天体位置表の基礎理論

基　本　原　理

1．一般相対性理論

本書では，天体の運動や電磁波（光）の伝播などの現象を，Einsteinの一般相対性理論に基づいて扱う．一般相対性理論については，例えば

(1) C. M. Will : *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981
(2) C. W. Misner, K.S. Thorne and J. A. Wheeler : *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1970
(3) アインシュタイン著，矢野訳「相対論の意味」岩波書店，1958

を見るとよい．

太陽系における重力場は十分に弱く，また対象とする天体の速度も光速に比べて小さいため，本書が基礎とする方程式及びそれを解いて得られる結果はすべて小さなパラメータεについて展開することができる．εは対象とする天体の代表的な速度の光速に対する比で，太陽系では高々10^{-3}程度にしかならない．太陽系における重力場の強さはε^2と更に小さい．したがって太陽系内の天文現象に限っていえばよく知られているNewton力学はε^0まで正しい理論である．またNewtonの万有引力の法則や特殊相対性理論はε^1まで正しい理論である．本書ではε^2まで正しい取扱いを目標としている．したがってε^3以上の高次項を省略する．

座　標　系

2．座標系

相対性原理によれば，時間と空間を切り離して考えることはできず，したがってNewtonの考えたような絶対時間は存在しない．相対性理論では時間と空間はまとめて時空と呼ばれる．時空における物理現象を記述する場合，ある座標系とそれを座標変換して得られる座標系とは全く同等であり，どの座標系を選ぶかは任意である．しかしながら，太陽系天体の運動を論じるときは一般に次の条件を満たす4次元座標系を用いる．

(1) 空間座標の中心は太陽系の重心である（重心の定義は第20項に述べる）．
(2) 時間軸すなわち太陽系の重心の軌跡から，空間的に十分離れた所では時空が平たんになる（平たんの定義は第16項に述べる）．
(3) すべての座標軸は空間座標の中心において互いに直交する（直交の定義は第16項に述べる）．
(4) 空間軸は太陽系自身の重力の影響が入っていない空間的測地線である（測地線の定義は第17項に述べる）．

この座標系を太陽系重心座標系，あるいは単に太陽系座標系と呼び，その時間座標を太陽系力学時TDBと呼ぶ．一方，人工衛星や地球の自転など地球近傍の物体の運動を論じるときは，上記の条件に

おいて「太陽系」を「地球」と置き換えて定義される座標系を用いる．これを地球座標系と呼び，その時間座標を第28項に述べる定数倍の補正の後，地球力学時TDTと呼ぶ．また，原子時計や電磁波の送受信など観測者近傍の物理現象を論じるときは，更に「観測者」と置き換えて定義される座標系を用いる．これを固有座標系と呼び，その時間座標を固有時と呼ぶ．

これらの座標系は単位系の採り方と座標系の向きを除いて一意に決まる．単位系についてはIAU (1976) 勧告1において，太陽系座標系は日及び天文単位，地球座標系は秒及びメートルと規定されている．個々の固有座標系を指定するには第1項で述べたように採用した座標系の中心と向きを明示しなければならない．本書では，幾何学的位置及び測定学的位置については，元期J2000.0の平均赤道及び平均春分点に基づいた太陽系座標系（元期の太陽系平均赤道座標系と略する）に，また地心視位置については，瞬時の真赤道及び真春分点に基づいた地球座標系（瞬時の地球真赤道座標系と略する）にそれぞれ基づいて記述する．

上記の条件のうち (2) は全時空で満たされるとは限らない．例えば太陽系座標系の場合，太陽系から非常に離れた所では他の恒星や銀河回転の影響で時空が平たんでなくなる．各座標系の適用できる範囲は，一部分重なり合いながらもその大きさにはそれぞれ制限があるため，目的に応じて座標系を使い分けることが必要である．そのために必要な各座標系の間の変換式は次のようにして求められる．

今座標系Aと座標系Bがあるとする．座標系Bの時間軸 T_B は条件 (1) から，座標系Bの空間座標中心 O_B の座標系Aにおける軌跡（世界線と呼ぶ）である．これは，点 O_B の座標系Aにおける運動方程式を解くことによって得られる．条件 (3)，(4) から座標系Bの空間軸は点 O_B において時間軸 T_B と直交し，かつ点 O_B において互いに直交する3本の空間的測地線として定義される．これらは点 O_B における初期方向さえ与えられれば，座標系Aにおける空間的測地線の方程式を解くことによって得られる．実際はこれらの空間的測地線は直線で近似できることが多い．上記の点 O_B における初期方向の時間軸 T_B に沿っての変化は，Fermi-Walker移動の方程式（Misner他，§ 13.6）を解くことによって得られる．こうして座標系Bの各座標軸の座標系Aにおける表現が得られる．

本書では，座標を4つの量 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) によって表現する．添字0は時間，添字1，2, 3は空間を示している．x^0 の代わりに t と書くことが多い．以下ではギリシャ小文字の添字 μ，ν，ρ などは時空 (0, 1, 2, 3) を表し，ローマ小文字の添字 i, j, k などは空間 (1, 2, 3) を表し，ローマ大文字の添字 J, K, L などは異なる天体や光などを表すものとする．また4次元ベクトルは x^μ，4次元行列は $g_{\mu\nu}$ などと成分で表す．また3次元（空間）ベクトルは $\boldsymbol{x}$ のようにローマ小文字のボールド体で表し，3次元行列はおおむね $\boldsymbol{P}$ のようにローマ大文字のボールド体で表すか，δ_{ij} などと成分で表す．

3. 計量テンソル

一般相対性理論の一つの柱である等価原理によれば，重力は時空の構造だけから導かれるある種の見掛けの力である．したがって天体の運動や電磁波の伝播を論じるには，時空の構造が与えられなければならない．時空内でごくわずか離れた2点間の微小距離（線素と呼ぶ）ds が，2点間の微小座標差（変位と呼ぶ）dx^μ によって，どのように表現されるかを与えれば時空の構造は決まる．一般に線素の2乗は次に示すように変位の2次形式で表される．

$$(ds)^2=\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

ただし

$$g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu} \qquad (\mu,\ \nu=0,1,2,3)$$

この2次形式の係数$g_{\mu\nu}$は時空の構造を決定する重要な量で計量テンソルと呼ばれる．
例えば2本の曲線が点x^{ρ}において直交するとは，その接ベクトルa^{μ}とb^{μ}が

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}g_{\mu\nu}(x^{\rho})a^{\mu}b^{\nu}=0$$

を満たすことを意味する．

一般に計量テンソルは座標の関数であり，したがって採用する座標系に依存するが，もし重力源となる天体が一つもなければ，採用した座標系が何であっても適当に座標変換をすることによって，計量テンソルを次のような定数対角テンソル$\eta_{\mu\nu}$で表すことができる．

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-c^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & +1\end{pmatrix}$$

ただしcは重力場がないときの真空中の光の速さである．このとき時空は平たんであるという．いたるところ平たんな時空における運動は，特殊相対性理論によって記述される．

計量テンソルすなわち時空の構造は，重力場の方程式を解くことによって得られる．一般には重力場の方程式は，重力源である天体の運動方程式と連立させないと解くことはできないが，太陽系内では重力場が弱いので，計量テンソルを天体の質量，位置，速度などを用いて次のように書き下すことができる．

$$g_{00}(x^{\mu})=-c^2+2\phi(x^{\mu})+\frac{2}{c^2}\Psi(x^{\mu})$$
$$g_{0j}(x^{\mu})=\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{g}(x^{\mu}))_j$$
$$g_{ij}(x^{\mu})=(1+\frac{2}{c^2}\phi(x^{\mu}))\,\delta_{ij}$$

ただしϕは古典的なNewtonポテンシャルの符号を変えたものであり，$\boldsymbol{g}$はベクトルポテンシャル，ϕはポテンシャルの非線型項と呼ばれる．またδ_{ij}はKroneckerのデルタである．

例えば太陽系をN個の質点系とみなした場合，ϕ，$\boldsymbol{g}$，ϕは具体的にそれぞれ

$$\phi(t,\boldsymbol{x})=\sum_J\frac{GM_J}{r_J}$$

$$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})=-4\sum_J\frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{v}_J$$

$$\phi(t,\boldsymbol{x})=-\phi^2+2\sum_J\frac{GM_J}{r_J}v_J^2-\sum_J\sum_{K\neq J}\frac{GM_J}{r_J}\cdot\frac{GM_K}{r_{JK}}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)^2-\frac{1}{2}\sum_J\frac{GM_J}{r_J}(\boldsymbol{r}_J\cdot\frac{d\boldsymbol{v}_J}{dt})$$

と書ける．ただし$\sum_J$ は$\sum_{J=1}^{N}$ の略であり、

$$\boldsymbol{r}_J = \boldsymbol{x}_J - \boldsymbol{x},\ r_J = |\boldsymbol{r}_J|,\ r_{JK} = |\boldsymbol{x}_J - \boldsymbol{x}_K|,\ \boldsymbol{v}_J = \frac{d\boldsymbol{x}_J}{dt}$$

