の標準偏差は，Robertson の不等式

$$\sigma(A)\sigma(B)\geq\frac{1}{2}\langle|[A,B]|\rangle \tag{4}$$

を満たす．

公理 Q3 (時間発展の公式). 各量子力学系には，Hamiltonian と呼ばれる物理量 H が存在して，時刻 t_1 から時刻 t_2 まで系が孤立系ならば，時刻 $t\in(t_1,t_2)$ において微分方程式

$$i\hbar\frac{d\rho(t)}{dt}=[H,\rho(t)] \tag{5}$$

を満たす状態 $\rho(t)$ にある．ここで，$\hbar$ は所与の単位系における Planck 定数を 2π で割った値を表す．

公理 Q4 (合成系). $\mathcal{H}$ を状態空間とする系 $\mathbf{S}_1$ と $\mathcal{K}$ を状態空間とする系 $\mathbf{S}_2$ の合成系 $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$ の状態空間はテンソル積 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ で与えられ，$\mathbf{S}_1$ の物理量 A は $\mathbf{S}$ の物理量 $A\otimes I$ と同一視され，$\mathbf{S}_2$ の物理量 B は $\mathbf{S}$ の物理量 $I\otimes B$ と同一視される．

2 測定装置の統計的性質

2.1 出力分布

公理 M1 (出力分布，量子状態収縮). 系 $\mathbf{S}$ を測定する装置は，測定直前の系 $\mathbf{S}$

の状態に依存してその測定値の確率分布を定め，測定直前の系 S の状態と生起可能な測定値に依存して測定直後の状態を定める．

各装置の測定値を表す変数を**出力変数**と呼ぶ．S を状態空間 $\mathcal{H}$ で記述される量子力学系とし，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を出力変数 $\mathbf{x}$ を持ち，系 S を測定する装置とする．系 S を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の（測定）対象と呼ぶ．以下では，出力変数 $\mathbf{x}$ は数直線 $\mathbf{R}$ に値を持つとする．任意の実数 $x \in \mathbf{R}$ に対して，“$\mathbf{x} = x$” によって，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定値が x であるという**測定結果** を表わす．公理 M1 から，出力変数 $\mathbf{x}$ の確率分布は対象の測定直前の状態 ρ によって決定されるので，それを $\Pr\{\mathbf{x} = x\|\rho\}$ で表し，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**入力状態** ρ における**出力分布**と呼ぶ．状態 ρ がベクトル状態 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ のとき，$\Pr\{\mathbf{x} = x\|\psi\} = \Pr\{\mathbf{x} = x\|\rho\}$ と表す．

この講義では，出力分布は次の条件を満たすと仮定する．

(i) **正値性：**任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して，$\Pr\{\mathbf{x} = x\|\rho\} \geq 0$.

(ii) **単位性：**$\sum_{x\in\mathbf{R}} \Pr\{\mathbf{x} = x\|\rho\} = 1$.

(iii) **有限性：**ある有限集合 S が存在して，任意の状態 ρ に対して，$x \notin S$ ならば $\Pr\{\mathbf{x} = x\|\rho\} = 0$.

2.2 量子状態収縮

公理 M1 から，入力状態 ρ と測定値 $\mathbf{x} = x$ に対して，$\Pr\{\mathbf{x} = x\|\rho\} > 0$ ならば，測定直後の状態が定まるので，それを $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ と表し，入力状態 ρ に対する，条件 $\mathbf{x} = x$ の下での**（条件付き）出力状態**と呼ぶ．$\Pr\{\mathbf{x} = x\|\rho\} = 0$ である x に対して，記号 $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ は不定な密度作用素を表すとする．また，状態 ρ から 状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ への状態変化を**量子状態収縮**と呼ぶ．

状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ の操作的な意味は，以下のように与えられる．入力状態 ρ における装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定後に直ちに出力変数 $\mathbf{y}$ をもつ別の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ による測定を引き続いて行なったとする．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定値が $\mathbf{x} = x$ であるという条件の下での装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の測定値が $\mathbf{y} = y$ であるという条件付き確率を $\Pr\{\mathbf{y} = y|\mathbf{x} = x\|\rho\}$ と表す．すると，条件 $\mathbf{x} = x$ の下で装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ による測定の直前の状態は，$\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ である．従って，

$$\Pr\{\mathbf{y} = y|\mathbf{x} = x\|\rho\} = \Pr\{\mathbf{y} = y\|\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\} \tag{6}$$

が成り立つ．

2.3　結合出力分布の混合則

もし，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による入力状態 ρ における測定の直後に装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ による測定が行なわれたとすると，式 (6) から出力変数 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の結合確率分布 $\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\}$ が

$$\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\}=\Pr\{\mathbf{y}=y\|\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\}\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} \tag{7}$$

によって与えられる．従って，２つの装置を引き続き適用して得られる測定値の結合確率分布は，第１の装置への入力状態だけで決定される．この結合確率分布を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の**結合出力分布**と呼ぶ．結合出力分布は次の性質を持つことを要請する．

公理 M2 **(結合出力分布の混合則).** 任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 及び $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ に対して，関数 $\rho\mapsto\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\}$ は，任意の実数の組 x,y に対して密度作用素 ρ の凸線形関数である．

つまり，

$$\begin{aligned}&\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|p\rho_1+(1-p)\rho_2\}\\&\quad= p\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho_1\}+(1-p)\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho_2\}\end{aligned} \tag{8}$$

が成り立つ．ここで，ρ_1,ρ_2 は密度作用素を表し，p は $0<p<1$ を満たす．

この公理は次のように正当化される．対象 $\mathbf{S}$ と同等の系からなり，密度作用素 ρ_1 で表される統計集団 $\mathbf{E}_1$ と密度作用素 ρ_2 で表される統計集団 $\mathbf{E}_2$ があるとし，対象 $\mathbf{S}$ が確率 p で統計集団 $\mathbf{E}_1$ から選ばれ，確率 $1-p$ で統計集団 $\mathbf{E}_2$ から選ばれたとすると，測定値 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x,y)$ が得られる確率は右辺で表される．一方，この時，対象 $\mathbf{S}$ の状態は密度作用素 $p\rho_1+(1-p)\rho_2$ で表されるから，測定値 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x,y)$ が得られる確率は左辺でも表され，それらは一致しなければならない．

２つの装置は，それらが任意の入力状態において同一の出力分布を持ち，更に，任意の測定値に対して同一の出力状態を持つとき，**統計的に同値** であると言う．

2.4　確率作用素測度

式 (7) の両辺で y についての総和をとると，出力分布 $\Pr\{\mathbf{y}=y\|\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\}$ の単位性から

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}=\sum_{y\in\mathbf{R}}\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\} \tag{9}$$

が得られ，右辺は ρ の凸線形関数の和だから，左辺も ρ の凸線形関数である．従って，次の定理を得る．

定理 2.1 (出力分布の混合則) 任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ と実数 $x \in \mathbf{R}$ に対して，対応 $\rho \mapsto \Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}$ は，密度作用素 ρ の凸線形関数である．

出力分布を特徴付けるために，次の定義を導入する．数直線 $\mathbf{R}$ から $\mathcal{H}$ 上の線形作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への写像 $\Pi : \mathbf{R} \mapsto \Pi(x)$ は，次の条件を満たすとき，**（有限）確率作用素測度**（probability operator-valued measure, POVM）と呼ばれる：

(i) **正値性**：すべての実数 $x \in \mathbf{R}$ について $\Pi(x) \geq 0$.

(ii) **単位性**：$\sum_{x\in\mathbf{R}} \Pi(x) = 1$.

