鹿島技術研究所年報
第48号 2000年9月30日

台風時の風向風速を評価する大気境界層モデル

Model of Planetary Boundary Layer to Estimate Typhoon Wind Speed and Direction

吉 田 正 邦
太 田 勝 矢
高 木 賢 二

要　約

本研究は台風時の風向風速の円柱座標による解析を目的とする。大気境界層モデルの検討経過を詳細に示すには,運動方程式の検討,境界条件の設定,地表の凹凸に対応する座標変換など,膨大な記述が必要である。このため,本論文は台風の風向風速評価への適用を考えてMellorらが提案するLevel 2(1/2)モデルの乱流輸送量,及びKlemp and Durranが提案する上部境界での鉛直方向風速成分を透過させる手法のデカルト座標から円柱座標への変換に限定している。付録には,円運動の解析に適した円柱座標への変換公式,及び地表面凹凸の表現に必要な鉛直方向の座標を一般化するｚ*座標への変換公式を示す。円柱座標の乱流輸送方程式は,台風特性の評価で重要な最大風速の発生位置(最大旋衡風速半径近傍：台風中心から約 10km)を考えたorder 検討から,半径方向距離の２乗以上のべき乗項を省略した近似式を示した。即ち,台風中心近傍を解析するには高次項の追加が必要である。上部境界で鉛直方向風速成分を除去する円柱座標の式は,Klemp and Durran(1983)が提案するデカルト座標の波数を(円周方向波数/半径方向距離)に置き換えるだけで良いことが分かった。

目　次

Ⅰ. はじめに

本研究は,同心円状となる台風気圧場が支配的な半径 200km 程度の領域を対象にした台風時の風向風速を円柱座標のマクロモデルで解析することを目的とする。孟ら[1]も本研究と同様な手法で実用的な台風モデルを誘導しているが,そのモデルは中立安定状態(温位変化なし)の平坦な地形(地表面粗度は考慮)を対象にしている。これに対して,本研究は,温位,湿度による変化及び山岳や局所地形の影響も調べることが可能な,より複雑な解析を目指している。

マクロモデルは既に当研究所で実用化しているが,日常的な大気環境を解析するデカルト(平行)座標によるものであり,円運動が支配的な台風を対象にすると円柱座標への変換が必要である。

大気境界層流の解析式を詳細に示すには,運動方程式の検討,境界条件の設定,地表の凹凸に対応する座標変換など膨大な記述が必要である。このため,紙面の制約がある本論文では平均成分の境界層近似式,Mellorら[2~5]によるLevel 2(1/2)モデルの乱流輸送量及びフーリエ手法を用いるKlemp and Durran[6]による上部境界条件式の円柱座標への変換だけを示す。即ち,温度と湿度が問題となる下部境界条件式の作成及び地表面の凹凸に対応する付録Bに示したz*座標とと呼ばれる座標系による更なる変換は省略している。

キーワード：台風数値計算，モデル，
風向，風速，温度

Ⅱ. 基礎方程式

非圧縮性の Boussinesq 近似を前提にアンサンブル平均した平均成分(デカルト座標)の基礎式は,付録 A の微分演算子を併用すると次のようになる(微分だけのテンソル式は文献 2～5 を参照)。なお,円柱座標で表わすには付録Aに示す長さ係数を適用する。

$$\nabla \bullet \vec{U} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \partial \vec{U} / \partial t + \vec{U} \bullet \nabla \vec{U} &= -\overline{\vec{u} \bullet \nabla \vec{u}} \\ &\quad - (1/\rho)\nabla P - \vec{k}(\vec{f} \times \vec{U}) - \beta H \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{U} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\partial H / \partial t + \vec{U} \bullet \nabla H = -\overline{\vec{u} \bullet \nabla h} + \alpha \nabla^2 H \tag{3}$$

また,変動３次項などを近似して完結化する前の乱流輸送量の基礎式は連続方程式(式(1)参照)を適用すると次のようになる。

$$\begin{aligned} &\left(\partial \overline{u_i u_j} / \partial t + \vec{U} \bullet \nabla \overline{u_i u_j}\right) + \overline{\vec{u} \bullet \nabla (u_i u_j)} \\ &= -\left(\overline{u_i \vec{u}} \bullet \nabla U_j + \overline{u_j \vec{u}} \bullet \nabla U_i\right) - 2\nu \overline{\nabla u_i \bullet \nabla u_j} \\ &\quad - \left((1/\rho)[\nabla \overline{p u_i} - \overline{p \nabla u_i}] + \overline{u_i \vec{f} \times \vec{u}}\right)_j - g_j \overline{u_i h} \\ &\quad - \left((1/\rho)[\nabla \overline{p u_j} - \overline{p \nabla u_j}] + \overline{u_j \vec{f} \times \vec{u}}\right)_i - g_i \overline{u_j h} + \nu \nabla^2 \overline{u_i u_j} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\left(\partial \overline{\vec{u} h} / \partial t + \vec{U} \bullet \nabla \overline{\vec{u} h}\right) + \left(\overline{\vec{u}(\vec{u} \bullet \nabla h)} + (1/\rho)\nabla \overline{p h}\right) \\ &= -\left(\overline{\vec{u}(\vec{u} \bullet \nabla H)} + \overline{h \vec{u}} \bullet \nabla \vec{U}\right) + (1/\rho)\overline{p \nabla h} \\ &\quad - \vec{k}(\vec{f} \times \overline{\vec{u} h}) - \beta \vec{g} \overline{h^2} + \left(\overline{\alpha \vec{u} \nabla^2 h} + \overline{\nu h \nabla^2 \vec{u}}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\left(\partial \overline{q^2} / \partial t + \vec{U} \bullet \nabla \overline{q^2}\right) + \left(\overline{\vec{u} \bullet \nabla q^2 + (2/\rho)\vec{u} \bullet \nabla p}\right) \\ &= -2\overline{\vec{u} \bullet (\vec{u} \bullet \nabla \vec{U})} - 2\nu \overline{|\nabla \vec{u}|^2} - 2\beta \vec{g} \bullet \overline{h \vec{u}} + \nu \nabla^2 \overline{q^2} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\partial\overline{h^2}/\partial t+\vec{U}\cdot\nabla\overline{h^2}+\overline{\vec{u}\cdot\nabla h^2}$$
$$=-2\overline{h\vec{u}}\cdot\nabla H-2\alpha\overline{|\nabla h|^2}+\alpha(\nabla^2\overline{h^2}) \tag{7}$$