である．ここにt及び$\boldsymbol{x}$は考えている点の太陽系座標系における時間及び空間座標，$\boldsymbol{x}_J$は天体Jの同じtのときの太陽系座標系における空間座標，M_Jは天体Jの質量，Gは万有引力定数である．

この計量テンソルを発表者の頭文字をとって，EIH(Einstein, Infeld and Hoffmann) 計量テンソルと呼ぶ (Misner 他，§ 39.13)．本書ではこの計量テンソルを採用している．

天体の運動方程式

4．天体の運動方程式

太陽系では重力以外の力，すなわち電磁力は重力に比べて十分小さいので，太陽系天体に比べ質量が十分小さく無視できるような物体は自由落下している．すなわちその運動は時間的測地線の方程式に従うと考えてよい．測地線とは平たんな時空において直線が果たす役割を，重力場のある曲がった時空において果たすある種の曲線である．測地線の方程式は，曲線としての長さλをパラメータに採ると次のように書ける．

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \sum_{\nu=0}^{3}\sum_{\rho=0}^{3} \Gamma_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

ただし，$\Gamma_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho}$は Christoffel の係数と呼ばれ計量テンソルから次のようにして求められる．

$$\Gamma_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3} g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\alpha}\right) \quad (\mu,\ \nu,\ \rho = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

ただし$g^{\mu\nu}$は$g_{\mu\nu}$の逆テンソルである．測地線は$\left[\frac{ds}{d\lambda}\right]^2$が正，0，負に応じてそれぞれ空間的，長さ0，時間的と呼ばれる．

時間的測地線の方程式を通常の3次元形式に書き直すと次の運動方程式が得られる．

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{c^2}\{(v^2 - 2\phi)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - [3\dot{\phi} + 4(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})]\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{g}} + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})\}$$

ただし

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt},\ \boldsymbol{a} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{b} = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{x}},\ \cdot = \frac{\partial}{\partial t},\ \nabla = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}$$

で，・は内積，×はベクトル積である．$\boldsymbol{a}$ は古典的な Newton の万有引力による加速度項であり，{ } の項が一般相対性理論によって付加された部分である．第16項に述べた EIH 計量テンソルを用いればこれらは次のように書ける．

$$\boldsymbol{a} = \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\boldsymbol{r}_J$$

$$\{\} = \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\boldsymbol{r}_J\left[-4\sum_L \frac{GM_L}{r_L} - \sum_{L\neq J}\frac{GM_L}{r_{LJ}}\left(1 - \frac{\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{r}_{LJ}}{2\boldsymbol{r}_{LJ}^2}\right) + v^2 + 2v_J^2 - 4\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_J - \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}_J\cdot\boldsymbol{r}_{LJ}}{\boldsymbol{r}_J}\right)^2\right]$$

$$- \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}[\boldsymbol{r}_J\cdot(3\boldsymbol{v}_J - 4\boldsymbol{v})]\boldsymbol{u}_J + \frac{7}{2}\sum_J\sum_{L\neq J}\frac{GM_J}{r_J}\cdot\frac{GM_L}{r_{LJ}^3}\boldsymbol{r}_{LJ}$$

ただし,

$$\boldsymbol{r}_J=\boldsymbol{x}_J-\boldsymbol{x},\ r_J=|\boldsymbol{r}_J|,\ \boldsymbol{r}_{LJ}=\boldsymbol{x}_L-\boldsymbol{x}_J,\ r_{LJ}=|\boldsymbol{r}_{LJ}|,\ \boldsymbol{v}_J=\frac{d\boldsymbol{x}_J}{dt},\ \boldsymbol{u}_J=\boldsymbol{v}_J-\boldsymbol{v}$$

である.

質量を無視できない天体Kの運動は,一般には測地線をえがくとは限らない.しかしながら太陽系のように弱い重力場では,その天体K自身の作り出す重力場の自分自身への影響を含まない.ある仮想的な時空における測地線をえがくと考えることができる.すなわち天体 Kの運動方程式は上式において,$\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}_J,r_J,\boldsymbol{u}_J$をそれぞれ $\boldsymbol{v}_K,\boldsymbol{r}_{JK},r_{JK},\boldsymbol{u}_{JK}$ に,また$\sum_J$,$\sum_L$を$\sum_{J\neq K}$,$\sum_{L\neq K}$に置き換えることによって次のように得られる.

$$\frac{d\boldsymbol{v}_K}{dt}=\sum_{J\neq K}\frac{GM_J}{r^3_{JK}}\boldsymbol{r}_{JK}+\frac{1}{c^2}\{\sum_{J\neq K}\frac{GM_J}{r^3_{JK}}\boldsymbol{r}_{JK}\,[-4\sum_{L\neq K}\frac{GM_L}{r_{LK}}-\sum_{L\neq J}\frac{GM_L}{r_{LJ}}(1-\frac{\boldsymbol{r}_{JK}\cdot\boldsymbol{r}_{LJ}}{2r^2_{LJ}})+\boldsymbol{v}_K{}^2+2\boldsymbol{v}_J^2-4\boldsymbol{v}_K\cdot\boldsymbol{v}_J$$
$$-\frac{3}{2}(\frac{\boldsymbol{v}_J\cdot\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}})^2]-\sum_{J\neq K}\frac{GM_J}{r^3_{JK}}\,[\boldsymbol{r}_{JK}\cdot(3\boldsymbol{v}_J-4\boldsymbol{v}_K)]\,\boldsymbol{u}_{JK}+\frac{7}{2}\sum_{J\neq K}\sum_{L\neq J}\frac{GM_J}{r_{JK}}\cdot\frac{GM_L}{r^3_{LJ}}\boldsymbol{r}_{LJ}\}$$

ただし

$$\boldsymbol{u}_{JK}=\boldsymbol{v}_J-\boldsymbol{v}_K$$

である.第18項に述べる地球−月−太陽系を除いて,本書で扱う太陽系天体(水星・金星・地球・火星・木星・土星・天王星・海王星・冥王星・セレス・パラス・ジュノー・ベスタに太陽と月を加えた15天体)の太陽系座標系における加速度は上式で与えられる.

5. 地球−月−太陽系に働く力

月は十分地球に近く,レーザー測距などにより高精度の位置観測データが得られている.これらのデータを十分に説明するには地球−月−太陽系に働く力を詳しくモデル化しなければならない.本書では,すでに述べた古典的な万有引力と一般相対性理論による付加項以外に,質の異なる2種類の力を考慮する.

(1) 天体の非質点重力場

一般に天体は有限の大きさを持ち,また内部の質量分布も複雑なため,そのNewtonポテンシャルは質点の作るポテンシャル以外に遠方でより速く減衰する項を持つ.ある天体Kについてその付加ポテンシャルは天体外の点 $\boldsymbol{x}$ において

$$\frac{GM_K}{r_K}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_K}{r_K})^n\sum_{m=0}^{n}(C_{nm,K}\cos m\lambda_K+S_{nm,K}\sin m\lambda_K)P_n^m(\sin\beta_K)$$

と展開される.ただしa_Kは天体Kの赤道半径,r_K,λ_K,β_Kはそれぞれ天体Kの重心を中心とし慣性主軸を各空間座標軸に採ったときの点 $\boldsymbol{x}$ の動径,経度,緯度であり,P_n^mは*Legendre*の陪多項式である.係数$C_{nm,K},S_{nm,K}$は天体Kの非質点性を特徴づける量で,天体Kの重力場の球面調和係数と呼ばれる.今の場合,座標系を上のように採ったことにより

$$C_{1m,K}=S_{1m,K}=0 \qquad m=0,1$$
$$S_{n0,K}=0 \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$
$$S_{21,K}=S_{22,K}=C_{21,K}=0$$

となる.よく使われる係数J_nとは$-C_{n0}$にほかならない.加速度の式は付加ポテンシャルを$\boldsymbol{x}$で微分することによって得られるが,それよりもむしろ漸化式を用いることによって高速に評価することができる.