(iii) **有限性**：ある有限集合 S が存在して，$x \notin S$ ならば $\Pi(x) = 0$.

上の定理からの重要な結論は，出力分布の次の特徴付けである [2].

定理 2.2 公理 *M1* の下で，定理 *2.1* が成立することは，次の命題の成立と同等である：

任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に *POVM* Π が一意に対応して，対象の任意の状態 ρ と任意の実数 $x \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} = \mathrm{Tr}[\Pi(x)\rho] \tag{10}$$

が成り立つ．

(10) 式で定義される POVM Π を**装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM** と呼ぶ．

A を系 $\mathbf{S}$ の物理量とする．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が入力状態 ρ において物理量 A に関する **Born 統計公式 (BSF)** を満たすとは，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} = \mathrm{Tr}[E^A(x)\rho] \tag{11}$$

が任意の $x \in \mathbf{R}$ について成り立つことを言う．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 A を**正確に測定する**とは，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が A に関する BSF を任意の入力状態で満たすことを言う．

公理 Q2 から，$\mathbf{S}$ の任意の物理量 A に対して，それを正確に測定する装置が存在する．式 (10) 及び 式 (11) から，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量を正確に測定するための必要十分条件は，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM Π が A のスペクトル測度 E^A に一致することである．

2.5　量子インストルメント

任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して写像 $\mathcal{I}(x):\rho\mapsto\mathcal{I}(x)\rho$ を

$$\mathcal{I}(x)\rho=\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}} \tag{12}$$

によって定義する．ここで，ρ は密度作用素を，x は実数を表す．写像 $\mathcal{I}(x)$ は，任意の密度作用素 ρ をトレースが $\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}$ である正値作用素に写像する．結合出力分布の混合則から $\mathcal{I}(x)$ は密度作用素のなす凸集合から $\mathcal{H}$ 上の作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への凸線形写像であり，$\mathcal{H}$ 上の作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の線形写像に一意的に拡張される [3, 4]．Davies と Lewis は，測定装置の統計的性質の系統的記述のために次の数学的概念を導入した [5, 6]．$\mathbf{R}$ から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の線形写像の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ への写像 $\mathcal{I}:x\mapsto\mathcal{I}(x)$ は，次の条件が満たされるならば **インストルメント** と呼ばれる．

(i) **正値性：**$\mathcal{I}(x)\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ は，任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の 正作用素 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ を正作用素 $\mathcal{I}(x)A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ に写像する．

(ii) **単位性：**$\sum_{x\in\mathbf{R}}\mathcal{I}(x)$ はトレースを保存する．

(iii) **有限性：**ある有限集合 S が存在して，$x\notin S$ ならば $\mathcal{I}(x)=0$．

この時，次の定理が成り立つ [4, 7]．

定理 2.3 公理 *M1* の下で，公理 *M2* は，次の命題の成立と同等である：

任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，一意的にインストルメント $\mathcal{I}$ が存在して，任意の $x\in\mathbf{R}$ と任意の密度作用素 ρ に対して 式 *(12)* を満たす．

上で与えられた写像 $\mathcal{I}(x)$ は，**$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定値 $\mathbf{x}=x$ に対するオペレーション**と呼ばれる．また，写像 $\mathcal{I}$ は，**装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメントと呼ばれる．**この時，出力分布と出力状態は，

$$\begin{aligned}\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} &= \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(x)\rho], &(13)\\ \rho_{\{\mathbf{x}=x\}} &= \frac{\mathcal{I}(x)\rho}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(x)\rho]} &(14)\end{aligned}$$

と表される．ここで，第2の関係は，$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}>0$ を仮定している．従って，もし，$\mathcal{I}_{\mathbf{x}}$ 及び $\mathcal{I}_{\mathbf{y}}$ がそれぞれ $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 及び $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ のインストルメントならば，結合出力分布は，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\}=\mathrm{Tr}[\mathcal{I}_{\mathbf{y}}(y)\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x)\rho] \tag{15}$$

と表すことができる．ここで，ρ は状態，x, y は実数を表す．装置の出力分布と出力状態はともにそのインストルメントによって決定される．従って，2つの装置が統計的に同値であるための必要十分条件は，それらが同一のインストルメントを持つことである．

$\mathcal{H}$ 上の作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の任意の線形写像 T の**双対**とは，$\mathcal{H}$ 上の線形写像の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の線形写像 T^* で任意の $A, \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して

$$\mathrm{Tr}[A(T\rho)] = \mathrm{Tr}[(T^*A)\rho] \tag{16}$$

を満たすものである．オペレーション $\mathcal{I}(x)$ の双対 $\mathcal{I}(x)^*$ は，**測定値** $\mathbf{x} = x$ **に対する双対オペレーション** と呼ばれる．

双対オペレーション $\mathcal{I}(x)^*$ を恒等作用素 I に適用することによって得られる作用素 $\mathcal{I}(x)^*I$ は，**オペレーション** $\mathcal{I}(x)$ **のエフェクト**と呼ばれる．式 (13) 及び式 (16) より

$$\Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} = \mathrm{Tr}[(\mathcal{I}(x)^*I)\rho] \tag{17}$$

を得る．ここで，ρ は任意だから，式 (10) と比較すると, 任意の実数 x に対して

$$\Pi(x) = \mathcal{I}(x)^*I \tag{18}$$

が得られる．従って，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM は，インストルメント $\mathcal{I}$ のエフェクトによって決定される．

$\mathcal{I}_{\mathbf{x}}$ 及び $\mathcal{I}_{\mathbf{y}}$ をそれぞれ装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 及び $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ のインストルメントとし，$\Pi_{\mathbf{y}}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の POVM とする．すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\mathcal{I}_{\mathbf{y}}(y)\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x)\rho] &= \mathrm{Tr}\{[\mathcal{I}_{\mathbf{y}}(y)^*I][\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x)\rho]\} \\ &= \mathrm{Tr}\{[\Pi_{\mathbf{y}}(y)[\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x)\rho]\} \\ &= \mathrm{Tr}\{\mathcal{I}(x)^*[\Pi_{\mathbf{y}}(y)]\rho\}\end{aligned} \tag{19}$$

が得られる．従って，結合出力分布は，任意の実数 $x, y \in \mathbf{R}$ に対して

$$\Pr\{\mathbf{x} = x, \mathbf{y} = y \| \rho\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{I}(x)^*[\Pi_{\mathbf{y}}(y)]\rho\} \tag{20}$$

と表される．

2.6 選択的量子状態収縮

数直線 $\mathbf{R}$ の部分集合 Δ に対して，測定結果 “$\mathbf{x} \in \Delta$” は測定値が Δ の元であることを表す．測定結果 $\mathbf{x} \in \Delta$ の確率は，

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \sum_{x \in \Delta} \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} \tag{21}$$

で与えられる．入力状態が ρ であるとき，測定結果 $\mathbf{x} \in \Delta$ の下での測定直後の状態を $\rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ と表す．この状態は，次のように決定される．状態 $\rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ において，POVM $\Pi_{\mathbf{y}}$ をもつ別の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ で引き続いて測定を行うとすれば，

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} = y \| \rho\} &= \Pr\{\mathbf{y} = y \| \rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}\} \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} \\ &= \mathrm{Tr}[\Pi_{\mathbf{y}}(y) \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} \rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}] \end{aligned} \tag{22}$$

が得られる．一方，式 (7) から

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} = y \| \rho\} &= \sum_{x \in \Delta} \Pr\{\mathbf{x} = x, \mathbf{y} = y \| \rho\} \\ &= \sum_{x \in \Delta} \Pr\{\mathbf{y} = y \| \rho_{\{\mathbf{x} = x\}}\} \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} \\ &= \mathrm{Tr}[\Pi_{\mathbf{y}}(y) \sum_{x \in \Delta} \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} \rho_{\{\mathbf{x} = x\}}] \end{aligned} \tag{23}$$