ここに,U 及び u(デカルト座標)は平均風速3成分(U,V,W)及び変動風速3成分及び(u,v,w), P,p は平均及び変動圧力,H,h は平均及び変動温位を表す。ρは空気密度,αは温度拡散係数,βは温度膨張係数,νは動粘性係数,$\vec{f}=\{0,0,f\}$は Colioris パラメータ,$\vec{g}=\{0,0,-g\}$は重力加速度,$\vec{k}=\{i,j,k\}$は単位ベクトルである。また,∇は微分演算子(付録A参照),$\vec{\ }$はベクトル,$\bar{\ }$はアンサンブル平均,下付きの i,j は風速成分,$(\ )_j$はベクトル j 成分を表す。

Ⅲ. Level 2(1/2)モデル

Mellor らは基礎式中で未知の項,$\overline{\vec{u}\cdot\nabla uu_j}$,$\overline{\vec{u}\cdot\nabla uh}$ などの変動成分3次項及び $\overline{p\nabla\vec{u}},\overline{p\nabla h}$ は2次の乱流量 $\overline{\nabla u_iu_j}$ あるいは $\overline{\nabla u_jh}$ を組み合わせて近似し,$\nabla\overline{p\vec{u}}\approx\nabla\overline{ph}\approx\overline{\nabla\vec{u}\cdot\nabla h}\approx0$ と仮定し,また散逸項は次のように定義している[5]。

$$\varepsilon_q=\nu\overline{|\nabla\vec{u}|^2}=q^3/\Lambda_1;\ \ \varepsilon_{ij}=\nu\overline{\nabla u_i\cdot\nabla u_j}\approx(\delta_{ij}/3)q^3/\Lambda_1 \tag{8}$$

$$\varepsilon_h=\alpha\overline{|\nabla h|^2}\approx q\overline{h^2}/\Lambda_2 \tag{9}$$

ここに, $\Lambda_1=B_1l$, $\Lambda_2=B_2l$ である。

マクロモデルは先ず全式を境界層近似する。また,Mellor らの提案する order 解析によると,Level 4 の乱流輸送方程式は全て微分方程式となるが,Level 3 は式(4,5) ,Level 2(1/2)は式(4,5,7) ,Level 2 は式(4～7)各々の左辺にある移流項と拡散項が省略される。この他,Level 3 及び Level 2(1/2)モデルのq^2方程式(6)左辺第2項の拡散項は order を考慮して簡略化される[3~5]。

境界層近似を適用し更に静水圧近似して,円柱座標に変換した平均成分の式(2,3)は次のようになる。以降,(V_r,V_θ,V_z)及び(v_r,v_θ,v_z)は各々円柱座標(r,θ,z)軸方向の平均及び変動風速成分を表す(r は半径方向,θは円周方向,z は高さ方向)。

$$\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial\theta}-V_\theta\right)+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)$$
$$=-\left(\frac{\partial\overline{v_zv_r}}{\partial z}+\frac{\overline{v_r^2}-\overline{v_\theta^2}}{r}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+fV_\theta \tag{2'a}$$

$$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+V_r\right)+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)$$
$$=-\left(2\frac{\overline{v_rv_\theta}}{r}+\frac{\partial\overline{v_zv_\theta}}{\partial z}\right)-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\theta}-fV_r \tag{2'b}$$

$$0=-\frac{\overline{v_rv_z}}{r}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\beta Hg \tag{2'c}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+V_r\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial\theta}+V_z\frac{\partial H}{\partial z}=-\frac{\overline{v_rh}}{r}-\frac{\partial\overline{v_zh}}{\partial z} \tag{3'}$$

移流項,拡散項及び Coriolis 項を省略する,Mellor らのモデルの定義に従った Level 2(1/2)の乱流量輸送量は次のようになる。

$$\overline{v_r^2}=2\frac{A_1l}{q}\left\{\frac{V_r}{r}\overline{v_\theta^2}+2\frac{V_\theta}{r}\overline{v_rv_\theta}-2\frac{\partial V_r}{\partial z}\overline{v_rv_z}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\overline{v_\theta v_z}-\beta g\overline{v_zh}\right\}+\frac{q^2}{3} \tag{4'a}$$

$$\left(1+4\frac{A_1l}{q}\frac{V_r}{r}\right)\overline{v_\theta^2}=2\frac{A_1l}{q}\left\{-\frac{V_\theta}{r}\overline{v_rv_\theta}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\overline{v_rv_z}\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\overline{v_\theta v_z}-\beta g\overline{v_zh}\right\}+\frac{q^2}{3}+6C_1A_1lq\frac{V_r}{r} \tag{4'b}$$