本書では

(ⅰ) 地球の非質点重力場と質点とみなした月及び太陽の相互作用
(ⅱ) 月の非質点重力場と質点とみなした地球及び太陽の相互作用
だけを考慮し，地球と月の非質点重力場間の相互作用は無視する．地球及び月の重力場の球面調和数の数値はIAU (1976) の勧告のものを採用する．したがって地球について

$$C_{nm} = S_{nm} = 0 \qquad n = 2,\ 3,\ 4 \qquad m \neq 0$$
$$C_{nm} = S_{nm} = 0 \qquad n \geqq 5$$

月について

$$C_{nm} = S_{nm} = 0 \qquad n \geqq 4$$

であるとする（天文略説の第12項参照）．

(2) 潮汐摩擦

かなり以前から月の運動には，保存力からは導かれないいわゆる「黄経の永年加速」という現象が確認されている．この原因はまだ明確に突き止められてはいないが，現在のところ地球の海洋潮汐による海水と海底の摩擦によって，運動エネルギーが散逸しているためであろうと推測されている．IAU (1976) の勧告は，月の「黄経の永年加速」について何にもふれていない．

本書では，J. G. Williams, W. S. Sinclair and C. F. Yoder, *Geophysical Research Letters* ,vol.5, No.11, 943, 1978にならい，地球－月間に次のような現象論的加速度が加わると考える．

$$\Delta \ddot{\boldsymbol{r}}_{☾}^{(\oplus)} = -\frac{3k_2GM_{☾}}{(r_{☾}^{(\oplus)})^3}\left(1+\frac{M_{☾}}{M_{\oplus}}\right)\left(\frac{a_{\oplus}}{r_{☾}^{(\oplus)}}\right)^5 \begin{pmatrix} x+y\delta \\ y-x\delta \\ z \end{pmatrix}$$

ただしx, y, zは地心を中心とし，地球の慣性主軸を各空間座標軸（z軸は地球の自転軸）に採ったときの，月の地心位置 $\boldsymbol{r}_{☾}^{(\oplus)} \fallingdotseq \boldsymbol{x}_{☾} - \boldsymbol{x}_{\oplus}$の各成分で，$M_{☾}$，$M_{\oplus}$はそれぞれ月，地球の質量，$a_{\oplus}$は地球の赤道半径である．$k_2$と$\delta$は観測から決められるべき未定パラメータであるが，「黄経の永年加速」の量は積 $k_2\delta$ だけに比例するので，月レーザー観測からでは k_2とδは同時に精度良くは決まらない．

本書では，Williams(LE 62, magnetic tape, 1981) に習って$k_2 = 0.3$を仮定して彼が求めた値

$$\delta = 4.0700\ 012 \times 10^{-2}$$

を採用する．k_2とδは本来地球物理学によって決められるべきパラメータであるが，現在のところここで扱ったように人工衛星レーザー測距等の観測から，ここで述べたような適当なモデルを仮定してその値が求められている．

6. 地球と月の慣性主軸の向き

第18項で述べた加速度を計算するには，地球及び月の慣性主軸の向きが与えられなければならない．

地球の慣性主軸（地球を回転だ円体とみなし，z軸だけ）の向きは歳差・章動理論によって精度よく与えることができる．本書では J. H, Lieske, T. Lederle, W. Fricke and B. Morando : *Astronomy and Astrophysics*, vol.58, 1, 1977の歳差理論と，IAU (1980) 章動理論を採用する（第3項参照）．月の慣性主軸の動きはCassiniの法則と呼ばれるものにほぼ従っている．

Cassiniの法則とは次の3つの法則から成り立っている．

(1) 月の x 軸（その軸の周りの慣性能率が最小である軸）は平均して地球を向いている．

(2) 月の「秋分点」すなわち月の赤道と黄道の交点のうち，月から見て太陽が北から南へ通過する方の点は月の軌道の降交点と一致する．

(3) 月の「黄道傾角」すなわち月の赤道面と黄道面がなす角は一定である.
地球や太陽が月に及ぼす偶力などのために実際の月の慣性主軸の動きはCassiniの法則から少しずれており，この差を月の物理ひょう動と呼ぶ．月は地球と異なり慣性だ円体が3軸不等であるため，月の物理ひょう動は3つの独立な成分τ，P_1, P_2によって記述される．τは黄経の物理ひょう動，P_1, P_2は極の物理ひょう動と呼ばれる．すなわち，τは物理ひょう動の黄経成分でありP_1, P_2 はそれぞれ瞬時の黄道極の方向の単位ベクトルの月の赤道座標系におけるx, y成分である．定義より，瞬時の月心座標系と黄道座標系を結ぶ回転行列は

$$\boldsymbol{R}_z\left(\tan^{-1}\frac{P_1}{P_2}\right)\boldsymbol{R}_x\left(\sin^{-1}\sqrt{P_1^2+P_2^2}\right)\boldsymbol{R}_z\left(☾+180^\circ+\tau-\tan^{-1}\frac{P_1}{P_2}\right)$$

と表わされる．ただし☾は月の平均黄経である．物理ひょう動は通常主要項（定数項を含む）と惑星項に分け，黄経の物理ひょう動，極の物理ひょう動について，それぞれ$\delta\tau$，$\Delta\tau$，δP_1, ΔP_1, δP_2, ΔP_2と記す.

本書では，月の慣性主軸の向きを公転運動と同時に解くことはしないで，次の解析的理論によって既知の量として与える.

(1) 月の平均黄経 M. Chapront - Touzé and J. Chapront : *Astronomy and Astrophysics*, vol.124, 50, 1983（第49項参照）

(2) 月の主問題（太陽項）から導かれるひょう動 M. Moons : *Ph. D.thesis*, Univ. of Namur. 1981

(3) 月の惑星項から導かれるひょう動 D. H. Eckhardt : *Proc. IAU Colloq*. No.63, 193, 1982

しかしながら，黄経の物理ひょう動の定数項は，その誤差がNewhallらが指適したように計算に不安定性をもたらすので，慎重に決めなければならない（X X Newhall, E. M. Standish , Jr. and J. G. Williams : *Astronomy and Astrophysics*, vol.125, 150, 1983）．本書では，黄経の物理ひょう動の定数項として，第21項に述べるように月の公転運動が，米航空宇宙局ジェット推進研究所(JPL)の暦，LE62に平均的に合うようにして求めた値177.″111を採用する.

物理ひょう動の主要項は，章動と同じくΩ, Γ'，☾（第4 9項参照）及びL, Γ（第42項参照)を用いて，以下のように表わされる.

			周期 (d)
$\delta\tau=$		$177.''111$	∞
	$+$	$90.689\ \sin\ (L-\Gamma)$	365.3
	$+$	$16.789\ \sin\ (-2\Gamma'+2\Omega)$	1095.2
	$-$	$16.793\ \sin\ (☾-\Gamma')$	27.6
	$+$	$9.938\ \sin\ (2L-2\Gamma')$	205.9
	$-$	$6.735\ \cos\ (-\Gamma'+\Omega)$	2190.4
	$+$	$4.130\ \sin\ (-☾+2L-\Gamma')$	31.8
	$-$	$3.463\ \sin\ (L-\Gamma')$	411.8
	$+$	$1.645\ \sin\ (2L-2\Omega)$	173.3
	$-$	$1.391\ \sin\ (-\Gamma'+\Omega)$	2190.4
	$-$	$1.153\ \sin\ (\Gamma-\Gamma')$	3232.9

		周期 (d)
	$+\ 1.002\ \cos\ (☾-\Omega)$	27.2
	$+\ 0.953\ \sin\ (L+\Gamma-2\Gamma')$	471.9
	$-\ 0.487\ \sin\ (2☾-2L)$	14.8
	$-\ 0.445\ \sin\ (2☾-2\Gamma')$	13.8
	$-\ 0.426\ \sin\ (-☾+2L-\Gamma')$	31.8
	$+\ 0.407\ \sin\ (2\Gamma-2\Gamma')$	1616.4

		周期 (d)
$\delta p_1 =$	$5562''.005\ \sin\ (☾-\Omega)$	27.2
	$+\ 124.482\ \sin\ (-\Gamma'+\Omega)$	2190.4
	$-\ 74.576$	∞
	$+\ 4.680\ \cos\ (☾-\Omega)$	27.2
	$+\ 2.910\ \sin\ (-☾+2L-\Omega)$	32.3
	$-\ 2.678\ \sin\ (2L-\Gamma'-\Omega)$	188.2
	$+\ 1.566\ \sin\ (2☾-\Gamma'-\Omega)$	13.7
	$+\ 1.244\ \sin\ (☾+L-\Gamma-\Omega)$	25.3
	$+\ 1.021\ \sin\ (-☾+L-\Gamma+\Omega)$	29.4
	$-\ 0.770\ \cos\ (☾-\Gamma')$	27.6
	$-\ 0.714\ \sin\ (☾-\Gamma')$	27.6

		周期 (d)
$\delta p_2 =$	$5539''.879\ \cos\ (☾-\Omega)$	27.2
	$-\ 75.397\ \cos\ (-\Gamma'+\Omega)$	2190.4
	$-\ 4.699\ \sin\ (☾-\Omega)$	27.2
	$-\ 3.199\ \cos\ (-☾+2L-\Omega)$	32.3
	$-\ 1.612\ \cos\ (2L-\Gamma'-\Omega)$	188.2
	$+\ 1.283\ \cos\ (☾+L-\Gamma-\Omega)$	25.3
	$-\ 1.090\ \cos\ (-☾+L-\Gamma+\Omega)$	29.4
	$+\ 0.780\ \sin\ (☾-\Gamma')$	27.6
	$-\ 0.720\ \cos\ (☾-\Gamma')$	27.6
	$+\ 0.476\ \cos\ (☾-2\Gamma'+\Omega)$	27.9
	$+\ 0.358$	∞

物理ひょう動の惑星項は次式で表わされる.