が得られる．ここで， $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ が任意の射影作用素 E を測定する装置とし，$y = 1$ とすれば，$\Pi_{\mathbf{y}}(y) = E$ となる．E は任意だから，式 (22) と 式 (23) を比較して，

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} \rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \sum_{x \in \Delta} \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} \rho_{\{\mathbf{x} = x\}} \tag{24}$$

が得られる．任意のインストルメント $\mathcal{I}$ と $\mathbf{R}$ の部分集合 Δ に対して，

$$\mathcal{I}(\Delta) = \sum_{x \in \Delta} \mathcal{I}(x) \tag{25}$$

と定義する．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメントを $\mathcal{I}$ とすると，任意の状態 ρ に対して，

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} \rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} \tag{26}$$

を満たす．$\mathcal{I}(\Delta)$ は，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**測定結果 $\mathbf{x} \in \Delta$ に対するオペレーション**と呼ばれる．状態 ρ から状態 $\rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ への状態変化を**選択的量子状態収縮**と呼ぶ．一方，状態変化 $\rho \mapsto \rho_{\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}\}}$ は，**非選択的量子状態収縮**と呼ばれる．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメント $\mathcal{I}$ に対して，オペレーション $T = \mathcal{I}(\mathbf{R})$ を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**非選択的オ**

ペレーションと呼び，$T^* = \mathcal{I}(\mathbf{R})^*$ を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**非選択的双対オペレーション**と呼ぶ．一般に，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の線形写像 T は，$\rho \geq 0$ ならば $T\rho \geq 0$ となるとき，正値写像であると言う．$\mathcal{I}$ がインストルメントならば $\mathcal{I}(\Delta)$ は正値写像である．非選択的オペレーションは，トレースを保存する正値写像であり，非選択的双対オペレーションは，単位元（恒等作用素）を保存する正値写像である．すなわち，

$$\mathrm{Tr}[T\rho] = \mathrm{Tr}\rho \tag{27}$$

が任意の作用素 ρ について成り立ち，また，

$$T^* I = I \tag{28}$$

が成り立つ．

2.7 完全正値性

物理学では，時空間で生起する現象を数学モデルの言葉で書き表すことにより，現象を数量化し，それを予測したり，測定によって検証することができるようになる．すると，単一の理論においても同一の現象を多くの異なる数学モデルで記述することが一般に可能である．けれども，同一の現象を表している限りそれらの間に，ある整合性の関係が成り立たなければならない．例えば，座標変換に対する不変性など，多くの場合，その関係から重要な物理法則が導かれる．測定理論の場合には，座標系を固定しても同一の測定装置が，いくつかの異なるモデルを持つことが可能である．それは，測定対象の空間的境界の任意性から来る．合成系の公理 Q4 で述べられたように，系 $\mathbf{S}$ に含まれる物理量 A と同一の物理量が，系 $\mathbf{S}$ を部分系として含む任意の合成系 $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ の中で異なる数学的表現 $A \otimes I$ を持つ．すると，系 $\mathbf{S}$ の物理量 A を測定する装置は，合成系 $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ の物理量 $A \otimes I$ を測定する装置として，異なる数学モデルによって記述されることになる．つまり，系 $\mathbf{S}$ を測定する装置のモデルは，常に，系 $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ を測定する装置のモデルを伴っている．興味深いことに，このようなやや自明なことから，測定装置のモデルが持つべき重要な性質が導かれる．そこで，このことを一般的に公理として述べると，次のように表現できる．

公理 M3 (自明的拡張可能性). 状態空間 $\mathcal{H}$ を持つ系 $\mathbf{S}$ を測定する任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，$\dim(\mathcal{H}') \geq \dim(\mathcal{H})$ を満たす状態空間 $\mathcal{H}'$ を持つ系 $\mathbf{S}'$，及び，系

$\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ を測定する装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ が存在して，$\mathcal{H}$ 上の任意の密度作用素 ρ と $\mathcal{H}'$ 上の任意の密度作用素 ρ' に対して，次の関係が成り立つ．

(i) $\Pr\{\mathbf{x}'=x\|\rho\otimes\rho'\}=\Pr\{\mathbf{x}=x'\|\rho\}$.

(ii) $(\rho\otimes\rho')_{\{\mathbf{x}'=x\}}=\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\otimes\rho'$.

公理 M3 は次の様に正当化される．まず，われわれの理論における用語法では，「装置」というときに，物理的装置それ自体を指示するというより，むしろ，「装置の数学モデル」を指示しているということに注意すべきである．これまでの公理では，そのことを十分に区別する必要がなかったが，ここでは，その区別が重要である．そこで， 装置モデル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が表す物理的な測定装置があるとし，それが系 $\mathbf{S}$ に対する測定を行なう装置だと見なされるならば，その同一の物理的装置を，遠く離れたと見なされる系 $\mathbf{S}'$ との合成系 $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ に対する測定を行なう装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ だと記述することもできる．ここで，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ はそれぞれの装置モデルの出力変数を表すが，実際には，常に同じ値を示す同じ変数である．測定の直前に，それらの系が統計的に独立で，それぞれの状態が ρ,ρ' だとする．この場合，系 $\mathbf{S}'$ の存在は，測定結果および測定後の状態に何の影響も与えない．従って，２つのモデルの間に上で述べた (i), (ii) の関係が成立する筈である．このことから公理 M3 が正当化される．

さて，公理 M1,M2 から，すべての装置モデルはインストルメントに対応することがわかったが，果たして，それは公理 M3 を自動的に満たしているであろうか．実は，公理 M1,M2 だけからは，公理 M3 が数学的に導かれないことを示すことができる．

$\mathcal{H}'$ を有限次元 Hilbert 空間とすると，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の任意の線形写像 T は，任意の $\rho_j\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 及び $\rho'_j\in\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ に対する関係

$$(T\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{H}'})(\sum_j\rho_j\otimes\rho'_j)=\sum_j(T\rho_j)\otimes\rho'_j \tag{29}$$

によって，自然に $\mathcal{L}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}')=\mathcal{L}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ 上の線形写像 $T\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{H}'}$ に拡張される．ただし，$\mathrm{id}_{\mathcal{H}'}$ は，$\mathcal{H}'$ 上の恒等写像を表す．

そこで，装置モデル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，上の (i), (ii) を満たす装置モデル $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ が存在すると仮定する．公理 M1,M2 からそれぞれのインストルメント $\mathcal{I}_{\mathbf{x}},\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}$ が存在する． すると，(i), (ii) から

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}(x)(\rho\otimes\rho') &= \Pr\{\mathbf{x}'=x\|\rho\otimes\rho'\}(\rho\otimes\rho')_{\{\mathbf{x}'=x\}}\\ &= \Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\otimes\rho'\end{aligned}$$

$$= \quad [\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x)\rho] \otimes \rho' \tag{30}$$

が導かれる．ここで，ρ, ρ' は密度作用素であるが，$\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x), \mathcal{I}_{\mathbf{x}'}(x)$ の線形性から，任意の $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 及び $\rho' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ についても式 (30) が成立する．すると，再び $\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x), \mathcal{I}_{\mathbf{x}'}(x)$ の線形性から，任意の $\rho_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 及び $\rho'_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ に対して，

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}(x)(\sum_j \rho_j \otimes \rho'_j) = \sum_j [\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x)\rho_j] \otimes \rho'_j \tag{31}$$

が成り立つ．従って，公理 M3 を認めると

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}(x) = \mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}'} \tag{32}$$

