

基本的な最適成長モデルと完全雇用

鈴木 康 夫

I. 序

内生的経済成長理論 (Romer[1986], Lucas[1988]) の基礎として、旧式の新古典派経済成長理論と新古典派最適経済成長理論は、まだ重要なが、それらの新古典派の基本モデルは、1970年代以後の基本的でも重要な経済的特徴を全く無視し、放置している (Romer[1998, chap. 2]やJones[1998, chap. 2]など)。モデル表現にそれを反映させ、その基本的に重要な経済的特徴を標準的なモデルに導入して、新古典派経済成長分析を鈴木[2003b]は若干拡充しようと試みている。もちろん、その基本的モデルとは、周知の、いわゆるソロー・スワン型経済成長モデル (Solow[1956]およびSwan[1956], Solow[2000, chap. 8, 9]) のことであり、新古典派最適経済成長理論の基本モデルは、いわゆる (ラムゼイ-) キャス-クープマンズ型モデル (Ramsey[1929]-Cass[1965]-Koopmans[1965]) が有名である。また、1970年代以後の基本的でも重要な経済的特徴とは、インフレ動学理論 (例えば吉川[2000, 第1章]) で有名な「自然失業率」概念である。この概念は、完全雇用と両立する失業概念であり、この導入によって、それらの新古典派モデルの理論的拡充が可能となっている。こうした新古典派研究は、鈴木[2001b](pp.95-96)や鈴木[2003a](pp.208-210)にすでに見られるが、最適成長分析が全くなされていないなど、不十分にしか触れられていない点を鈴木[2003b]は改めて取り扱っている。

本稿では、鈴木[2003b]の内容を、失業者と類似の生活状況にある年金生活者や給付金生活者などの存在についても若干拡張しておく。また、鈴木[2003b]では新古典派の研究のみが展開されているが、ケインジアン的な最適成長分析は、一般に珍しいが、鈴木[2001a](第5章前半)で分析が試みられている。し

かし、そこでは記載を省略した部分での処理に重大な誤りが含まれていることと、説明不足の部分があったということから、これらを修正ないし補充して手短な改訂が本稿で行われる。

したがって、本稿での分析でも、二階堂[1978]や置塩[1968], Rose[1969]などのように失業問題を本格的に扱う考察や、比較的に新古典派的な佐藤[1967]やStein[1968, 1969]というたぐいの考察も展開されることはない。以下では、まず次節で、新古典派の基本モデルについて標準的な内容の確認から出発し、続いて (第3節で) 自然失業率の導入の一般化や、これについての新古典派最適成長分析が展開される。最後に (第4節で)、ハロッド-ドーマー型の経済成長理論に基づきケインジアン的な最適成長の基本的な考察と改訂が手短に展開ないし検討される。

II. 基本的な新古典派最適経済成長モデルと分析の準備

典型的な新古典派経済成長理論の、ソロー・スワン型経済成長モデル (Solow[1956]-Swan[1956]) を、鈴木[2003b] (第2節) は、1970年代以後の基本的な経済的認識を若干取り入れた拡張のために要約している。ここでも、準備として必要最小限の要約がなされるが、単純な資本減耗を考慮する。労働力 N と資本ストック量 K の比を $k \equiv K/N$ と表し、集計的新古典派生産関数を F 、及びこの労働力1単位あたり表現または産出量の水準を $f(\equiv F/N) = F(K/N, 1)$ で表して、標準的なソロー・スワン型成長モデルが、資本減耗を伴う次のような動学方程式で与えられ、この基本的な諸性質が確認される。

$$(2.1) \quad \Delta k = sf(k) - (v_N + v_L + \delta)k, \text{ and } (v_N, v_L, \delta) = \text{const.} > 0.$$

ただし、時間変数 t での時間微分を $\Delta k \equiv dK/dt$ と定義している。 $f(k)$ が基づく集計的な新古典派生産関数 $F(K, N)$ には規模に関する収穫不変の性質 (= 1次同次性) と微分条件: $df/dk > 0$ かつ $d^2f/dk^2 < 0$ が仮定されている。

また、完全雇用（資本の完全利用も）と中立的技術進歩を想定し、労働力の効率単位自体の時間成長率を v_L として、効率単位労働力の成長率は、自然成長率とその率との和 $v_N + v_L$ で外生的に与えられている。 δ は K に対して一定の資本減耗率とする。