$$\Delta\tau = \sum_{j=1}^{72} c_j \sin\ (a_j + b_j d)$$
$$\Delta p_1 = \Delta q_1 \cos\ (☾-\Omega) + \Delta q_2\ \sin(☾-\Omega)$$
$$\Delta p_2 = \Delta q_2 \cos\ (☾-\Omega) - \Delta q_1\ \sin(☾-\Omega)$$

ただし

$$\Delta q_1 = 8''.188\ \sin(a_{30} + b_{30} d)$$

$$+\ 7''.484\ \sin(a_{31}+b_{31}d)$$
$$+\ 0.391\ \sin(a_{6}+b_{6}d)$$

$$\Delta q_2 = 8''.095\ \cos(a_{30}+b_{30}d)$$
$$-\ 7.478\ \cos(a_{31}+b_{31}d)$$

であり，dは2000年1月1.5日TD（JD2451545.0）からの時間経過を日単位で測ったものである．惑星項の係数 a_j, b_j, c_j の表を以下に掲げる．

j	c_j	a_j	b_j	周期（y）
1	$-0''.579$	$83^\circ.264$	$0^\circ.00051559$	$1911^y.6$
2	0.936	72.558	0.00055264	1783.5
3	0.175	13.921	0.00111582	883.3
4	−0.018	3.388	0.00151592	650.2
5	−0.033	152.636	0.00325894	302.4
6	14.403	119.743	0.00360965	273.1
7	0.233	25.520	0.00412528	238.9
8	−0.011	115.031	0.00691661	142.5
9	−0.105	137.974	0.00773492	127.4
10	−0.064	179.165	0.00946451	104.1
11	0.109	142.697	0.01028891	95.8
12	0.014	86.191	0.01354784	72.8
13	−0.015	65.945	0.01389856	70.9
14	0.010	13.450	0.01696813	58.1
15	0.013	104.195	0.01802383	54.7
16	−0.053	88.549	0.01979536	49.8
17	0.066	118.955	0.02057782	47.9
18	0.035	67.792	0.02418746	40.7
19	−0.026	127.544	0.02438046	40.4
20	0.043	51.872	0.02467930	39.9
21	−0.029	67.889	0.02509805	39.3
22	0.320	106.308	0.02654302	37.1
23	−0.023	172.534	0.02709565	36.4
24	−0.018	49.698	0.02827408	34.9
25	−0.108	80.856	0.02831274	34.8
26	0.026	54.868	0.03009913	32.7
27	−0.019	130.291	0.03345962	29.5
28	0.013	107.190	0.03536089	27.9
29	0.002	111.708	0.04886676	20.2

j	c_j	a_j	b_j	周期 (y)
30	8.″183	54.°954	0.°05295377	18.ʸ6
31	0.739	139.507	0.05299200	18.6
32	−0.001	177.584	0.05410786	18.2
33	0.159	98.089	0.05654095	17.4
34	0.347	112.262	0.06245654	15.8
35	−0.019	40.478	0.07278739	13.5
36	−0.099	141.048	0.08309117	11.9
37	−0.027	90.788	0.09746669	10.1
38	−0.023	30.355	0.10107637	9.8
39	0.043	109.912	0.10590754	9.3
40	−0.037	43.250	0.11804450	8.3
41	0.098	151.866	0.12165415	8.1
42	0.109	20.660	0.12491309	7.9
43	0.027	176.404	0.12577943	7.8
44	0.011	24.880	0.16618237	5.9
45	−0.024	119.855	0.18736963	5.3
46	0.011	65.732	0.21175009	4.7
47	0.016	73.616	0.21912088	4.5
48	−0.019	23.126	0.21917441	4.5
49	−0.750	152.514	0.24743358	4.0
50	−0.013	77.526	0.26801140	3.7
51	−0.031	165.280	0.27420664	3.6
52	−0.011	36.360	0.33232424	3.0
53	−0.847	85.039	0.33666318	2.9
54	−0.274	44.957	0.34077503	2.9
55	−0.228	116.640	0.34079882	2.9
56	−0.032	56.023	0.34440847	2.9
57	−0.011	79.304	0.34490030	2.9
58	0.019	132.001	0.34753478	2.8
59	0.037	4.752	0.34850995	2.8
60	−0.269	95.238	0.36908777	2.7
61	0.012	15.224	0.38888312	2.5
62	0.112	4.921	0.39911972	2.5
63	−0.015	146.675	0.44187516	2.2
64	−0.013	105.919	0.46157627	2.1
65	−0.023	108.331	0.49486720	2.0
66	−0.013	51.228	0.51544501	1.9

j	c_j	a_j	b_j	周期 (y)
67	$0''.372$	$81^\circ.522$	$0^\circ.61652135$	$1^y.6$
68	0.034	152.770	0.81942674	1.2
69	−0.032	55.066	0.86395496	1.1
70	−0.110	67.345	0.90251795	1.1
71	0.031	29.833	0.92315257	1.1
72	−0.025	163.231	1.23304270	0.8

天体位置の推算

7. 太陽系の重心

一般相対性理論によれば，太陽系をN個の質点系とみなした場合，太陽系の重心は$\boldsymbol{x}_K$を天体Kの太陽系重心座標系における空間座標（位置）とすると

$$\sum_K M^*_K \boldsymbol{x}_K = 0$$

によって定義される．これは運動量保存則から導かれる．ただし

$$M^*_K = M_K \left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(v_k^2 - \sum_{J \neq K} \frac{GM_J}{r_{JK}}\right)\right\}$$

は天体Kの静止質量M_Kと異なり位置及び速度の関数である．質量の保存則はM^*_Kを用いて

$$\sum_K M^*_K = \text{定数}$$

のように書ける．本書では，IAU (1976) 勧告に与えられた天体の質量とは静止質量を指すものと解釈する．重心の定義式は太陽系全天体の太陽系座標系における位置に関する拘束条件と考えられる．速度に関する拘束条件は重心の定義式を t について微分することによって得られる．これらの拘束条件を用いれば，太陽系全天体の位置及び速度を記述するのに必要な変数の数を減らすことができる．

本書で基礎とする太陽系天体の運動方程式の従属変数としては，太陽系座標系における位置ではなく次のものを採用する．

(1) 太陽，地球，月以外の天体K

次式で定義される太陽系座標系における太陽に対する同時相対位置（日心位置と呼ぶ）$\boldsymbol{r}_K$

$$\boldsymbol{r}_K \equiv \boldsymbol{x}_K - \boldsymbol{x}_\odot$$

(2) 地球，月

次式で定義される地球と月の古典的重心の日心位置$\boldsymbol{r}_B$と，月の太陽系座標系における地球に対する同時相対位置（地心位置と呼ぶ）$\boldsymbol{r}_{☾\oplus}$

$$\boldsymbol{r}_B \equiv \frac{M_☾ \boldsymbol{r}_☾ + M_\oplus \boldsymbol{r}_\oplus}{M_☾ + M_\oplus}, \qquad \boldsymbol{r}_{☾\oplus} \equiv \boldsymbol{r}_☾ - \boldsymbol{r}_\oplus$$

ただし，x_K, $x_\odot$は天体K及び太陽の太陽系座標系における位置，$M_☾$，$M_\oplus$は月及び地球の質量，$r_☾$，$r_\oplus$は月及び地球の日心位置である．地球と月だけ異なる扱いをしたのは単に数値的な配慮のためである．$r_{☾\oplus}$はあくまでも太陽系座標系における月と地球の相対位置であって，決して地球座標系における月の位置ではないことに注意しなければならない．

太陽・地球・月以外の太陽系天体と，地球－月重心の日心位置・速度及び月の地心位置・速度が与えられれば，上記の重心の定義式及びそれを t で微分したものを解くことにより，太陽の太陽系座標系における位置・速度が得られ，したがって，全天体の太陽系座標系における位置・速度が得られる．太陽系座標系における位置及び速度が得られれば，第17項及び第18項によって太陽系座標系における加速度が得られ，これを組み合わせることによって，上記の日心位置及び地心位置に対する加速度が得られる．

8. 初期条件の決定

一般に運動は運動方程式だけでは決まらず初期条件によって左右される．本来，初期条件は光学観測やレーダー，レーザーを用いた諸観測から直接決定すべきものであるが，本書では惑星及び月については，各種観測（特に月及び内惑星と地球間のレーダー，レーザー測距）をよく説明し得る暦の一つであるJPLの暦，DE118 / LE62 (E. M. Standish, Jr. and J. G. Williams:magnetic tape.1981) に，また小惑星についてはR. L. Duncombeの推算値(*A. P. A. E.*, vol, XX, Part II, 1969) に，1969～1981の期間でそれぞれ最もよく合うように最小2乗法を用いて初期条件を決定した．最小2乗法を用いる際に必要となる初期条件による偏微分値はブロック対角化した変分方程式を数値的に積分して求めた．