が成り立たなければならない．つまり，自明的拡張で得られる装置のインストルメント $\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}$ は一意に定まる．

さて，n 次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}'$ に対して，$T \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}'}$ が正値写像になるとき，T は **n-正値写像**であると言う．すると，$n+1$-正値写像は，n-正値写像になる．$n=1$ のときは，通常の正値写像のことを意味するので，これは，正値写像の概念を強めたことになる．そこで，任意の自然数 n について n-正値写像となる T のことを**完全正値写像**と言う．もし，$n \geq \dim(\mathcal{H})$ ならば $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の n-正値写像は，完全正値写像になることが知られている．2-正値写像にならない，従って，完全正値写像にならない正値写像の例としては，与えられた基底に関する転置写像が知られている．$\{\phi_j\}$ を一つの正規直交基底とすると，これに関する転置写像 T は，

$$T(|\phi_j\rangle\langle\phi_k|) = |\phi_k\rangle\langle\phi_j| \tag{33}$$

によって定義される．以上の議論を纏めると次のようになる．

インストルメント $\mathcal{I}$ は，すべての $x \in \mathbf{R}$ について $\mathcal{I}(x)$ が 完全正値ならば**完全正値** と呼ばれる．公理 M3 を認めると，式 (32) から装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメント $\mathcal{I}_{\mathbf{x}}$ は，完全正値でなければならないという結論が導かれる．つまり，インストルメント $\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}$ の性質から， $\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}(x)$ は正値写像であり，従って，$\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(x) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}'}$ が正値写像だから，$n = \dim(\mathcal{H}')$ とすれば， $\mathcal{I}_{\mathbf{x}'}(x)$ は n-正値である．ここで，$\dim(\mathcal{H}') \geq \dim(\mathcal{H})$ だから，$\mathcal{I}_{\mathbf{x}}$ は完全正値インストルメントである．以上の議論から，次の定理が得られた．

定理 2.4 公理 *M1,M2* の下で定められる装置のインストルメントは，公理 *M3* の下で，完全正値インストルメントでなければならない．

完全正値ではないインストルメントの例は，$\{p(x)\}$ を $\mathbf{R}$ 上の有限確率分布，T を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上のある基底に関する転置写像とすれば，

$$\mathcal{I}(x)\rho = p(x)T\rho$$

によって与えられる．従って，公理 M1,M2 から公理 M3 を導くことはできない．

任意のインストルメント $\mathcal{I}$ に対して，$\Pi(x) = \mathcal{I}(x)^* I$ とおくと POVM Π が得られる．これを**インストルメント $\mathcal{I}$ の POVM** と呼ぶ．逆に，任意の POVM Π に対して，ある完全正値インストルメント $\mathcal{I}$ が存在して，Π は 完全正値インストルメント $\mathcal{I}$ の POVM となる．公理 M3 の下で，非選択的オペレーションはトレース保存的完全正値写像であり，双対非選択的オペレーションは単位保存的完全正値写像である．

ここまで，すべての装置が満たすべき必要条件として，結合出力分布の混合則と自明的拡張可能性という 2 つの要請を課した．これらの条件の下で，すべての装置に対して一意的に，出力分布とその装置によって引き起こされる量子状態収縮を決定する完全正値インストルメントが対応することを示した．従って，ある装置によって可能な出力分布と量子状態収縮を決定する問題は，どの完全正値インストルメントがある装置に対応しているのという問題に帰着される．この問題は，次節で議論され，すべての完全正値インストルメントに対して少なくとも一つの装置が対応していることが示される．また，すべての POVM に対して少なくとも一つの完全正値インストルメントが存在するので，すべての POVM に対して少なくとも一つの装置が対応することも導かれる．

3 測定過程論

3.1 局所測定定理

$\mathbf{S}_1$ を Hamiltonian H_1 を持ち，状態空間 $\mathcal{H}_1$ で記述される量子系とし，$\mathbf{S}_2$ を Hamiltonian H_2 を持ち，状態空間 $\mathcal{H}_2$ で記述される量子系とする．A を系 $\mathbf{S}_1$ の物理量とし，B を系 $\mathbf{S}_2$ の物理量とする．合成系 $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$ の初期状態を ρ_{12} とする．物理量 A を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ により時刻 t で測定し，物理量 B を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ により時刻 s で測定すると仮定する．ただし， $0<t<s$ で，時刻 0 以降は $\mathbf{S}_1$ と $\mathbf{S}_2$ の間に相互作用はないとする．この測定の測定値の結合確率分布を $\Pr\{\mathbf{x}=x, \mathbf{y}=y\|\rho_{12}\}$ とする．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定が $\mathbf{S}_1$ において**局所的**であるとは，任意の ρ_{12} に対

して

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}, \mathbf{y} = y \| \rho_{12}\} = \Pr\{\mathbf{y} = y \| \rho_{12}\} \tag{34}$$

が成り立つことを言う．このとき次の定理が得られる [8].

定理 3.1 (局所測定定理) 装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による物理量 A の測定が $\mathbf{S}_1$ において局所的であれば，結合確率分布は，

$$\Pr\{\mathbf{x} = x, \mathbf{y} = y \| \rho_{12}\} = \mathrm{Tr}[E^{A(t)}(x) \otimes E^{B(s)}(y)\rho_{12}] \tag{35}$$

によって与えられる．ただし，$A(t) = e^{iH_1 t/\hbar} A e^{-iH_1 t/\hbar}$ かつ $B(s) = e^{iH_1 s/\hbar} B e^{-iH_1 s/\hbar}$ とおいた．

3.2 間接測定のモデル

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を出力変数 $\mathbf{x}$ を持ち，対象 $\mathbf{S}$ を測定する装置とする．この装置で実行される測定の過程に関する次の記述を考える．測定相互作用は，**測定の時刻**と呼ばれる時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ まで対象 $\mathbf{S}$ と装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の間に挿入されるとする．ここで，**対象と装置は t 以前にも $t + \Delta t$ 以後にも互いに相互作用を行なわず，時間区間 $(t, t + \Delta t)$ の間，合成系 $\mathbf{S} + \mathbf{A}(\mathbf{x})$ は孤立系である**とする．**プローブ $\mathbf{P}$** は，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の部分系で，合成系 $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ が時間区間 $(t, t + \Delta t)$ において孤立系であるような最小のものとする．最小性から妥当だと考えられるが，プローブ $\mathbf{P}$ は，あるヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ で表現される量子力学系であると仮定する．U を時間区間 $(t, t + \Delta t)$ における $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ の時間発展を表す $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素とする．測定の時刻に対象は任意の入力状態 ρ にあり，プローブは入力状態によらない一定の状態 σ に準備されるとする．従って，合成系 $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ は，時刻 t において状態 $\rho \otimes \sigma$ にあり，時刻 $t + \Delta t$ において状態 $U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger$ にある．測定相互作用の直後に，対象は装置から分離される．測定の次の段階は，**メータ物理量**と呼ばれるプローブの物理量 M を局所的に測定することであり，その測定値が装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の出力変数の値として記録される．

このように装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ 上の密度作用素 σ, $\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U，及び，$\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素 M からなる $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**測定過程**と呼ばれる 4 つ組 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ で記述される．ここで，$\mathcal{K}$ はプローブの状態空間，σ はプローブの状態準備，U は，プローブと対象の合成系の時間発展，M は，メータ物理量を表す．測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ は，σ が純粋状態ならば，**純粋**であると言い，$\rho = |\xi\rangle\langle\xi|$ ならば $(\mathcal{K}, \xi, U, M) = (\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ と表す．

3.3　出力分布

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ をもつ装置とする．この測定の測定値は時刻 $t+\Delta t$ におけるメータ物理量 M の測定で与えられるので，状態 $U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger$ における物理量 M に対する BSF により，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の出力分布は，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} = \mathrm{Tr}\{[I\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\} \tag{36}$$

によって決定される．オペレーションとトレースの線形性により，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の出力分布は出力分布の混合則を満たすことが容易に知られる．従って，定理 2.2 から $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM Π が存在する．Π を決定するために, $\mathcal{K}$ 上の部分トレース $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}$ を用いて，式 (36) を

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} = \mathrm{Tr}[\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{U^\dagger[I\otimes E^M(x)]U(I\otimes\sigma)\}\rho] \tag{37}$$

と書き直すことができる．ρ は任意なので，式 (10) と式 (37) を比較して, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM が

$$\Pi(x) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{U^\dagger[I\otimes E^M(x)]U(I\otimes\sigma)\} \tag{38}$$

によって決定する．ただし, x は任意の実数を表す.