$$\overline{v_z^2}=2\frac{A_1l}{q}\left\{\frac{V_r}{r}\overline{v_\theta^2}-\frac{V_\theta}{r}\overline{v_rv_\theta}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\overline{v_rv_z}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\overline{v_\theta v_z}+2\beta g\overline{v_zh}\right\}+\frac{q^2}{3} \tag{4'c}$$

$$\left(1+3\frac{A_1l}{q}\frac{V_r}{r}\right)\overline{v_rv_\theta}=3\frac{A_1l}{q}\left\{\frac{V_\theta}{r}\overline{v_\theta^2}-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\overline{v_rv_z}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial V_r}{\partial z}\overline{v_\theta v_z}\right\}-3C_1A_1lq\frac{V_\theta}{r} \tag{4'd}$$

$$\overline{v_rv_z}=3\frac{A_1l}{q}\left(-\frac{\partial V_r}{\partial z}\overline{v_z^2}+\frac{V_\theta}{r}\overline{v_\theta v_z}+\beta g\overline{v_rh}\right)+3C_1A_1lq\frac{\partial V_r}{\partial z} \tag{4'e}$$

$$\left(1+\frac{3A_1l}{q}\frac{V_r}{r}\right)\overline{v_\theta v_z}=3\frac{A_1l}{q}\left(-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\overline{v_z^2}+\beta g\overline{v_\theta h}\right)+3C_1A_1lq\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \tag{4'f}$$

$$\overline{v_rh}=3\frac{A_2l}{q}\left(-\frac{\partial H}{\partial z}\overline{v_rv_z}+\frac{V_\theta}{r}\overline{v_\theta h},-\frac{\partial V_r}{\partial z}\overline{v_zh}\right) \tag{5'a}$$

$$\left(1+3A_2l\frac{V_r}{r}\right)\overline{v_\theta h}=3\frac{A_2l}{q}\left(-\frac{\partial H}{\partial z}\overline{v_\theta v_z}-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\overline{v_zh}\right) \tag{5'b}$$

$$v_zh=-3\frac{A_2l}{q}\frac{\partial H}{\partial z}v_z^2+3\frac{A_2l}{q}\beta g\overline{h^2} \tag{5'c}$$

$$\left(\frac{\partial q^2}{\partial t}+V_r\frac{\partial q^2}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial q^2}{\partial\theta}+V_z\frac{\partial q^2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(lqS_q\frac{\partial q^2}{\partial z}\right)$$
$$=-2\left(\overline{v_z^2}\frac{\partial V_z}{\partial z}+\overline{v_rv_z}\frac{\partial V_r}{\partial z}+\overline{v_\theta v_z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{\overline{v_\theta^2}V_r-\overline{v_rv_\theta}V_\theta}{r}\right) \tag{6'}$$
$$-2\frac{q^3}{\Lambda_1}+2\beta g\overline{hv_z}$$

$$\overline{h^2}=-\frac{\Lambda_2}{q}\overline{v_zh}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{7'}$$

ここで,式中の代表長さ l [2,5]及び係数[5]は次の通りである。

$$\left(\frac{\partial q^2l}{\partial t}+V_r\frac{\partial q^2l}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial q^2l}{\partial\theta}+V_z\frac{\partial q^2l}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(lqS_q\frac{\partial q^2l}{\partial z}\right)$$
$$=lE_1\left(-\left(\overline{wu}\frac{\partial U}{\partial z}+\overline{wv}\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\beta g\overline{wh}\right)-\frac{q^3}{B_1}\left(1+E_2\left(\frac{l}{kL}\right)^2\right) \tag{10a}$$

$$(A_1,B_1,A_2,B_2,C_1)=(0.92,\ 16.6,\ 0.74,\ 10.1,\ 0.08) \tag{10b}$$
$$(S_q,E_1,E_2)=(0.2,\ 1.8,1.33) \tag{10c}$$

便宜上,Level 2(1/2)の$\overline{v_rv_z}$,$\overline{v_\theta v_z}$ 及び$\overline{v_zh}$ は次式で表現する[5]。

$$-\overline{v_rv_z}=lqS_m(\partial V_r/\partial z) \tag{11a}$$
$$-\overline{v_\theta v_z}=lqS_m(\partial V_\theta/\partial z) \tag{11b}$$
$$-\overline{v_zh}=lqS_h(\partial H/\partial z) \tag{11c}$$

Ⅳ. 乱流輸送量の代数変換

式(11a,b,c)を式(4',5')に代入して整理した乱流輸送量の代数方程式は,式(12～14)のようになる。この場合,分子/分母を$\overline{x_ix_j}=D(\overline{x_ix_j})/Do$ というように分離していること,全項を示すと式が長くなるので半径方向距離 r の2乗以上となるべき乗項を省略していることに注意されたい。なお,r を含む項は l/r の形で発生するため,台風を対象にした場合,最大旋衡風速半径(風速が最大となる位置近傍)が 10km の order,代表長さ l が 1km の order であることを考えると,最大旋衡風速半径より遠い点の風速は下式で近似できると判断される。

[乱流輸送量]　$\overline{x_ix_j}=D(\overline{x_ix_j})/D_o$ (12)