462, 463ページに本書の基礎となった計算の元期であるユリウス日2440400.5（1969年6月28日）における初期条件を掲げる．これらは第18項で述べた従属変数，すなわち太陽・地球・月以外の太陽系天体と地球－月重心の日心位置・速度及び月の地心位置・速度に対するものである．ここでは位置・速度以外に加速度の値も掲げている．また太陽系重心の日心位置・速度・加速度も参考のために掲げた．掲載値はJ2000.0における平均赤道直角座標系における値であり，単位は，位置は単位距離，速度は単位距離／日，加速度は単位距離／(日)^{2}である．

9. 天文定数系

本書では天文定数系としてIAU (1976) 天文定数系を採用する．勧告された数値のうち以下の数値は厳密なものとして扱う．

(1) 定義定数及び一次定数
(2) 地球＋月を除く惑星に対する太陽の質量比
(3) セレス，パラス，ベスタの太陽に対する質量比
(4) 月及び地球の赤道半径並びに重力場の球面調和係数

勧告に明示されていない数値については，第18項で述べた潮汐摩擦の係数を除いては0とみなす．したがって，ジュノーの質量や月・地球の高次球面調和係数などは0とする．天体の質量は第20項で述べた静止質量であり，光差で定義される天文単位系における光速度は，重力場のない真空中における光の速さであると解釈する．

以下に本書で用いた誘導定数の一部についてその数値を掲げる．計算の便宜上有効数字を過剰に採ってある．

単位距離	$c\tau_A = A =$	1.4959 7870 1495 3416…×10^{11}m
日心重力定数	$A^3k^2/D^2 = GS =$	1.3271 2438 5769 3865…×10^{20}m^{3}s^{-2}

地球に対する太陽の質量比 $(GS)/(GE) = S/E =$ 33 2945.9912 2915 96…
地球＋月に対する太陽の質量比 $(S/E)/(1+\mu) =$ 32 8900.5083 9785 58…

10. 計算の実行

本書に掲げられた数値は，第21項に述べた初期条件及び第22項に述べたIAU（1976）天文定数を用い，第17項；第18項に述べた運動方程式を数値積分して得られた太陽系座標系における15天体の位置・速度・加速度を基礎にして計算されたものである．数値積分法として，Graggの提唱した中点則による補外法を用いている(W. B. Gragg : *SIAM J. Numerical Analysis*, vol.2, 384, 1965)．積分の刻み幅は1日で，元期における許容誤差は10^{-22}とした．すべて演算は4倍精度（10進36桁）で行い，結果は各天体の位置・速度・加速度の毎日値を倍精度（10進18桁）で保存してある．したがって丸めの誤差は無視できる．一方，数値積分の打ち切り誤差の上界は，(元期における許容誤差)×(元期からの日数)^{2}で評価できる．この上界は元期から100年経過しても10^{-13}程度である．明らかに打ち切り誤差も十分小さい．任意の時刻における位置・速度などは，その時刻に最も近い4日分の位置・速度・加速度を用いてエルミート補間を行うことにより得ている．補間による誤差は最大のものでも月の毎半日における値で高々10^{-18}程度である．以上により数値計算によって生ずる誤差はすべて無視できることがわかる．

天体の視位置

11. 電磁波（光）の伝播

天体の視位置とは天体からの電磁波が観測者に届く方向を意味する．したがって媒体である電磁波の伝播の性質を知らなければならない．今の場合，伝播距離は考えている電磁波の波長に比べて十分長いので，幾何光学的取り扱いが行える．一般相対性理論では，幾何光線は長さ 0 の測地線で与えられる．長さ 0 とは測地線のどこでも線素の 2 乗が 0，すなわち

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$$

という拘束条件に従うことを意味する．天体の場合にならって重力場があるときの光の速度を

$$v = \frac{dx}{dt}$$

で定義すれば上記の拘束条件は

$$v^2 = c^2 - 4\phi\ (t,\ x)$$

と書ける．測地線の方程式を上記の条件に留意して書き直すと

$$\frac{dv}{dt} = 2a - \frac{4}{c^2}(a \cdot v)v$$

となる．拘束条件から逐次近似の手法を用いてこの方程式を次のように解くことができる．

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \Delta x(t) \\ v(t) = v_0 + \Delta v(\mathrm{t}) \end{cases}$$

ただし，$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}_0$ は初期条件から求められる定数ベクトルである．重力を及ぼす天体が1個のとき上式の付加項は

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{x}(t) = \delta \boldsymbol{x}(t) - 2(\boldsymbol{n}_0 \cdot \delta \boldsymbol{x}(t))\, \boldsymbol{n}_0 \\ \Delta \boldsymbol{v}(t) = \delta \boldsymbol{v}(t) - 2(\boldsymbol{n}_0 \cdot \delta \boldsymbol{v}(t))\, \boldsymbol{n}_0 \end{cases}$$

と書ける．ここに $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{v}_0 / c$ で $\delta \boldsymbol{x}$，$\delta \boldsymbol{v}$ は

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{x}(t) = \dfrac{2GM}{c^2} \dfrac{\boldsymbol{s}_0}{s_0^2} \times \left\{ (r - r_0)\boldsymbol{n}_0 + \ln \left| \dfrac{r + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_0}{r_0 + \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{n}_0} \right| \boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{s}_0 - c\hat{\boldsymbol{r}}_0 (t - t_0) \right\} \\ \delta \boldsymbol{v}(t) = \dfrac{2GM}{c} \dfrac{\boldsymbol{s}_0}{s_0^2} \times (\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{r}}_0) \end{cases}$$

と書ける．ただし M は重力を及ぼす天体の質量であり，その天体の t_0 における位置を $\boldsymbol{X}_0$ と書いたとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{X}_0, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 (t - t_0), \quad \boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{n}_0, \quad r_0 = |\boldsymbol{r}_0| \\ r = |\boldsymbol{r}|, \quad s_0 = |\boldsymbol{s}_0|, \quad \hat{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{r}_0 / r_0, \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r \end{cases}$$

と書くものとする．重力を及ぼす天体の数が増えても，この次数では単に付加項を各天体について重ね合わせるだけで正しい答が得られる．

12. 光差方程式

第24項で求めた解と拘束条件により，時空の1点 $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$ から発した光が他の点 $(t_2, \boldsymbol{x}_2)$ に到達した時，次の関係式を満たすことが示される．

$$c(t_2 - t_1) = r_{12} + \sum_{J \neq 1,2} \frac{2GM_J}{c^2} \ln \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{12}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{12}} \right|$$

ただし

$$r_{12} = |\boldsymbol{r}_{12}| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \quad r_{1J} = |\boldsymbol{r}_{1J}| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_J|, \quad r_{2J} = |\boldsymbol{r}_{2J}| = |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_J|$$

であり，$\boldsymbol{x}_J$ は重力を及ぼす天体 J の t_2 における太陽系座標系での位置である．この式を光差方程式と呼ぶ．光差方程式の右辺の付加項は，重力場の中で光がゆっくり進むための遅れを表している．両点 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 及び重力を及ぼす天体の運動と光が到達した時刻 t_2 が与えられれば，光差方程式を反復的に解くことにより光が発した時刻 t_1 を求めることができる．Newton 法を用いれば反復公式は

$$\begin{cases} t_1^{(0)} = t_2 \\ t_1^{(n+1)} = t_1^{(n)} + \dfrac{c(t_2 - t_1^{(n)}) - r_{12}^{(n)} - \sum\limits_{J \neq 1,2} \dfrac{2GM_J}{c^2} \ln \left| \dfrac{r_{1J}^{(n)} + r_{2J} + r_{12}^{(n)}}{r_{1J}^{(n)} + r_{2J} - r_{12}^{(n)}} \right|}{c + \boldsymbol{r}_{12}^{(n)} \cdot \boldsymbol{v}_1^{(n)} / r_{12}^{(n)}} \end{cases} \quad (n = 0, 1, \cdots\cdots)$$

で与えられる．ただし，肩の (n) は $t_1 = t_1^{(n)}$ とした値という意味であり，$\boldsymbol{v}_1$ は点1の速度である．

光差方程式では付加項の和において点1及び2は除くものとする．したがって，例えば本書に掲げる太陽の地心視位置には，太陽及び地球自身による重力場の影響は考慮されていない．

13. 光の曲がり

光差方程式が解ければ，光が到達した点 2における光の来る方向ベクトル $\hat{\boldsymbol{d}}_{12}$ は

$$\hat{\boldsymbol{d}}_{12} = \hat{\boldsymbol{r}}_{12} + \left(\sum_{J \neq 1,2} \frac{2GM_J}{c^2 r_{2J}} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{r}}_{1J} \times \boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J} + \hat{\boldsymbol{r}}_{1J} \cdot \boldsymbol{r}_{2J}} \right) \times \hat{\boldsymbol{r}}_{12}$$