3.4　量子状態収縮

合成系 $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ は，時刻 $t+\Delta t$ において状態 $U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger$ にあるので，標準的な議論から時刻 $t+\Delta t$ における対象の状態は，その状態のプローブの部分に関する部分トレースをとることによって得られる．従って，非選択的量子状態収縮は,

$$\rho\mapsto\rho' = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger] \tag{39}$$

によって決定される.

装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ によって引き起こされる選択的状態収縮を決定するために，時刻 $t+\Delta t$ に観測者は，同一の系 $\mathbf{S}$ の任意の物理量 B を局所的に測定するとしよう．$\mathbf{A}(\mathbf{y})$ を，B を測定し，出力変数 $\mathbf{y}$ を持つ装置とする．時刻 $t+\Delta t$ に実行される $\mathbf{P}$ における M の測定と，$\mathbf{S}$ における B の測定は，ともに局所的なので，局所測定定理により，それらの出力確率分布は，状態 $U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger$ における $I\otimes M$ 及び $B\otimes I$ の同時測定の公式を満たす. 従って，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の結合出力分布は,

$$\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\} = \mathrm{Tr}\{[E^B(y)\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\} \tag{40}$$

で与えられる．従って，部分トレース $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}$ を用いて，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\} \;=\; \mathrm{Tr}[E^B(y)\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{[I\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\}] \tag{41}$$

が得られる．一方， 式 (7) から同一の結合出力分布が

$$\begin{aligned}\Pr\{\mathbf{x}=x,\mathbf{y}=y\|\rho\} &= \mathrm{Tr}[E^B(y)\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}]\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\\ &= \mathrm{Tr}[E^B(y)\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}]\end{aligned} \tag{42}$$

によって与えられる．B 及び y は任意なので，式 (41) と (42) を比較して，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{[I\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\} \tag{43}$$

が得られる．Eq. (36) から状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ は，

$$\rho_{\{\mathbf{x}=x\}} \;=\; \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{[I\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\}}{\mathrm{Tr}\{[I\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\}} \tag{44}$$

と一意に決定される．ただし， x は $\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}>0$ を満たす実数とする．

上式は，文献 [9] で最初に導かれた．ここで，Eq. (44) を導くために，次の議論のように射影仮説を根拠なく利用してはいないことに注意する必要がある．つまり，測定値が $\mathbf{x}=x$ である場合，測定の直後に合成系 $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ が

$$\rho^{\mathbf{S+P}}_{\{\mathbf{x}=x\}} \;=\; \frac{[I\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger[I\otimes E^M(x)]}{\mathrm{Tr}\{[I\otimes E^M(x)]U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\}} \tag{45}$$

という状態にあるという議論である．$\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[\rho^{\mathbf{S+P}}_{\{\mathbf{x}=x\}}]$ と定義することによって，この状態 $\rho^{\mathbf{S+P}}_{\{\mathbf{x}=x\}}$ が同一の結論を導くことは正しい．しかし，このような仮定が正しいとは限らない．例えば，プローブの測定が光子数計測で行なわれることは，よくあるが，光子数計測は射影仮説を満たさないので，この議論によって測定後の状態を決定することはできない [10, 11].

3.5 インストルメント

前分節では，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定に引き続いて，ある物理量の測定が行なわれる場合を考察した．ここでは，一般に時刻 $t+\Delta t$ に観測者が同一の系 $\mathbf{S}$ を任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ で測定する場合を考え，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 及び $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の結合出力分布が混合則を満たすことを示す．$\Pi_{\mathbf{y}}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の POVM とする．状態 ρ における $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に

よる測定が測定値 $\mathbf{x} = x$ を導くという条件の下で，時刻 $t + \Delta t$ における状態は，$\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ である．従って，式 (43) から結合出力分布は，

$$\begin{aligned}\Pr\{\mathbf{x} = x, \mathbf{y} = x' \| \rho\} &= \Pr\{\mathbf{y} = x \| \rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\} \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} \\ &= \mathrm{Tr}[\Pi_{\mathbf{y}}(y) \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} \rho_{\{\mathbf{x}=x\}}] \\ &= \mathrm{Tr}\{[\Pi_{\mathbf{y}}(x') \otimes E^M(x)] U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger\} \end{aligned} \tag{46}$$

を満たす．従って，作用素とトレースの線形性から，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の結合出力分布は結合出力分布の混合則を満たす．従って，定理 2.3 から $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメント $\mathcal{I}$ が存在する．式 (43) からインストルメント $\mathcal{I}$ は，任意の実数 x と任意の密度作用素 ρ に対して

$$\mathcal{I}(x)\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{[I \otimes E^M(x)] U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger\} \tag{47}$$

を満たす．上の関係から，$\mathcal{I}$ が完全正値性を持つことが容易に知られる；完全正値性の別の特徴付けとして，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の線形写像が完全正値であるための必要十分条件が任意の有限列 $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ 及び $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して

$$\sum_{ij} \langle \xi_i | T(\rho_i^\dagger \rho_j) | \xi_j \rangle \geq 0 \tag{48}$$

が成立することであるという事実を利用できる [12]．従って，**測定過程** $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ **を持つ任意の装置のインストルメントは完全正値インストルメントである**ことが結論される．この結論の逆の主張は文献 [9] において証明された．以上から，次の定理が得られる．

定理 3.2 (測定過程実現定理) 測定過程を持つ任意の装置のインストルメントは，完全正値インストルメントであり，逆に，任意の 完全正値インストルメントはある純粋な測定過程を持つ装置のインストルメントとして得られる．

$\mathcal{I}$ を測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ をもつ装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメントとする．式 (47) から，非選択的オペレーション $T = \mathcal{I}(\mathbf{R})$ は

$$T\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger] \tag{49}$$

と表すことができる．任意の作用素 $A, \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, 実数 $x \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[A\mathcal{I}(x)\rho] &= \mathrm{Tr}(A\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{[I \otimes E^M(x)] U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger\}) \\ &= \mathrm{Tr}\{[A \otimes E^M(x)] U(\rho \otimes \sigma) U^\dagger\} \\ &= \mathrm{Tr}\{U^\dagger [A \otimes E^M(x)] U(\rho \otimes \sigma)\} \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{U^\dagger [A \otimes E^M(x)] U(I \otimes \sigma)\} \rho) \end{aligned} \tag{50}$$

が成り立つ．よって，

$$\mathrm{Tr}\{[\mathcal{I}(x)^*A]\rho\} \;=\; \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{U^\dagger[A\otimes E^M(x)]U(I\otimes\sigma)\}\rho) \tag{51}$$