この (2.1) では、通常 $s > 0$ を正のパラメータと想定することで、持続的均衡成長あるいは均斉成長の動学的均衡が唯一存在し、かつ漸近安定となる（その唯一の均衡水準を k^* とし、 $k < k^*$ で $\Delta k > 0$ 、かつ $k > k^*$ で $\Delta k < 0$ となる；宇沢・稲田微分条件：Burmeister-Dobell [1970, chap.12]）。 $s > 0$ を所与としなければ、次のように「黄金律」（または新古典派定理）の比較静学的問題が分析できる。

$$(2.2) \quad \begin{aligned} &\text{maximize } u(c), \text{ with } du/dc > 0 \text{ and } d^2u/dc^2 < 0, \\ &\text{s.t. (2.1), } \Delta k = 0, \text{ and } c = (1-s)f(k). \end{aligned}$$

ただし、 u は一種の社会的厚生指標としての社会的効用水準を表し、代表的な消費者の効用水準で与えられるものとされている。また、 c は効率単位の労働力 1 単位あたりの消費水準を表示し、これに、代表的消費者の効用水準が関係付けられている。この場合の社会的厚生最大化問題の黄金律（条件）、つまり社会的最適性条件または効率性条件は、次のようになる。

$$(2.3) \quad df/dk = (v_N + v_L + \delta), \text{ and } d^2f/dk^2 < 0.$$

基本的な新古典派最適経済成長理論の標準モデルは、（ラムゼイ-）キャス・クープマンズ型モデルであり（Ramsey [1929]-Cass [1965]-Koopmans [1965]），上のようなソロー-スワン・モデルを用いた動学的最適化で記述される新古典派最適経済成長分析が、基本的な動学的厚生経済学の代表的な研究とされてきた。ここでの表現に即して、新古典派最適経済成長問題を記述すれば、次のようになる。

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\text{maximize } \int_0^\infty u(c)e^{-rt} dt, \text{ with } r = \text{const.} > 0, du/dc > 0 \text{ and} \\ &d^2u/dc^2 < 0, \text{ s.t. (2.1), } c = (1-s)f(k), \text{ and } k_0 = \text{const.} > 0. \end{aligned}$$

ただし、 e は自然対数の底を表し、 r は社会的効用の時間割引率を意味する。また、 k_0 は資本労働比の初期条件を表す。

新古典派最適成長問題 (2.4) の動学的最適化条件は、次のように導出される。ただし、次の u' や u'' は微分係数、 $du/dc > 0$ および $d^2u/dc^2 < 0$ を表し、また $\Delta c \equiv dc/dt$ である。

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &\Delta c = -(u'/u'') \{df/dk - r - (v_N + v_L + \delta)\}, (2.1), \\ &(r, k_0) = \text{const.} > 0 \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} \{u' e^{-rt} k\} = 0. \end{aligned}$$

ここで、現行価値表示の随伴変数を λ とし、この動学的最適化で横断性条件 $u' = \lambda$ が必要なので、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \{\lambda e^{-rt} k\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{u' e^{-rt} k\} = 0$ である。それゆえ、この動学的体系がこの鞍点均衡へと到る一義的な最適解（軌道）を与える。この動学的均衡条件は $df/dk = r + (v_N + v_L + \delta)$ なる「修正黄金律」条件である（佐藤 [1979, p.453]）。また、上の最適化問題 (2.4) の定式化を、固定端の有限計画時間問題に変更すると次の含意が得られる（鈴木 [2003b, sec. II] の第 1 図参照、ただし、 δ の導入につき若干の修正を要す）。

補題 1（Cass [1965]：鈴木 [2003b, sec. II]） 動学的方程式 (2.1) に従う新古典派成長経済が想定されるとき、この動学的最適化問題 (2.4) で、終端条件のみ、固定端 k_T と有限計画時間 T に変更すれば、この修正を適切に施した動学的最適化条件 (2.5) が与える一義的最適経路が存在可能である。■

補題 2（Cass [1966] の解釈：鈴木 [2003b, sec. II]） 動学的方程式 (2.1) に従う新古典派成長経済を想定するとき、この動学的最適化問題 (2.4) で、終端条件のみ、固定端 k_T と有限計画時間 T に変更し、この修正を適切に施した