で与えられる．ただし∧の付いたベクトルは，例えば $\hat{r}_{12} = r_{12} / | r_{12} |$ のように単位ベクトルを示す．

上式の右辺の付加項は重力によって光が曲げられる効果を表している．第25項と同様に付加項の和において点1，2を除くものとする．

恒星など太陽系外天体の場合 $\hat{r}_{12}, \hat{r}_{1J}$ の代わりに，固有運動，年周視差を補正した後の方向ベクトル $\hat{d}_*$ を用いることにより，点 2における光の来る方向ベクトルは

$$\hat{d}_{12} = \hat{d}_* + \left(\sum_{J \neq 1,2} \frac{2GM_J}{c^2 r_{2J}} \cdot \frac{\hat{d}_* \times r_{2J}}{r_{2J} + \hat{d}_* \cdot r_{2J}} \right) \times \hat{d}_*$$

で与えられる．

14. 光行差

光行差とは，例えば太陽系座標系から地球座標系へ，などの座標系の変換を行うときに視位置に現れる差の総称である．一般に座標系の間の変換式は第15項で述べたように複雑であるが，どちらかの座標系の原点近傍では各座標軸は直線で近似できる．このとき変換式は，4次元行列によって表される．この行列は特殊相対性理論では Lorentz 行列となる．一般相対性理論では第15項で述べたように，Fermi-Walker の移動方程式を解くことによってこの変換行列が求められる (M. - K. Fujimoto, S. Aoki, K. Nakajima, T. Fukushima and S. Matsuzaka : *Proc. Symposium No.5* : *Geodetic Applications of Radio Interferometry*, NOAA Tech.Report NOS 95 NGS 24, 26, 1982)．その行列の表式を見ると空間座標については Lorentz 変換に測地線回転を加えたものとなっている．測地線回転のうち永年項(測地線歳差)は，すでに一般歳差の数値に含まれている(Lieske 他，1977)．また周期項(測地線章動)は十分小さい．したがって空間座標に関する限り，Lorentz 変換を行うだけでよいことがわかる．

Lorentz 変換によって光の方向ベクトルは次のように変換される(C. A. Murray, *Mon. Not. Royal Astr.*, vol.195, 639, 1981)

$$\hat{d}'_{12} = \frac{c\,\gamma_2 \hat{d}_{12} + \left[1 + \dfrac{v_2 \cdot \hat{d}_{12}}{c(1+\gamma_2)} \right] v_2}{c + v_2 \cdot \hat{d}_{12}}, \qquad \gamma_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}$$

ただし，v_2 は点2における観測者の太陽系座標系での速度であり，肩の ′ は光行差の補正を施したという意味である．

15. TDB，TDT及びTAI

座標系の変換は空間座標のみならず時間座標の変化も引き起こす．したがって地球座標系の時間座標 TDT も，太陽系座標系の時間座標 TDB に対して変動している．本書の扱う精度では地心の TDT は，地球重心の軌跡に沿って動く時計の指し示す時刻 $\tau_\oplus$ と定数倍だけ歩度が違うことを除いて同一視できる．$\tau_\oplus$ とは地心の固有時にほかならないから $(cd\tau_\oplus)^2 = -(ds_\oplus)^2$ から，$\tau_\oplus$ を決める方程式は

$$\left(\frac{cd\tau_\oplus}{dt} \right)^2 = -g_{00} - 2g \cdot v_\oplus - \left(1 + \frac{2\phi_\oplus}{c^2}\right) v_\oplus^2$$

と書ける．これを書き直すと

$$\frac{d\tau_\oplus}{dt} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_\oplus^2}{2} + \phi_\oplus \right)$$

となる．ただし，$v_{\oplus}$は地心の太陽系座標系における速度，$\phi_{\oplus}$は地心における地球以外の天体によるNewtonポテンシャル，tはTDBである．この式を積分すれば$\tau_{\oplus}$と t の関係式は得られる．一方，IAU (1976)勧告5(c)からTDTとTDBの差は周期変動しか許されない．したがって，dTDT／dTDBの長期にわたる平均値が 1 に，等しくなるようにTDTを決めなければならない．このことから<>pを周期項だけ採る作用素とすれば

$$\frac{d\,\mathrm{TDT}}{d\,\mathrm{TDB}} = 1 + \frac{1}{c^2}\left\langle \frac{v_{\oplus}^2}{2} + \phi_{\oplus} \right\rangle p$$

となる．これを積分して一番大きい項（地球がだ円運動していることに起因する）だけ拾うと

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + 1.66\mathrm{ms}\ \sin g \quad (\mathrm{ms} : \mathrm{milli\ second} = 10^{-3}\mathrm{second})$$

となる．ただし g は地球－月重心の平均近点離角である．本書では上式によって地心視位置に対するTDTとTDBの変換を行っている．上式で無視されているほかの周期項による誤差は，最大でも月の赤経で$1\,\mu s$を越えない．

国際原子時（TAI）は地球上における多くの原子時計を平均して得られる原子時であり，天文現象を観測して求められる天文時であるTDTとは，理論上その差は常に一定でなければならない．またIAU (1976) 勧告5(a)によれば1977年1月1日0^{h}TAIにおいて厳密に

$$\mathrm{TDT} - \mathrm{TAI} = 32\overset{\mathrm{s}}{.}184$$

でなければならないとされている．したがってTAIとTDTの関係は常に上式で表される．

16．太陽系天体の地心視位置の計算

太陽・月・惑星・小惑星など太陽系天体の地心視位置は，光の到達する点 2 を地心と考えることにより以下の手順で求められる．

(1) 地心視位置の時刻はすべてTDTで記述される．したがって，まず与えられたTDTから対応するTDBを求める（第28項）．これが光差方程式（第25項）の t_2 である．
(2) 天体の運動が与えられれば，光差方程式をNewtonの反復公式により解いて t_1 を求める（第25項）．
(3) 重力場による光の曲がりの効果を補正した方向ベクトル $\hat{\boldsymbol{d}}_{12}$ を求める（第26項）．
ここまでは太陽系座標系で記されている．
(4) Lorentz変換を行い，光行差を補正した方向ベクトル $\hat{\boldsymbol{d}}'_{12}$ を求める（第27項）．
ここからは地球座標系で表される．
(5) 歳差・章動の回転行列を掛け，瞬時の地球真赤道座標系での方向ベクトルを得る．
(6) 球面座標（赤経，赤緯）に変換する．

本書に掲げる太陽系天体の地心視位置には，太陽・木星・土星・天王星・海王星の重力場による影響が考慮されている．

17．太陽系外天体の地心視位置の計算

恒星など太陽系外の天体の地心視位置は，光の到達する点 2 を地心と考えることにより以下の手順で求められる．

(1) 平均位置の球面座標（赤経・赤緯）を方向ベクトルに変換する．
(2) 固有運動（もしあれば視線速度も）を用いて恒星の速度ベクトルを計算する．
(3) 固有運動による補正量を加える．
(4) 地球の太陽系座標系における位置を用いて年周視差を補正した後，適当な定数を掛けて単位ベクトルとする．
(5) こうして得られた太陽系座標系における方向ベクトルを$\hat{\boldsymbol{d}}_*$とし，太陽系天体の重力場による光の曲がりの効果を補正する（第26項）．
(6) 第29項(4)と同様に Lorentz 変換を行い，光行差を補正する．
(7) 歳差・章動の回転行列を掛け，瞬時の地球真赤道座標系での方向ベクトルを得る．
(8) 球面座標（赤経・赤緯）に変換する．

太陽系外天体の場合，TDT と TDB との差は無視できる．

18. 測定学的位置の計算

冥王星や小惑星など，星図や星表と比較することが多い天体については，その視位置がその天体の視位置と一致するような仮想的な星（固有運動・視線速度・年周視差は無いものとする）の元期における平均位置をもって，その天体の位置と定義すると便利なことが多い．これをその天体の測定学的位置と呼ぶ．太陽系天体の地心測定学的位置は以下の手順で求められる．
(1) TDT を TDB に変換する．
(2) 光差方程式を解く．
(3) 仮想的な星の方向ベクトル$\hat{\boldsymbol{d}}_*$は

$$\hat{\boldsymbol{d}}_*=\hat{\boldsymbol{r}}_{12}+\left(\sum_{J\neq 1,2}\frac{2GM_J}{c^2r_{2J}}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}+\hat{\boldsymbol{r}}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}-\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\times\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}+\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}\right]\right)\times\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$$

で与えられる．

(4) $\hat{\boldsymbol{d}}_*$を球面座標（赤経・赤緯）に変換する．

19. 地球上の観測者の位置，速度，TDB

観測者が観測する視位置（測心視位置と呼ぶ）を得るには，観測者の地球座標系あるいは太陽系座標系における位置・速度を知らなければならない．

地球上の観測者の瞬時の地球真赤道座標系における位置r_Dは，観測者の経度λ，緯度φ，準拠だ円体からの高さhが与えられれば次の一連の式により得られる．

$$\boldsymbol{r}_D=\boldsymbol{R}_z\,(-\mathrm{GAST})\,\boldsymbol{R}_x\,(y)\,\boldsymbol{R}_y\,(x)\,\boldsymbol{r}_E$$

$$\boldsymbol{r}_E=\begin{pmatrix}(N+h)\cos\varphi & \cos\lambda\\(N+h)\cos\varphi & \sin\lambda\\(N(1-e^2)+h)\sin\varphi & \end{pmatrix}$$