［分母 D_o ］ $$D_o = 3q + \frac{l}{r}(21A_1 + 9A_2)V_r \tag{13}$$

［分子 $D(\overline{x_i x_j})$ ］

$$D\left(\overline{v_r^2}\right) = q^3 + \frac{3lq^2}{r}(3A_1 + A_2)V_r \tag{14a}$$
$$-6S_m A_1 l^2 \left\{ q\left(-2(\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 + (\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right) - \frac{3A_1 l}{r}\left(4(\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 - (\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right)V_r - \frac{3A_2 l}{r}\left(2(\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 - (\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right)V_r - \frac{12A_1 l}{r}V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right\} + 6S_h A_1 l^2 \left(q + \frac{3l}{r}(3A_1 + A_2)V_r\right)\beta g \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$D\left(\overline{v_\theta^2}\right) = q^3 + \frac{3lq^2}{r}((1+6C_1)A_1 + A_2)V_r \tag{14b}$$
$$-6S_m A_1 l^2 \left\{ q\left((\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 - 2(\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right) + \frac{3l(A_1 + A_2)}{r}\left((\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 - 2(\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right)V_r + \frac{6A_1 l}{r}V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right\} + 6S_h A_1 l^2 \left(q + \frac{3l}{r}(A_1 + A_2)V_r\right)\beta g \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$D\left(\overline{v_z^2}\right) = q^3 + \frac{lq^2}{r}(A_1 - 3A_2)V_r \tag{14c}$$
$$-6S_m A_1 l^2 \left\{ q\left((\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 + (\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right) - \frac{3A_1 l}{r}\left((\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 - (\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right)V_r - \frac{3A_2 l}{r}\left((\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 + (\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right)V_r + \frac{6A_1 l}{r}V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right\}$$
$$-12S_h A_1 l^2 \left(q - \frac{3A_2 l}{r}V_r\right)\beta g \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$D\left(\overline{v_r v_\theta}\right) = \frac{3q^2(1-3C_1)A_1 l}{r}V_\theta \tag{14d}$$
$$-9S_m A_1 l^2 \left\{ -2q\frac{\partial V_r}{\partial z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{(6A_2 - 8A_1)l}{r}V_r \frac{\partial V_r}{\partial z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{2A_1 l}{r}\left((\frac{\partial V_r}{\partial z})^2 - 2(\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2\right)V_\theta \right\} + \frac{18S_h A_1^2 l^3}{r}\beta g V_\theta \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$D\left(\overline{v_r h}\right) = 9l^2(S_m A_2 + S_h A_2) \tag{14e}$$
$$\times\left\{ \left(q + \frac{(7A_1 + 3A_2)l}{r}V_r\right)\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{3A_2 l}{r}V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right\}\frac{\partial H}{\partial z}$$

$$D\left(\overline{v_\theta h}\right) = 9(S_m + S_h)A_2 l^2 \left(q + \frac{7A_1 l}{r}V_r\right)\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{14f}$$

また,式(4'e)及び式(5'c)に式(14a〜f)を代入して整理した２式によると S_m, S_h が得られる。

$$\begin{cases} K_{11}S_m + K_{12}S_h = C_v \\ K_{21}S_m + K_{22}S_h = C_h \end{cases} \tag{15a}$$

$$\rightarrow \quad S_m = \frac{C_v K_{22} - C_h K_{12}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}, \quad S_h = \frac{-C_v K_{21} + C_h K_{11}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \tag{15b}$$

ここに,K‥はS‥を含む項をまとめて得られる係数項,C‥はS‥を含まない項を表す。従って,式(7'),式(10a),式(12,13,14a〜f)及び式(15b)を連立させて計算すれば乱流輸送量及び S_m, S_h が定まる。

これに対して,デカルト座標の場合式(15a)は単純に表せる[5]。

$$S_m[6A_1A_2G_M] + S_h[1 - 3A_2B_2G_H - 12A_1A_2G_H] = A_2 \tag{16a}$$
$$S_m[1 + 6A_1^2G_M - 9A_1A_2G_H] - S_h[12A_1^2G_H + 9A_1A_2G_H] = A_1(1 - 3C_1) \tag{16b}$$

ここに, $G_M = \frac{l^2}{q^2}\left\{(\frac{\partial U}{\partial z})^2 + (\frac{\partial V}{\partial z})^2\right\}$, $G_H = -\frac{l^2}{q^2}\beta g \frac{\partial H}{\partial z}$ である。

また,文献[5]の記述に誤りがあることから,式(15b)に対応するデカルト座標 Level 2 の式を参考に示すと次の通りである。

$$S_m = \frac{A_1}{A_2}\frac{B_1(\gamma_1 - C_1) - [B_1(\gamma_1 - C_1) + 6A_1 + 3A_2]R_f}{B_1\gamma_1 - [B_1(\gamma_1 + \gamma_2) - 3A_1]R_f} \cdot S_H \tag{17a}$$

$$S_h = 3A_2 \frac{\gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2)R_f}{1 - R_f} \tag{17b}$$

ここに, $R_f = \frac{\beta g \overline{wh}}{\overline{wu}(\partial U / \partial z) + \overline{wv}(\partial V / \partial z)}$,

$$\gamma_1 = \frac{1}{3} - \frac{2A_1}{B_1}, \quad \gamma_2 = \frac{B_2}{B_1} + \frac{6A_1}{B_1}$$

Ⅴ．上部境界における鉛直方向放射条件式

計算領域の上部境界における鉛直方向風速を０とする大気境界層モデルでは,上部境界を透過すべき風速成分が反射するため大きな計算誤差を発生させる可能性がある。この対策として,計算領域の上部に減衰層を設ける手法と,フーリエ手法を用いて下向き反射を除去する手法が一般に採用されている。本研究では後者の下向き反射を除去する Klemp and Durran[6]が提案する手法の採用を考え,以下にこの手法による円柱座標の平均圧力評価式を誘導する。