が得られる．ρ は任意なので，

$$\mathcal{I}(x)^*A=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{U^\dagger[A\otimes E^M(x)]U(I\otimes\sigma)\} \tag{52}$$

が任意の作用素 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して成立する．特に，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM Π は任意の実数 x に対して

$$\Pi(x)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{U^\dagger[I\otimes E^M(x)]U(I\otimes\sigma)\} \tag{53}$$

を満たす．また，非選択的双対オペレーション T^* は任意の作用素 A に対して，

$$T^*A=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\{U^\dagger(A\otimes I)U(I\otimes\sigma)\} \tag{54}$$

を満たす．

測定過程実現定理から，すべての完全正値インストルメントメント $\mathcal{I}$ は，純粋な測定過程 $(\mathcal{K},\xi,U,M)$ を持つ．$\psi\in\mathcal{H}$ とすると，式 (50) から

$$\begin{aligned}\langle\psi|\mathcal{I}(x)^*A|\psi\rangle &= \mathrm{Tr}\{[\mathcal{I}(x)^*A]|\psi\rangle\langle\psi|\}\\ &= \mathrm{Tr}\{U^\dagger[A\otimes E^M(x)]U(|\psi\rangle\langle\psi|\otimes|\xi\rangle\langle\xi|)\}\\ &= \langle\psi\otimes\xi|U^\dagger[A\otimes E^M(x)]U|\psi\otimes\xi\rangle\end{aligned}$$

が得られる．$\psi\in\mathcal{H}$ は任意なので，

$$\mathcal{I}(x)^*A=\langle\xi|U^\dagger[A\otimes E^M(x)]U|\xi\rangle \tag{55}$$

が得られる．ここで，$\langle\xi|\cdots|\xi\rangle$ は $\mathcal{K}$ 上の部分内積を表す．V を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線形写像で任意の $\psi\in\mathcal{H}$ に対して

$$V\psi=U(\psi\otimes\xi) \tag{56}$$

を満たすとする．すると，

$$V^\dagger V=I \tag{57}$$

が得られる．よって，任意の完全正値インストルメントについて成り立つ次の有用な表現が得られる：任意の $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 及び $x\in\mathbf{R}$ に対して

$$\mathcal{I}(x)^*A=V^\dagger[A\otimes E^M(x)]V \tag{58}$$

が成り立つ．

3.6 ユニタリ実現可能性公理

前節で，任意の装置が満たすべき必要条件として，出力結合分布の混合則とインストルメントの完全正値性を取り上げ，任意の装置にその統計的性質を記述する完全正値インストルメントが一意に対応することを示した．ここでは逆に，完全正値インストルメントがある装置のインストルメントになるための十分条件を考察しよう．そのような条件は，次のように定式化される．

公理 M4 (ユニタリ実現可能性). 任意の測定過程 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ に対して，式 (43) を満たす装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が存在する．

上の仮説は次のように正当化される．公理 Q1 から，任意の自己共役作用素がある物理量に対応し，任意の密度作用素が状態に対応する．更に，Stone の定理 [13] により，原理的に任意のユニタリ作用素がある物理量で生成される時間発展として実現できる．従って，任意の測定過程は，原理的に（与えられた単位系と，物理系を数学的に記述する上で与えられたある実験精度の限界のもとで）実現可能である．

測定過程実現定理によれば，任意の完全正値インストルメントは，測定過程を持つ．ユニタリ実現可能性公理の下で，それは，対応する装置を持つから，任意の完全正値インストルメントは対応する装置を持つことが結論される．また，完全正値インストルメント $\mathcal{I}$ は，関係 $\mathcal{I}'(x)=\mathcal{I}(x)\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{H}'}$ によって，拡大系のインストルメント $\mathcal{I}'$ に自明的に拡張できるから，装置の自明的拡張が存在することも結論される．このようにして，**これまでに挙げた 4 個の公理（公理 M1–公理 M4）の下で，装置の統計的同値類の全体と完全正値インストルメントの全体は一対一に対応することが結論される．**

4 測定誤差論

4.1 測定過程の誤差

時刻 t の状態 $\rho\otimes\sigma$ を初期状態とする Heisenberg 描像で，$A(t)=A\otimes I$, $M(t)=I\otimes M$, $A(t+\Delta t)=U^{\dagger}(A\otimes I)U$, $M(t+\Delta t)=U^{\dagger}(I\otimes M)U$ と表す．$\mathbf{S}+\mathbf{P}$ の任意の物理量 O に対して，状態 $\rho\otimes\sigma$ における O の期待値を $\langle O\rangle$ で表す．すなわち，

$$\langle O\rangle=\mathrm{Tr}[O(\rho\otimes\sigma)]. \tag{59}$$

たとえ，ある装置が物理量 A を正確に測定しないとしても，その装置はある誤差で物理量 A を近似的に測定すると考えることができる．誤差を定量化するために，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の物理量 A の測定に対する**誤差作用素** $N(A)$ を

$$N(A)=U^{\dagger}(I\otimes M)U-A\otimes I \tag{60}$$

と定義する．これは Heisenberg 描像では，

$$N(A)=M(t+\Delta t)-A(t) \tag{61}$$

と表される．すると，入力状態 ρ において物理量 A を測定する際の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**(2乗平均平方根) 誤差**が

$$\varepsilon(A,\rho)=\langle N(A)^{2}\rangle^{1/2} \tag{62}$$

と定義される．誤差 $\varepsilon(A,\rho)$ は，測定値に含まれる2乗平均平方根誤差を表す．$\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ であるとき，$\varepsilon(A,\psi)=\varepsilon(A,\rho)$ と表す．

次の定理は，A を正確に測定する装置という概念と A に対する誤差が任意の状態で零である装置という概念が同等であることを示している．

定理 4.1 装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 A を正確に測定するための必要十分条件は，任意の入力状態において $\varepsilon(A,\rho)=0$ が成り立つことである．

4.2 モデルに依存しない誤差の定義

前分節では，装置の誤差をそれに付随する測定過程を用いて定義した．従って，誤差はモデルに依存するように見える．以下では，このことは表面的なことで，実は，モデルに依存しないことを示す．すなわち，誤差は，装置の POVM だけに依存する．従って，装置の統計的同値類によって定まる．任意の測定で区別不可能な測定モデルは同一の統計的同値類に対応するので，誤差はモデルから独立に定義される．

Π を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の POVM とする．Π の**第n次モーメント作用素** $O^{(n)}(\Pi)$ を

$$O^{(n)}(\Pi)=\sum_{x\in\mathbf{R}}x^{n}\Pi(x) \tag{63}$$

で定義する．第1次のモーメント作用素は，$O(\Pi)=O^{(1)}(\Pi)$ と表す．

A を $\mathbf{S}$ の物理量とし, ρ を $\mathbf{S}$ の状態とする. ρ における Π の A に対する **(2 乗平均平方根) 距離** $d_\rho(\Pi, A)$ を

$$d_\rho(\Pi, A) = \mathrm{Tr}\{[O^{(2)}(\Pi) - O(\Pi)^2 + (O(\Pi) - A)^2]\rho\}^{1/2} \tag{64}$$

と定義する. 上式から容易に

$$d_\rho(\Pi, A) = \mathrm{Tr}[(O^{(2)}(\Pi) - 2O(\Pi) \circ A + A^2)\rho]^{1/2} \tag{65}$$

が得られる. ここで, $X \circ A = (XA + AX)/2$.

さて, POVM と物理量の間の距離について, 次の性質が成り立つ.