ここに$\boldsymbol{r}_E$は地球に固定した．すなわち地球の慣性主軸を各空間座標軸に採った座標系での観測者の位置である．

$\boldsymbol{R}_x(\theta)$，$\boldsymbol{R}_y(\theta)$，$\boldsymbol{R}_z(\theta)$はそれぞれx軸，y軸，z軸の周りにθだけ回転させる回転行列で，次式で与えられる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_x(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_y(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{R}_z(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

またGASTはグリニジ視恒星時で，UT1がわかれば次式によって求められる．

$$\mathrm{GAST}=12^{\mathrm{h}}+\mathrm{UT1}+\alpha_{\mathrm{m}}+\Delta\phi\cos\varepsilon$$

ただし，α_{m}はグリニジ基準天体の赤経でありその値は本文に掲げてある．x，yは極運動であり，その値はUT1と同様国際地球回転事業（IERS）中央局，あるいは国際極運動事業（IPMS）中央局から発表されている．極運動の大きさは $1''$ 以下と小さいので $\cos x=1$，$\sin x=x$ などと近似できる．Nは卯酉線曲率半径と呼ばれ次式で表される．

$$N=\frac{a_{\oplus}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

ただし，$a_{\oplus}$は地球の赤道半径，eは地球の回転だ円体の離心率でこれらの値はIAU(1976)天文定数系に与えられている f から $e^2=f(2-f)$によって得られる．

元期における地球平均赤道座標系における観測者の位置 $\boldsymbol{r}$ は，元期から瞬時までの歳差・章動の回転行列を$\boldsymbol{A}$とすると

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{r}_D$$

として得られる．$\boldsymbol{A}$は直交行列なので$\boldsymbol{A}$の逆行列$\boldsymbol{A}^{-1}$は転置行列$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$で置き替えられる．本文の直角座標恒星日日数は年央から瞬時までの回転行列である．

地球座標系における観測者の速度は上記の一連の式を，それぞれTDTで微分することによって得られる．一般に極運動及び歳差・章動の変化率は地球の自転速度に比べて通常無視できる．この仮定のもとで，元期における地球平均赤道座標系における観測者の速度は次の一連の式で与えられる．

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\,\mathrm{TDT}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\frac{d\boldsymbol{r}_D}{d\,\mathrm{TDT}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}_D}{d\,\mathrm{TDT}}=\frac{d\,\mathrm{GAST}}{d\,\mathrm{TDT}}\begin{pmatrix} -\sin\mathrm{GAST} & -\cos\mathrm{GAST} & 0 \\ \cos\mathrm{GAST} & -\sin\mathrm{GAST} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{R}_x(y)\boldsymbol{R}_y(x)\boldsymbol{r}_E$$

$$+\boldsymbol{R}_z(-\mathrm{GAST})\boldsymbol{R}_x(y)\boldsymbol{R}_y(x)\frac{d\boldsymbol{r}_E}{d\,\mathrm{TDT}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}_E}{d\,\mathrm{TDT}}=v_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda+v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+v_h\boldsymbol{e}_h$$

ただしv_λ，v_φ，v_hはそれぞれ観測者の地球に対する速度（対地速度と呼ぶ）の経度成分，緯度成分，鉛直成分であり，

$$e_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad e_h = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

である．

地球の自転速度変動及び章動の変化率を無視すればグリニジ視恒星時の変化率は

$$\frac{d\,\mathrm{GAST}}{d\,\mathrm{TDT}} = 1.0027\,379\cdots\cdots \times 360^\circ/\text{日}$$

と一定値で与えられる．

元期の地球平均赤道座標系における観測者の位置 $\boldsymbol{r}$ 及び速度 $d\boldsymbol{r}/d\,\mathrm{TDT}$ は，上のように与えられる．元期の太陽系平均赤道座標系における観測者の位置 $\boldsymbol{x}$ 及び速度 $\boldsymbol{v}$ は，同座標系における地球の位置 $\boldsymbol{x}_\oplus$ 及び速度 $\boldsymbol{v}_\oplus$ から

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\oplus + \boldsymbol{r} + \dfrac{1}{2c^2}(\boldsymbol{v}_\oplus \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v}_\oplus \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\oplus + \dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\,\mathrm{TDT}} + \dfrac{1}{2c^2}\left(\boldsymbol{v}_\oplus \cdot \dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\,\mathrm{TDT}}\right)\boldsymbol{v}_\oplus \end{cases}$$

として得られる．また時刻 TDT における観測者の TDB は，第 28 項に与えられた同じ TDT における地心の TDB を $\mathrm{TDB}_\oplus$ とすると

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDB}_\oplus + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_\oplus \cdot \boldsymbol{r})$$

として与えられる．

20．測心視位置及び測心測定学的位置の計算

測心視位置及び測心測定学的位置を厳密に求めるには，第 29，30 項あるいは第 31 項において，光の到達する点 2 を地心の代わりに観測者と考えて同様に計算すればよい．すなわち TDT から TDB の変換には第 28 項の式の代わりに第 32 項の式を用い，t_2 における位置及び速度は地球の位置 $\boldsymbol{x}_\oplus$，速度 $\boldsymbol{v}_\oplus$ の代わりに，第 32 項で与えられる観測者の位置 $\boldsymbol{x}$，速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて計算を行えば視差の影響などは自然に補正される．

測心視位置を地心視位置に補正量を施すことによって求める場合，幾何学的な視差，速度差による光差や方向の補正以外に，地球の重力場の影響により次の補正が必要である．

$$\Delta t_1 = 0.0296\mathrm{ns}\left[-\ln\pi_1 - 2\ln\left(\cos\frac{\zeta_1}{2}\right)\right]$$

(ns : nano second $=10^{-9}$ second)

$$\Delta z_1 = -0.''0002\,82\tan\frac{\zeta_1}{2}$$

ここに Δt_1 は光差方程式の解 t_1 に，Δz_1 は天体 1 の測心視天頂距離 z_1 にそれぞれ加えるべき補正量であり，π_1 は天体 1 の幾何学的地心視差（単位はラジアン），ζ_1 は天体 1 の地心視天頂距離である．これらの最大値はそれぞれ，冥王星の出没時で $\Delta t_1 = 0.69$ns，天体の出没時で、$\Delta z_1 = 0.''0002\,82$ と小さいので通常は無視できる．