平均風速 $\bar{U}$ 及び平均温位 H はパターンが保存されたまま台風の進行速度 $\bar{C}$ で移動する定常な台風を仮定する。この場合,分子拡散項と乱流輸送量を微小として省略し,圧力を $\phi = P/\rho$,温度膨張係数を $\beta = 1/H_o$ で表すと,式(1〜3)は次のようになる。

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{1''}$$
$$(\vec{U} - \vec{C}) \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla\phi - \vec{k}(\vec{f} \times \vec{U}) - (H / H_o)\vec{g} \tag{2''}$$
$$(\vec{U} - \vec{C}) \cdot \nabla H = 0 \tag{3''}$$

従って,式(1"〜3")は円柱座標系によると次のようになる。

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{18a}$$
$$(V_r - C_r)\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{(V_\theta - C_\theta)}{r}(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta) + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + fV_\theta \tag{18b}$$
$$(V_r - C_r)\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{(V_\theta - C_\theta)}{r}(V_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}) + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - fV_r \tag{18c}$$
$$(V_r - C_r)\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{(V_\theta - C_\theta)}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{H}{H_o}g \tag{18d}$$
$$(V_r - C_r)\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{(V_\theta - C_\theta)}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{18e}$$

ここで,上式に次の仮定を設ける。

(1) ２次元流(風向は円周方向と仮定)： $V_r = 0, \ \partial H / \partial r = 0$

(2) 圧力や温位の変化と比べ鉛直方向風速 V_z の変化は小さい。ただし,連続方程式鉛直方向の微分は省略しない： $\partial V_z / \partial z \neq 0$

(3) 温位 H の z 方向変化率は既知とする(一定)： $\partial H / \partial z = \partial \bar{h} / \partial z$

(4) 式(18b-e)を線形化するため,平均圧力 P(= ρ φ)は円周方向に変化せず r 方向にだけ変化する,Schloemer の実験式とする。また,上部境界近傍の P は z 方向に変化しないとする。

$$P = P_c + \frac{\Delta P}{\exp(R_m / r)}, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \Delta P \frac{R_m}{r^2 \cdot \exp(R_m / r)} \tag{19}$$

P は気圧,Pc は中心気圧,ΔP は台風中心の気圧低下量, Rm は最大旋衡風速半径, r は台風中心からの距離である。即ち,仮定(1,2)の下で式(18b)を解くと,円周方向風速 $\overline{V_\theta}$ が得られる。

$$\overline{V_\theta} \approx \frac{(C_\theta - rf)}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_\theta - rf}{2}\right)^2 + \frac{r}{\rho_o}\frac{\partial P}{\partial r}} \tag{20a}$$

この結果,台風の移動がないときの近似値 $\overline{\Phi}$ が得られる。

$$\overline{\Phi} \approx \frac{(V_\theta - C_\theta)}{r} \tag{20b}$$

これらの条件を設定すると, (18a～e)の近似式は次のようになる。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{21}$$

$$-\overline{\Phi} V_\theta \approx -\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial r} + f\overline{V_\theta} \tag{22}$$

$$-C_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \overline{\Phi}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{23}$$

$$0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{H}{H_o}g \tag{24}$$

$$-C_r\frac{\partial H}{\partial r} + \overline{\Phi}\frac{\partial H}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial \overline{h}}{\partial z} = 0 \tag{25}$$

上部境界を透過する風速成分(重力波)を取り出すため, ξ (V,H あるいは P)のフーリエ級数各成分を次のように定義し,

$$\tilde{\xi}(r,\theta,z) = \hat{\xi}(k_r,k_\theta,z)\exp[i(k_r r + k_\theta\theta)] \tag{26}$$

式(21,23 -25)の波数 (k_r,k_θ) 成分を示すと次のようになる。

$$\tilde{v}_\theta = -\frac{r}{ik_\theta}\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \tag{21'}$$

$$\tilde{\phi} = \frac{r(k_r C_r - k_\theta\overline{\Phi})}{k_\theta}\tilde{v}_\theta \tag{23'}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} - \frac{\tilde{h}}{H_o}g = 0 \tag{24'}$$

$$\tilde{h} = -\frac{\tilde{v}_z}{i(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})}\frac{\partial \overline{h}}{\partial z} \tag{25'}$$

式(21')を式(23')に代入すると,

$$\tilde{\phi} = \frac{r^2(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})}{ik_\theta^2}\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \tag{26}$$

式(24')に式(25')と式(26)を代入すると,次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{k_\theta^2}{r^2(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})^2}\frac{g}{H_o}\frac{\partial \overline{h}}{\partial z}\tilde{v}_z = 0 \tag{27a}$$

ここで,変数 N ($N^2 = (g/H_o)d\overline{h}/dz$: Brunt-Vaisala frequency) を導入すると上式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{k_\theta^2 N^2}{r^2(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})^2}\tilde{v}_z = 0 \tag{27b}$$

上式の解は次のようになる。

$$\tilde{v}_z = A\cdot\exp\left(i\frac{k_\theta N\cdot z}{r(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})}\right) + B\cdot\exp\left(-i\frac{k_\theta N\cdot z}{r(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})}\right) \tag{28a}$$

ここで,下向き重力波を取り出すため,B=0 の条件を設けると,

$$\tilde{v}_z = A\cdot\exp\left(i\frac{k_\theta N\cdot z}{r(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})}\right) \tag{28b}$$