定理 4.2 C を系 $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ の物理量とし, σ を $\mathbf{P}$ の状態とする. もし, Π_C が任意の $x \in \mathbf{R}$ についての関係

$$\Pi_C(x) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[E^C(x)(I \otimes \sigma)] \tag{66}$$

によって定義されるならば,

$$d_\rho(\Pi_C, A)^2 = \mathrm{Tr}[(C - A \otimes I)^2(\rho \otimes \sigma)] \tag{67}$$

が成り立つ.

次の定理は, 装置の誤差がモデルに依存しないで, その POVM に依存して決まることを示している.

定理 4.3 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ をもつ装置とし, Π を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の *POVM* とする. すると, 誤差 $\varepsilon(A, \rho)$ は Π によって

$$\varepsilon(A, \rho) \quad = \quad d_\rho(\Pi, A) \tag{68}$$

と定められる.

4.3 無擾乱測定

ここでは, 装置のおこなう測定は, **瞬間的**であると仮定する. つまり, 測定にかかる時間 Δt は非常に短く, また, $\mathbf{S}$ と $\mathbf{P}$ の結合は非常に強いので, 時間区間 $(t, t+\Delta t)$ における $\mathbf{S}$ の時間発展は無視されると仮定する. この場合, 状態 ρ において装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 B の確率分布を乱さないとは,

$$\mathrm{Tr}\{[E^B(x) \otimes I]U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger\} = \mathrm{Tr}[E^B(x)\rho] \tag{69}$$

が成り立つことを言う．または，Heisenberg 描像では，

$$\langle E^{B(t)}(x)\rangle = \langle E^{B(t+\Delta t)}(x)\rangle \tag{70}$$

が成り立つことを言う．ここで，x は任意の実数であり，$B(t)=B\otimes I$ 及び $B(t+\Delta t)=U^{\dagger}(B\otimes I)U$ とおいた．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 B を**乱さない**，または，**B-無擾乱** とは，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が**任意の**入力状態 ρ において B の確率分布を乱さないことを言う [11].

無擾乱測定の概念は，非選択的オペレーションによって，以下のように特徴付けられる．

定理 4.4 装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 B を乱さないための必要十分条件は，

$$T^{*}E^{B}(x) = E^{B}(x) \tag{71}$$

が任意の実数 x について成り立つことである．ここで，T は $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の非選択的オペレーションを表す．

4.4 測定過程における擾乱

擾乱の大きさを定量化するために，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の物理量 B に対する**擾乱作用素** $D(B)$ を

$$D(B) = U^{\dagger}(B\otimes I)U - B\otimes I, \tag{72}$$

または，Heisenberg 描像で

$$D(B) = B(t+\Delta t) - B(t) \tag{73}$$

によって定義する．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の物理量 B に対する入力状態 ψ における **(2 乗平均平方根) 擾乱** $\eta(B,\rho)$ は，

$$\eta(B,\rho) = \langle D(B)^{2}\rangle^{1/2} \tag{74}$$

によって定義する．$\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ ならば，$\eta(B,\rho)=\eta(B,\psi)$ と書く．擾乱 $\eta(B)$ は物理量 B の測定相互作用の前後における 2 乗平均平方根偏差を表わす．

式 (72) から

$$D(B) = U^{\dagger}[B\otimes I, U] \tag{75}$$

が得られる．従って，$[U, B\otimes I] = 0$ ならば，すべての入力状態 ρ に対して，$\eta(B,\rho) = 0$ が成り立つ．

擾乱の基本的な性質の一つは，次の定理で示すように，無擾乱装置と擾乱が零の装置が同等の概念であるということである．

定理 4.5 装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 B を乱さないための必要十分条件は，任意の状態 ρ に対して，$\eta(B,\rho) = 0$ が成り立つことである．

4.5　モデルに依存しない擾乱の定義

次の定理は，装置の擾乱がその非選択的オペレーションだけで定まることを示している．

定理 4.6 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を非選択的オペレーション T をもつ装置とする．すると，擾乱 $\eta(B,\rho)$ は T によって

$$\eta(B,\rho) \;\; = \;\; d_\rho(T^*E^B, B) \tag{76}$$

と定まる．ここで，T^*E^B は，任意の x に対する関係

$$(T^*E^B)(x) = T^*[E^B(x)] \tag{77}$$

で定義される $POVM$ を表わす．

4.6　普遍的不確定性原理

これまでに述べた誤差と擾乱の一般的な定義の下で，誤差 $\varepsilon(A)$ と擾乱 $\eta(B)$ に関するいわゆる “Heisenberg の不等式”

$$\varepsilon(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| \tag{78}$$

の正当性を厳密に調べることができる．この関係式は，有名なガンマ線顕微鏡の思考実験により，Heisenberg [14] が，位置測定の誤差 $\varepsilon(Q)$ とそれによる運動量の擾乱 $\eta(P)$ の間の関係として提唱した関係

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \sim h \tag{79}$$

を Robertson の不等式 (4) からの類推で一般化して，流布したものである．ここで，h は Planck 定数を表す．ある条件を満たす測定については，この関係が厳密

に成立することが知られてきたが [15, 16, 17, 18]，一般に成立するかどうか，一般に成立しない場合に，その成立条件，及び，それに代わり一般に成立する関係式はどういうものかなどの問題は，最近になって明らかになってきた [19, 20, 21, 22].

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を任意の装置とし，$(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定過程とする．A 及び B を対象の二つの物理量とする．状態 $\rho\otimes\sigma$ を初期状態とする Heisenberg 描像で

$$A^{\rm in} = A\otimes I, \tag{80}$$
$$M^{\rm in} = I\otimes M, \tag{81}$$
$$A^{\rm out} = U^{\dagger}(A\otimes I)U, \tag{82}$$
$$M^{\rm out} = U^{\dagger}(I\otimes M)U \tag{83}$$

と表わす．誤差作用素 $N(A)$ と擾乱作用素 $D(B)$ は，

$$M^{\rm out} = A^{\rm in}+N(A), \tag{84}$$
$$B^{\rm out} = B^{\rm in}+D(B). \tag{85}$$

を満たす．M と B は異なる系に属する物理量なので，$[M^{\rm out},B^{\rm out}]=0$ が成り立つ．従って，誤差作用素と擾乱作用素に関する次の交換関係が成り立つ：

$$[N(A),D(B)]+[N(A),B^{\rm in}]+[A^{\rm in},D(B)] = -[A^{\rm in},B^{\rm in}]. \tag{86}$$

状態 $\rho\otimes\sigma$ における両辺の期待値の絶対値をとり，三角不等式を適用すれば，

$$|\langle[N(A),D(B)]\rangle|+|\langle[N(A),B^{\rm in}]\rangle+\langle[A^{\rm in},D(B)]\rangle|\geq|{\rm Tr}([A,B]\rho)|. \tag{87}$$

が得られる．分散は2乗平均を超えないので，

$$\varepsilon(A,\rho) \geq \sigma(N(A),\rho\otimes\sigma), \tag{88}$$
$$\eta(B,\rho) \geq \sigma(D(B),\rho\otimes\sigma), \tag{89}$$

を得る．従って， Robertson の不等式 (4) から

$$\varepsilon(A)\eta(B)\geq\frac{1}{2}|\langle[N(A),D(B)]\rangle|. \tag{90}$$

が得られる．従って，物理量の対 (A,B) の誤差と擾乱に関する不等式

$$\varepsilon(A)\eta(B)+\frac{1}{2}|\langle[N(A),B^{\rm in}]\rangle+\langle[A^{\rm in},D(B)]\rangle|\geq\frac{1}{2}|{\rm Tr}([A,B]\rho)| \tag{91}$$

が得られる．誤差 $\varepsilon(A)$，擾乱 $\eta(B)$, 及び，測定前の不確定性 $\sigma(A)$，$\sigma(B)$ の間のトレード・オフを得るために Robertson の不等式 (4) を左辺のすべての項に適用すると，次の誤差と擾乱と初期状態の不確定性に関する普遍的不等式が得られる．

定理 4.7 (普遍的不確定原理) 任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$，物理量 A, B，任意の状態 ρ に対して，

$$\varepsilon(A,\rho)\eta(B,\rho)+\varepsilon(A,\rho)\sigma(B,\rho)+\sigma(A,\rho)\varepsilon(B,\rho)\geq\frac{1}{2}|\mathrm{Tr}([A,B]\rho)| \tag{92}$$

が成り立つ.