JD 2440400.5 TDB における太陽系天体の位置，速度，加速度

		X	Y	Z
水　星	位　置	$3.572\,602\,101\,163\,933\,07\times10^{-1}$	$-9.154\,906\,534\,395\,997\,77\times10^{-2}$	$-8.598\,100\,409\,097\,533\,47\times10^{-2}$
	速　度	$3.367\,845\,903\,995\,683\,07\times10^{-3}$	$2.488\,934\,273\,161\,458\,51\times10^{-2}$	$1.294\,407\,159\,856\,398\,91\times10^{-2}$
	加速度	$-1.946\,628\,645\,980\,829\,51\times10^{-3}$	$4.988\,279\,090\,506\,533\,75\times10^{-4}$	$4.684\,904\,607\,115\,317\,73\times10^{-4}$
金　星	位　置	$6.082\,494\,278\,469\,591\,75\times10^{-1}$	$-3.491\,324\,612\,472\,220\,68\times10^{-1}$	$-1.955\,443\,255\,989\,511\,17\times10^{-1}$
	速　度	$1.095\,242\,037\,917\,873\,41\times10^{-2}$	$1.561\,250\,660\,004\,250\,59\times10^{-2}$	$6.328\,876\,441\,778\,507\,02\times10^{-3}$
	加速度	$-4.663\,487\,914\,801\,831\,93\times10^{-4}$	$2.676\,830\,891\,618\,808\,31\times10^{-4}$	$1.499\,256\,447\,458\,130\,46\times10^{-4}$
地　球－月重心	位　置	$1.160\,148\,907\,734\,459\,38\times10^{-1}$	$-9.266\,055\,611\,194\,495\,46\times10^{-1}$	$-4.018\,062\,653\,091\,071\,19\times10^{-1}$
	速　度	$1.681\,162\,009\,160\,730\,65\times10^{-2}$	$1.743\,130\,785\,972\,184\,26\times10^{-3}$	$7.559\,750\,820\,974\,437\,55\times10^{-4}$
	加速度	$-3.267\,545\,372\,165\,589\,93\times10^{-5}$	$2.609\,726\,149\,091\,056\,03\times10^{-4}$	$1.131\,662\,315\,912\,809\,42\times10^{-4}$
火　星	位　置	$-1.146\,886\,047\,219\,594\,30\times10^{-1}$	$-1.328\,366\,527\,996\,087\,80\times10^{0}$	$-6.061\,551\,871\,597\,142\,18\times10^{-1}$
	速　度	$1.448\,200\,486\,464\,582\,50\times10^{-2}$	$2.372\,847\,665\,780\,023\,22\times10^{-4}$	$-2.837\,487\,521\,594\,356\,22\times10^{-4}$
	加速度	$1.080\,143\,622\,463\,250\,04\times10^{-5}$	$1.251\,190\,351\,107\,937\,24\times10^{-4}$	$5.709\,410\,434\,942\,350\,40\times10^{-5}$
木　星	位　置	$-5.384\,208\,382\,218\,410\,80\times10^{0}$	$-8.312\,495\,638\,039\,423\,12\times10^{-1}$	$-2.250\,979\,160\,411\,759\,72\times10^{-1}$
	速　度	$1.092\,366\,783\,294\,747\,41\times10^{-3}$	$-6.523\,294\,365\,744\,989\,98\times10^{-3}$	$-2.823\,012\,295\,017\,596\,34\times10^{-3}$
	加速度	$9.835\,320\,383\,022\,141\,89\times10^{-6}$	$1.519\,983\,865\,940\,828\,36\times10^{-6}$	$4.119\,587\,537\,801\,705\,52\times10^{-7}$
土　星	位　置	$7.889\,889\,793\,131\,377\,68\times10^{0}$	$4.595\,709\,890\,417\,302\,21\times10^{0}$	$1.558\,429\,239\,818\,211\,94\times10^{0}$
	速　度	$-3.217\,205\,374\,497\,601\,97\times10^{-3}$	$4.330\,631\,938\,957\,288\,15\times10^{-3}$	$1.926\,416\,740\,481\,353\,37\times10^{-3}$
	加速度	$-2.931\,940\,992\,202\,622\,81\times10^{-6}$	$-1.709\,131\,193\,448\,771\,06\times10^{-6}$	$-5.793\,947\,695\,080\,606\,70\times10^{-7}$
天王星	位　置	$-1.826\,989\,233\,032\,837\,56\times10^{+1}$	$-1.162\,732\,722\,166\,726\,81\times10^{0}$	$-2.503\,762\,939\,264\,113\,28\times10^{-1}$
	速　度	$2.215\,450\,693\,361\,074\,42\times10^{-4}$	$-3.767\,654\,906\,248\,792\,32\times10^{-3}$	$-1.653\,244\,290\,237\,731\,09\times10^{-3}$
	加速度	$8.897\,707\,794\,267\,709\,71\times10^{-7}$	$5.865\,627\,314\,639\,631\,65\times10^{-8}$	$1.311\,387\,170\,938\,365\,08\times10^{-8}$
海王星	位　置	$-1.605\,950\,361\,840\,539\,04\times10^{+1}$	$-2.394\,293\,875\,588\,867\,29\times10^{+1}$	$-9.400\,426\,914\,552\,282\,19\times10^{0}$
	速　度	$2.643\,125\,277\,555\,432\,83\times10^{-3}$	$-1.503\,487\,460\,898\,585\,12\times10^{-3}$	$-6.812\,687\,496\,965\,713\,39\times10^{-4}$
	加速度	$1.776\,439\,344\,766\,266\,83\times10^{-7}$	$2.570\,272\,649\,689\,622\,95\times10^{-7}$	$1.009\,541\,366\,429\,380\,58\times10^{-7}$

表値は2000年1月1.5日TDB（JD 245 1545.0）の平均赤道直角座標系における日心座標（月だけは地心座標）である．単位については，位置は単位距離，速度は単位距離／日，加速度は単位距離／（日）^{2}である．

JD 2440400.5 TDB における太陽系天体の位置，速度，加速度

		X	Y	Z
冥王星	位置	$-3.048\,800\,624\,201\,038\,73 \times 10^{+1}$	$-8.732\,159\,329\,356\,213\,39 \times 10^{-1}$	$8.911\,354\,777\,093\,433\,90 \times 10^{0}$
	速度	$3.225\,418\,670\,279\,358\,49 \times 10^{-4}$	$-3.148\,760\,940\,143\,077\,99 \times 10^{-3}$	$-1.080\,185\,854\,843\,202\,73 \times 10^{-3}$
	加速度	$2.887\,029\,478\,760\,799\,05 \times 10^{-7}$	$1.059\,798\,504\,023\,187\,60 \times 10^{-8}$	$-8.133\,850\,422\,173\,770\,30 \times 10^{-8}$
月（地心）	位置	$-8.081\,773\,256\,883\,372\,91 \times 10^{-4}$	$-1.994\,630\,098\,694\,970\,98 \times 10^{-3}$	$-1.087\,262\,767\,099\,564\,80 \times 10^{-3}$
	速度	$6.010\,848\,521\,872\,791\,17 \times 10^{-4}$	$-1.674\,454\,929\,155\,643\,28 \times 10^{-4}$	$-8.556\,208\,533\,966\,646\,22 \times 10^{-5}$
	加速度	$5.230\,252\,802\,086\,975\,61 \times 10^{-5}$	$1.269\,212\,400\,188\,539\,83 \times 10^{-4}$	$6.936\,851\,014\,904\,609\,20 \times 10^{-5}$
セレス	位置	$1.438\,685\,139\,818\,863\,00 \times 10^{0}$	$-2.204\,372\,463\,061\,919\,35 \times 10^{0}$	$-1.326\,397\,635\,462\,962\,34 \times 10^{0}$
	速度	$8.465\,398\,996\,946\,507\,12 \times 10^{-3}$	$4.684\,255\,531\,065\,695\,90 \times 10^{-3}$	$4.661\,615\,568\,691\,125\,76 \times 10^{-4}$
	加速度	$-1.662\,150\,689\,472\,401\,60 \times 10^{-5}$	$2.547\,503\,356\,251\,221\,75 \times 10^{-5}$	$1.532\,828\,053\,987\,649\,11 \times 10^{-5}$
パラス	位置	$2.038\,323\,330\,512\,676\,39 \times 10^{-1}$	$-3.209\,618\,967\,729\,169\,26 \times 10^{0}$	$6.238\,449\,277\,975\,908\,35 \times 10^{-1}$
	速度	$8.534\,314\,567\,860\,302\,64 \times 10^{-3}$	$-8.606\,609\,000\,382\,655\,69 \times 10^{-4}$	$-3.928\,945\,796\,499\,235\,52 \times 10^{-4}$
	加速度	$-1.714\,875\,305\,288\,524\,39 \times 10^{-6}$	$2.701\,912\,747\,039\,418\,03 \times 10^{-5}$	$-5.250\,475\,894\,048\,023\,93 \times 10^{-6}$
ジュノー	位置	$4.612\,079\,678\,928\,124\,46 \times 10^{-1}$	$-3.006\,100\,211\,838\,361\,23 \times 10^{0}$	$-5.801\,617\,590\,542\,141\,47 \times 10^{-1}$
	速度	$8.395\,455\,280\,199\,492\,68 \times 10^{-3}$	$3.111\,908\,229\,860\,681\,06 \times 10^{-3}$	$2.730\,551\,225\,322\,952\,69 \times 10^{-4}$
	加速度	$-4.597\,745\,868\,130\,688\,22 \times 10^{-6}$	$2.997\,779\,697\,151\,397\,73 \times 10^{-5}$	$5.786\,041\,408\,760\,355\,64 \times 10^{-6}$
ベスタ	位置	$1.823\,755\,342\,364\,812\,34 \times 10^{-1}$	$2.386\,627\,749\,881\,231\,14 \times 10^{0}$	$9.245\,949\,791\,495\,049\,86 \times 10^{-1}$
	速度	$-1.017\,449\,878\,781\,931\,03 \times 10^{-2}$	$4.149\,088\,818\,610\,045\,71 \times 10^{-5}$	$1.344\,163\,765\,928\,235\,02 \times 10^{-3}$
	加速度	$-3.191\,739\,026\,142\,295\,16 \times 10^{-6}$	$-4.180\,281\,841\,385\,097\,25 \times 10^{-5}$	$-1.619\,456\,898\,403\,852\,57 \times 10^{-5}$
太陽系重心	位置	$-4.518\,167\,921\,508\,577\,70 \times 10^{-3}$	$-7.739\,225\,797\,347\,368\,53 \times 10^{-4}$	$-2.657\,115\,985\,893\,311\,44 \times 10^{-4}$
	速度	$3.527\,145\,471\,011\,230\,16 \times 10^{-7}$	$-5.179\,459\,250\,986\,142\,24 \times 10^{-6}$	$-2.229\,815\,779\,121\,679\,27 \times 10^{-6}$
	加速度	$7.030\,747\,368\,694\,631\,74 \times 10^{-9}$	$2.547\,101\,847\,740\,482\,85 \times 10^{-9}$	$1.039\,373\,910\,611\,561\,34 \times 10^{-9}$

表値は2000年1月1.5日 TDB（JD 245 1545.0）の平均赤道直角座標系における日心座標（月だけは地心座標）である．単位については，位置は単位距離，速度は単位距離／日，加速度は単位距離／（日）^{2} である．