動学的最適化条件(2.5)の一義的最適経路が存在するならば、単純なターンパイク性と同様な比較動学的結果が得られる。つまり、鞍点軌道の交差下方領域では、初期条件 k_0 が修正黄金律の水準よりも低く、初期条件 k_0 だけが一層低い（または高い）水準であるならば、あるいは、固定終端 k_T だけが一層高い（または低い）水準で与えられるならば、最適経路の消費経路も一様に相対的に低い（または高い）水準の消費軌道で決定される（鞍点軌道の左上・右上領域でも同じ境界条件変更について相対的に消費が高い軌道が得られる）。■（補題2は補題1の含意の若干の拡張である。）

Ⅲ. 基本的な新古典派最適経済成長の拡張モデルと完全雇用

鈴木[2003a]の第3節(pp.205-210)では、上述の基本的なモデルに、「完全雇用」想定の変更に考慮した拡張分析が、鈴木[2001, pp.205-206]（および同[2003a, pp.208-210]）に基づいて試行されている。そこで考慮されているのは、たとえ好景気にもかかわらずある程度の失業率が現実経済ではほぼ必ず存在するという基本認識に基づく、「自然失業率」の概念である。そこでは、マクロ経済学で一般に容認されているこの概念を、上述の新古典派最適経済成長モデルに導入して若干の拡充を試みている。

その自然失業率を U_N と表示して、これを $1 > U_N > 0$ とする。また、この率の失業者は、過去の貯蓄を取り崩すか、または公的な生活給付を社会的に受け、 $b > 0$ という自然失業の労働単位あたりでの最低生活水準の所与量を消費するものと想定されている。前節の基本的な新古典派経済成長方程式(2.1)は次のように書き換えられる（鈴木[2001, p.206, equ. (5)] および同[2003a, p.209, equ. (7.5)]）。

$$(3.1) \quad \Delta k = s \{F(k, 1 - U_N) - bU_N\} - (v_N + v_L + \delta)k, \\ \text{where } (U_N, v_N, v_L, \delta) = \text{const.} > 0.$$

鈴木[2001, p.206]および同[2003a, pp.208-210]は、 δ と b と U_N が正值のパラ

メータだから、しかも、 b 、 U_N 、 v_N 、 v_L 、 δ が小ならば長期均衡は存在可能だが、逆にそれらが大きい値の場合には長期均衡は存在しない可能性を示している（もしも長期均衡が存在すれば、それが2個である可能性が高く、 k の値が小さい方の均衡点は動学的に不安定でも、大きい方の均衡点は動学的に安定となる。他方、長期均衡が唯一の場合には、長期均衡はいわば半安定的だが、下方に対して不安定的である）。

次に、自然失業率および完全雇用概念などについて再度考慮し、いっそうの一般化の可能性を検討する。動学的な社会厚生問題として、注目すべきは最低消費量 b であり、これが失業者だけについて考えられているということである。マクロ経済全体かつ社会厚生問題の視座から、概念の定義などを拡張することで、動学的方程式(3.1)をさらに一般化することができるだろう。この節の残余では、この新たな拡張的考察が試行される。

そこで、当該モデルがマクロ経済モデルであること、および、社会厚生問題を扱っていることを踏まえるとして、当該の考察が、用いられている概念の定義などによって狭く限定され、結果的に過度に狭められていないかを考えてみる。まず、マクロ経済モデルとしては、マクロ経済活動に関係する主だった集計の変数や関数などを用いているので、社会的な水準での考察を一応は形成できているが、 b のような消費は自然失業率の失業者以外にも現実の経済では実際にかなり存在する。次に、こうした失業者以外の存在は社会厚生問題としては考慮の対象に入れるべきである。こうした失業者以外の存在とは、実際的には、最低生活水準を送っている生活保護適用者と、生活上自立不可能な病人や身体障害者や高齢者、老齢の年金生活者などである（ここでは家計が対象なので子供は除外されている）。それらの中には子供と同様に扶養家族的な存在もあるだろうが、基本的には成人だから、属性としては労働可能な存在と見なすことができるだろう。こうした基本的に労働可能な人たちと雇用労働者や自然率での失業者を総計した人数の全体を、実際の労働統計での分類とは別にして「潜在的労働可能人口」（または手短に「潜在的労働力」）と改めて定義する。