となり,この両辺を z で微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = i\frac{k_\theta N}{r(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})}\tilde{v}_z \tag{29}$$

一方,式(21',23')より次式が得られる。

$$\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = \frac{ik_\theta^2}{r^2(-k_r C_r + k_\theta\overline{\Phi})}\tilde{\phi} \tag{30}$$

従って,式(29,30)より次式の関係が導ける。

$$\tilde{\phi} = \frac{rN}{k_\theta}\tilde{v}_z \tag{31}$$

この式は,円周方向一定と仮定する気圧 P の初期値を,円周方向にフーリエ変換した鉛直方向平均風速 Vz のフーリエ係数 $\tilde{v}_z$ に rN/k_θ を乗じて逆フーリエ変換した圧力に置き換えれば,計算領域の上方(上部境界外)に透過する鉛直方向風速成分が除去できることを示している。

なお, 2次元流を対象にした Klemp & Durran(1982)のデカルト座標の式と比べた場合,主流方向(x 方向)の波数 k_x が円柱座標で k_θ/r となるだけである。

Ⅵ. おわりに

台風時の風向風速の解析を目的にして,Mellor らが提案する Level 2(1/2) モデルの乱流輸送量及び Klemp and Durran が提案する上部境界条件を設定する式の円柱座標への変換結果を示した。円柱座標による乱流輸送量はデカルト座標の式と比べ数倍長くなる。このため,本論文では,order 解析に基づくと,最大旋衡風速半径以上の領域を対象にする,半径方向距離 r の2乗以上の項を省略した式を示した。即ち,今後の式誘導及び検討に際してターゲットとして利用できる式だけを示している。しかし,乱流輸送量の連立方程式をそのまま計算することを考えれば,r^2 以上の項も含めた台風中心近傍の解析も可能である。上部境界の式は,鉛直方向の風速透過を考慮して,上部境界における鉛直方向風速の円周方向フーリエ係数から圧力のフーリエ係数を求める式を示した。この場合,Klemp and Durran が示すデカルト座標の主流方向(x 方向)の波数 k_x が円柱座標で k_θ/r となるだけである(k_θ は円周方向の波数)。また,デカルト座標による流体運動方程式の円柱座標への変換及び地表面の凹凸を考慮する変換に必要な公式は付録に示した。

参考文献

1) 孟岩,松井正宏,日比一喜；中立時の大気境界層における風速の鉛直分布特性,日本風工学会誌,第 66 号, (1996.1).

2) George L. Mellor and H. J.Herring ; A survey of the mean turbulent field closure models.

3) George L. Mellor ; Analysis Prediction of the properties of stratified planetary layers. Journal of the Atmospheric Sciences, (1973.9).

4) George L. Mellor and Tetsuji Yamada ; A Hierarchy of turbu-lence closure models for planetary boundary layers. Journal of the Atmospheric Sciences, (1974.10).

5) George L. Mellor and Tetsuji Yamada ; Development of turbu-lence closure model for geophysical fluid problems. Reviews of Geophysics and Space Physics. Vol.20, No.4,(1982).

6) Joseph B. Klemp and Dale R. Durran ; An upper boundary condition permitting internal gravity wave radiation. Monthly Weather Review Vol.111, American Meteorological Society, (1983.3).

付録A　円柱座標

流体運動は互いに直交する3成分が連成する。また,計算領域の形状などから曲線(非平行)座標が適切となることが多い。このため,流体力学では式を統一・簡略化するベクトル・テンソル及び演算子を使用した式が頻繁に現れる。以下に示す座標変換はデカルト(平行)座標から円柱座標への変換を目的とする。この場合,デカルト座標のx軸と円柱座標のr軸が一致するとした条件を設ける(デカルト座標を回転)。即ち,デカルト座標の風速(U,V,W)と円柱座標の風速(V_r, V_θ, V_z)は等しいとする。

$$U = V_r,\ \ V = V_\theta,\ \ W = V_z \tag{A1}$$

A.1 **ベクトル演算式**

$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, c=スカラー, 単位ベクトルを $\vec{k} = \{i, j, k\}$ とした場合,ベクトル公式は下式の通りである。

$$c\vec{a} = \{ca_1, ca_2, ca_3\},\ \ \vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\} \tag{A2}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{A3}$$

$$|\vec{a}| = (\vec{a} \bullet \vec{a})^{1/2} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} \tag{A4}$$

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} = i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ \vec{k}(\vec{a} \times \vec{b}) = \{(a_2 b_3 - a_3 b_2), (a_3 b_1 - a_1 b_3), (a_1 b_2 - a_2 b_1)\} \end{cases} \tag{A5a,b}$$

A.2 **長さ係数**

長さ$\Delta s (= \Delta x$: デカルト座標のx方向成分)が$\alpha \Delta \xi$ となる曲線座標の長さ係数はαと定義する。3成分を同様に定義した場合,円柱座標(r, θ,z)各成分の長さ係数は$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, r, 1)$ となる。この関係に従う微係数のデカルト座標から円柱座標への変換係数は(1,1/r,1)である。

$$\partial/\partial x = \partial/\partial r,\ \ \partial/\partial y = (1/r)\partial/\partial r,\ \ \partial/\partial z = \partial/\partial z \tag{A6}$$

A.3 **勾配ベクトル**(gradient : ∇)

勾配ベクトルとは,ある成分 f の各軸 (ξ, η, ζ) 方向の長さ変化率を表すベクトルである(下式は f をベクトル$\vec{f}$ としているので右辺の3項もベクトル : Laplacian(2回微分)の関係も参照)。

$$\nabla \overrightarrow{f(x,y,z)} = \left\{ \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{f}}{\partial \xi}, \frac{1}{\beta}\frac{\partial \vec{f}}{\partial \eta}, \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varsigma} \right\} \tag{A7}$$