Heisenberg 型の関係を導くためには，以下のような装置に関する付加的な仮定が必要であることが式 (91) からわかる.

定理 4.8 平均誤差 $\langle N(A)\rangle$ と平均擾乱 $\langle D(B)\rangle$ が対象の状態に依存しないならば，任意の入力状態 ρ に対して，

$$\varepsilon(A,\rho)\eta(B,\rho)\geq\frac{1}{2}|\mathrm{Tr}([A,B]\rho)| \tag{93}$$

が成り立つ.

正確な A-測定または無擾乱 B-測定に関して，次のようなトレード・オフが成り立つ.

定理 4.9 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が B を乱さない装置ならば，

$$\varepsilon(A,\rho)\sigma(B,\rho)\geq\frac{1}{2}|\mathrm{Tr}([A,B]\rho)| \tag{94}$$

が任意の状態 ρ で成り立つ.

定理 4.10 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が A を正確に測定する装置ならば，

$$\sigma(A,\rho)\eta(B,\rho)\geq\frac{1}{2}|\mathrm{Tr}([A,B]\rho)| \tag{95}$$

が任意の状態 ρ で成り立つ.

普遍的不確定性原理の物理的意義については，文献 [19, 20] を参照されたい. 本講義で扱われた内容の無限次元の場合における数学的に詳しい記述は，文献 [21] を参照されたい. そこでは，更に，誤差や擾乱が不偏性や独立性を持つ場合になりたつ様々な不等式が導かれている. 文献 [22] では，測定がいわゆる測定作用素で記述される場合が扱われている. 測定作用素による測定の記述は，量子情報の分野で広く使われている [23]. 文献 [24] では，位置 Q の測定の誤差と運動量 P の擾乱に関する Heisenberg の不等式 $\varepsilon(Q)\eta(P)\geq\hbar/2$ が成立しない測定過程のモ

デルが示されている．そこでは，$\varepsilon(Q) = 0$ かつ $\eta(P)$ が任意の小さい値になるモデルが存在することが示されている．本講義の普遍的不確定性原理は，測定誤差と擾乱のトレードオフに関するものであったが，全く同じ数学によって，２つの物理量の同時測定の誤差に関する普遍的不確定性原理が得られる．それについては，文献 [25, 26] を参照されたい．文献 [25] では，更に，普遍的不確定性原理から，いわゆる Wigner-Araki-Yanase の定理を定量的に一般化した不等式が導かれている．また，それを利用して，量子計算素子の実現に関して，保存法則が課す精度の限界が導かれている．普遍的不確定性原理の実験的検証の研究は比較的新しい．Lund と Wiseman [27] は，弱測定を用いたスピン測定における普遍的不確定性原理の検証を提案している．文献 [28] では，文献 [26] で示した検証方法を用いた検証実験の結果を報告している．どちらも，広い範囲のコントロールパラメターの値に対して，普遍的不確定性原理の不等式 (92) が成立し，Heisenberg の不等式 (78) が成立しない状況を明らかにしている．普遍的不確定性原理の意義と応用に関して日本語で書かれた解説としては，文献 [29, 30] がある．

謝辞

原稿を読んでご討論いただいた名古屋大学の谷村省吾教授に感謝する．本研究の一部は科研費 (基盤研究 (A) No. 21244007) の助成を受けた．

参考文献

[1] P. R. Halmos. *Introduction to Hilbert Space Theory and the Theory of Spectral Multiplicity.* Chelsea, New York, 1951.

[2] M. Ozawa. Optimal measurements for general quantum systems. *Rep. on Math. Phys.*, 18:11–28, 1980.

[3] M. Ozawa. An operational approach to quantum state reduction. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 259:121–137, 1997.

[4] M. Ozawa. Measurements of nondegenerate discrete observables. *Phys. Rev. A*, 62:062101 (1–13), 2000.

[5] E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. *Commun. Math. Phys.*, 17:239–260, 1970.

[6] E. B. Davies. *Quantum Theory of Open Systems.* Academic, London, 1976.

[7] M. Ozawa. Quantum measurement, information, and completely positive maps. In P. Tombesi and O. Hirota, editors, *Quantum Communication, Computing, and Measurement 3*, pages 97–106, New York, 2001. Kluwer/Plenum. eprint arXiv:quant-ph/0107090.

[8] M. Ozawa. Quantum state reduction and the quantum Bayes principle. In O. Hirota, A. S. Holevo, and C. M. Caves, editors, *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, pages 233–241, New York, 1997. Plenum. eprint arXiv:quant-ph/9705030.

[9] M. Ozawa. Quantum measuring processes of continuous observables. *J. Math. Phys.*, 25:79–87, 1984.

[10] M. Ozawa. Quantum state reduction: An operational approach. *Fortschr. Phys.*, 46:615–625, 1998. eprint arXiv:quant-ph/9711006.

[11] M. Ozawa. Operations, disturbance, and simultaneous measurability. *Phys. Rev. A*, 63:032109 (1–15), 2001.

[12] W. F. Stinespring. Positive functions on C*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:211–216, 1955.

[13] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis.* Academic, New York, 1972.

[14] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.*, 43:172–198, 1927.

[15] E. Arthurs and J. L. Kelly, Jr. On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables. *Bell. Syst. Tech. J.*, 44:725–729, 1965.

[16] E. Arthurs and M. S. Goodman. Quantum correlations: A generalized Heisenberg uncertainty relation. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2447–2449, 1988.

[17] M. Ozawa. Quantum limits of measurements and uncertainty principle. In C. Bendjaballah, O. Hirota, and S. Reynaud, editors, *Quantum Aspects of Optical Communications*, pages 3–17, Berlin, 1991. Springer.

[18] S. Ishikawa. Uncertainty relations in simultaneous measurements for arbitrary observables. *Rep. Math. Phys.*, 29:257–273, 1991.

[19] M. Ozawa. Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. *Phys. Rev. A*, 67:042105 (1–6), 2003.

[20] M. Ozawa. Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation. *Phys. Lett. A*, 318:21–29, 2003.

[21] M. Ozawa. Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 311:350–416, 2004.

[22] M. Ozawa. Universal uncertainty principle in measurement operator formalism. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 7:S672–S681, 2005.

[23] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[24] M. Ozawa. Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle. *Phys. Lett. A*, 299:1–7, 2002.

[25] M. Ozawa. Uncertainty principle for quantum instruments and computing. *Int. J. Quant. Inf.*, 1:569–588, 2003.

[26] M. Ozawa. Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables. *Phys. Lett. A*, 320:367–374, 2004.

[27] A. P. Lund and H. M. Wiseman. Measuring measurement-disturbance relationships with weak values. *New J. Phys.*, 12:093011, 2010.

[28] J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa. Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin-measurements.

[29] 小澤正直. 不確定性原理・保存法則・量子計算. 日本物理学会誌, 59(3):157–165, (2004).

[30] 小澤正直. 不確定性原理の新展開：古い解釈と新しい定式化. 数理科学, 2005年10月号:5–17. 特集「不確定性原理の新展開」.