(注1)　円柱座標の長さ係数は$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, r, 1)$,座標軸は$(\xi, \eta, \varsigma) = (r, \theta, z)$ である。デカルト座標$\{x, y, z\}$ は$(\alpha, \beta, \gamma) = (1,1,1)$

(注2)　以降 f はデカルト座標の関数 $f = f(x, y, z)$ とする。ただし,式(A7)は f を曲線座標の関数 F としても成り立つ。

A.4 **発散**(divergence : ∇・)

発散とは単位体積への流入の勾配を表し,デカルト座標のベクトル3成分を$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ とすると発散は次のようになる。

$$\nabla \bullet \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{A8a}$$

一方,曲線座標の単位体積は長さ係数(α, β, γ) の関数である。従って曲線座標のベクトルが$\vec{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ なら次のようになる。

$$\nabla \bullet \vec{F} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial(\beta\gamma \cdot F_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\alpha\gamma \cdot F_2)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\alpha\beta \cdot F_3)}{\partial \varsigma} \right) \tag{A8b}$$

A.5　Laplacian ($\nabla^2 = \nabla \bullet \nabla$)

Laplacianとは,勾配ベクトル∇の発散∇・である。デカルト座標$\vec{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$ の Laplacian は,次のようになる。

$$\nabla^2 \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}\right) \tag{A9a}$$

一方,曲線座標のベクトル$\vec{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ の Laplacian は次のようになる($\vec{f}$ や$\vec{F}$ のようにベクトルとせず,スカラー量fやFの関数とした式が物理学の教科書では一般的だが,流体力学でのテンソル表記を考え本論文ではベクトル式としている)。

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \vec{F}\beta\gamma}{\alpha \partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \vec{F}\alpha\gamma}{\beta \partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(\frac{\partial \vec{F}\alpha\beta}{\gamma \partial \varsigma}\right) \right) \tag{A9b}$$

A.6 **流体方程式中に現れる各微分項の円柱座標への変換**

教科書に従って A.3~A.5 項のように演算子に関する記述を述べると,変数やベクトルの定義及びデカルト座標と曲線座標の関係が混在することから,座標変換に混乱・誤解を招き易い。このため,以降デカルト座標の演算子が有する各成分の微分項を分解して項別に曲線座標(円柱座標)に変換し,工学的に使い易い式を示す。

A.6.1 **スカラー変数を対象にした微分**

方向性のない圧力P,温位Hなどをスカラー変数Sで代表した微分の円柱座標への変換は次のようになる。以降左辺はデカルト座標による表記,右辺は円柱座標による表記とする。

$$\left\{\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial S}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \theta}, \frac{\partial S}{\partial z}\right\} \tag{A10}$$

$$\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right\} = \left\{\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}, \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right\} \tag{A11}$$

A.6.2 **微分内に風速を含む項の微分**

圧力あるいは温位(S で代表)と風速(U,V,W)からなる項の微分は,以下に示す変数(U,V,W)各々にスカラー変数Sを乗じた項に置き換えればよい,例えば変数(U,V,W), $(V_r V_\theta, V_z)$ は(SU,SV,SW), (SV_r, SV_θ, SV_z) に置き換わる。

(1) **風速1次項の1回微分**

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial V_r}{\partial r}, \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta\right), \frac{\partial V_r}{\partial z}\right\} \tag{A12}$$

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial V_\theta}{\partial r}, \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r\right), \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right\} \tag{A13}$$

$$\left\{\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial V_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}, \frac{\partial V_z}{\partial z}\right\} \tag{A14}$$

(2) **風速1次項の2回微分**

・xあるいはzだけによる2回微分は変数(U,V,W)及び x 各々が$(V_r V_\theta, V_z)$ 及びrに変化するだけである。

(例)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial z} \tag{A15}$$

・x(あるいはz)とyの組み合わせによる2回微分は,式(A.12~14)の第2項を単純にrあるいはzで微分する。

(例)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta\right) \tag{A16}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) \tag{A17}$$

・yによる2回微分は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - 2\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_r\right) \tag{A18}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + 2\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta\right) \tag{A19}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} \tag{A20}$$

(3) **風速2次項の1回微分**

・xあるいはzだけによる微分は変数(U,V,W)及び x 各々が$(V_r V_\theta, V_z)$ 及びrに変化するだけである。

(例)　$\left(\frac{\partial UV}{\partial x},\frac{\partial UV}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial V_rV_\theta}{\partial r},\frac{\partial V_rV_\theta}{\partial z}\right)$　(A21)

・yによる微分は次のようになる。

$$\frac{\partial U^2}{\partial y}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_r^2}{\partial\theta}-2V_rV_\theta\right)\quad\text{(A22)}$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial y}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_\theta^2}{\partial\theta}+2V_rV_\theta\right)\quad\text{(A23)}$$

$$\frac{\partial W^2}{\partial y}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_z^2}{\partial\theta}\quad\text{(A24)}$$

$$\frac{\partial UV}{\partial y}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_rv_\theta}{\partial\theta}+V_r^2-V_\theta^2\right)\quad\text{(A25)}$$

$$\frac{\partial UW}{\partial y}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_rV_z}{\partial\theta}-V_\theta V_z\right)\quad\text{(A26)}$$

$$\frac{\partial VW}{\partial y}=\frac{1}{r}\left(V_rV_z+\frac{\partial V_\theta V_z}{\partial\theta}\right)\quad\text{(A27)}$$

(4) 風速２次項の２回微分

・xあるいはzだけによる２回微分は変数(U,V,W)及び x 各々が (V_r,V_θ,V_z) 及び r に変化するだけである。

(例)　$\frac{\partial^2 UV}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 V_rV_\theta}{\partial r\partial z}$　(A28)

・x(あるいはz)とyの組み合わせによる２回微分は,式(A.22～27)を単純にrあるいはzで微分する。

(例)　$\frac{\partial^2 UW}{\partial x\partial y}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 V_rV_z}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial V_\theta V_z}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V_rV_z}{\partial\theta}-V_\theta V_z\right)$　(A29)

・ y による２回微分は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 U^2}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_r^2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_r^2}{\partial\theta^2}-2\cdot\left(2\frac{\partial V_rV_\theta}{\partial\theta}+V_r^2-V_\theta^2\right)\right]\quad\text{(A30)}$$

$$\frac{\partial^2 V^2}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_\theta^2}{\partial\theta^2}+2\cdot\left(2\frac{\partial V_rV_\theta}{\partial\theta}+V_r^2-V_\theta^2\right)\right]\quad\text{(A31)}$$

$$\frac{\partial^2 W^2}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_z^2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z^2}{\partial\theta^2}\quad\text{(A32)}$$

$$\frac{\partial^2 UV}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_rv_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_rv_\theta}{\partial\theta^2}+2\cdot\left(\frac{\partial(V_r^2-V_\theta^2)}{\partial\theta}-2V_rV_\theta\right)\right]\quad\text{(A33)}$$

$$\frac{\partial^2 UW}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_rV_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V_rV_z}{\partial\theta^2}-2\frac{\partial V_\theta V_z}{\partial z}-V_rV_z\right)\quad\text{(A34)}$$

付録B　z*座標

地表面の凹凸を考慮するには,円柱座標(r, θ,z)で z=0 となる水平面を地形に沿った曲面とするz*座標と呼ばれる座標(r, θ,z*)への変換が必要である(r とθは変化しない)。この場合,計算領域の上部境界高さを $z_t=z_t^*$ とし,それ以下を下式のように定義する。

$$z^*=\frac{z_t}{z_h}\left(z-z_g\right)\quad\text{(B1)}$$

ここに,z 及び z_t は各々円柱座標による対象点の高さ及び計算領域の上部境界高さであり, z_g は z=0 面から地表面までの高さ, $z_h=z_t-z_g$ は地表面から上部境界までの距離である。円柱座標(r, θ,z)内のz*座標値軸は直交しない。しかし,z*座標内では(r, θ,z*)座標軸が直交するので,z*座標を直交座標とした式展開が可能になる。

微分の円柱座標からz*座標への変換は,Chain Rule に従うと以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}+\frac{G_r}{G_z}\frac{\partial}{\partial z^*}\quad\text{(B2a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta^*}+\frac{G_\theta}{G_z}\frac{\partial}{\partial z^*}\quad\text{(B2b)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial z}=\frac{1}{G_z}\frac{\partial}{\partial z^*}\quad\text{(B2c)}$$

ここに, $(\partial t/\partial r)=(\partial t/\partial\theta)=(\partial t/\partial z)=(\partial r/\partial\theta)=(\partial\theta/\partial r)=0$, $(\partial r/\partial z)=(\partial\theta/\partial z)=0$ であり,z*による微分項の係数は次のようになる。

$$G_r=\left(\frac{z^*}{z_t}-1\right)\frac{\partial z_g}{\partial r}\quad\text{(B3a)}$$

$$G_\theta=\left(\frac{z^*}{z_t}-1\right)\frac{\partial z_g}{\partial\theta}\quad\text{(B3b)}$$

$$Gz=\frac{\partial z}{\partial z^*}=\frac{z_h}{z_t}\quad\text{(B3c)}$$

Gz は式(B1)から直接導けるが, G_r,G_θ の誘導には技巧を要する。この誘導は(r, θ,z)軸が直交することから, $(\partial z/\partial r)=(\partial z/\partial\theta)=0$ なる条件を利用する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{z_h}{z_t}z^*+z_g\right)=\left(\frac{z_h}{z_t}\frac{\partial z^*}{\partial r}+\frac{z^*}{z_t}\frac{\partial z_h}{\partial r}\right)+\frac{\partial z_g}{\partial r}\\&=\left(\frac{z_h}{z_t}\frac{\partial z^*}{\partial r}+\frac{z^*}{z_t}\frac{\partial(z_t-z_g)}{\partial r}\right)\\&\quad+\frac{\partial z_g}{\partial r}=\frac{z_h}{z_t}\frac{\partial z^*}{\partial r}-\frac{z^*}{z_t}\frac{\partial z_g}{\partial r}+\frac{\partial z_g}{\partial r}=0\\&\rightarrow\frac{\partial z^*}{\partial r}=\frac{z_t}{z_h}\left(\frac{z^*}{z_t}-1\right)\frac{\partial z_g}{\partial r}=\frac{G_r}{G_z}\end{aligned}\quad\text{(B4)}$$

同様に,∂z*/∂θは次のようになる。

$$\frac{\partial z^*}{\partial\theta}=\frac{z_T}{z_h}\left(\frac{z^*}{z_T}-1\right)\frac{\partial z_g}{\partial\theta}=\frac{G_\theta}{G_z}\quad\text{(B5)}$$