こうした「潜在的労働可能人口」は全ての家計を含むものであるが、もちろ

ん、最低生活水準の消費だけを行うわけではなく、その一部には富裕な層の家計も含まれるだろう。とはいえ、年金生活者の高齢者がその大部分と考えられ、しかもこの多くは、長期的な生活の安定のために贅沢をせず、抑制的かつ守勢的な消費を心がける傾向にあると考えられる。それゆえ、ここでは、相対的に少数の富裕な高齢者などの家計の存在を無視して、潜在的労働可能人口を考えるので、潜在的労働可能人口（または潜在的労働力）＝雇用労働者＋自然率の失業者＋雇用対象外最低生活者の家計、という想定が用いられる。ただし、ここで最低生活という消費水準は、例えば生存に必要なぎりぎりの消費量というような貧困生活などの意味を反映するものではなく、その第3の存在であるところの、雇用対象外最低生活者の家計の全体から求められる平均的な意味の代表的消費量で定義されているものと想定されている。換言すれば、当該の経済は、家計の2階級社会と見ることもできる。

また、雇用対象家計または雇用対象者＝雇用労働者＋自然率の失業者という分類上の定義を加えれば、潜在的労働可能人口について一層明瞭に、潜在的労働可能人口（または潜在的労働力）＝雇用対象家計＋雇用対象外（最低生活者の）家計、とできる。さらに、 ω ＝雇用対象家計／潜在的労働可能人口、という比を定義すれば、 N ＝雇用対象家計＝ $\omega \times$ 潜在的労働可能人口、また、雇用対象外（最低生活者の）家計＝ $(1 - \omega) \times$ 潜在的労働可能人口とできる。この ω （一般に $0 < \omega < 1$ ）をパラメータと仮定し、かつ潜在的労働可能人口（または潜在的労働力）を効率単位で計って N_L と表し、これに合わせて関連の諸表現 k や F なども適当に再定義したものとすれば、上の(3.1)は、ほんの若干に過ぎないけれども表現上拡張され、次のように書き換えられる。ただし、 N_L の成長率表現にも記号 v_N を再利用する。

$$(3.1^*) \Delta k = s \{F(k, (1 - U_N)\omega) - b(U_N\omega + (1 - \omega))\} - (v_N + v_L + \delta)k, \\
 \text{where } (U_N, v_N, v_L, \delta) = \text{const.} > 0.$$

この動学的方程式(3.1^{*})の長期均衡点についても、パラメータ ω に関して考

察を適当に若干拡張すれば、上の(3.1)についての記述と類似の理解が得られ、均衡点の存在性についての上と同様に基本的な3つの可能性が確認できる。例えば、その理解は、パラメータ ω のみの上昇は均衡存在の可能性を強め、その低下は反対に均衡存在可能性を弱めるといったことなどである。この節の残余では、鈴木[2003b]の第3節と同様の展開で、その第3節での諸結果を、ここの ω 導入に合わせて書き換え、(3.1^{*})について拡張しておく。

(3.1^{*})の場合の新古典派成長モデルについても黄金律分析が可能である。また、仮に(2.1)とこの(3.1^{*})を入れ替えただけの変更を、単純に動学的最適化問題(2.4)に対して施せば、若干の表現上の内容的な相違が生じて、表現では前節とかなり同様の結論が得られる（諸定義の変更には要注意）。

命題3.1 動学的方程式(3.1^{*})で定義される新古典派成長経済が想定されるとき、この動学的厚生経済問題として動学的最適化問題が、(2.4)で(2.1)を放棄して、(3.1^{*})を採用するだけの変更がなされて、もしも ω と b の値が所与であるならば、(グラフ上で若干の変更が生じるが、結論の表現としては)補題1と補題2の主張は保持される。■（鈴木[2003b]第3節命題1の若干の拡張）

鈴木[2003b]の第3節と同様に、動学的最適化問題では、こうした u の定義上の関数表現が問題であり、代表的な消費者の効用水準を与える主要因の面で、雇用対象家計の消費量だけでなく、雇用対象外家計の消費量についても考慮する必要が生じる。それゆえ、動学的定式化が(2.1)から(3.1^{*})へ変更するのに伴って、社会的効用関数 u の表現も拡張的に変更する。前節となるべく同じ記号表現を用いれば、一般的な表現で(2.2)を若干拡張して、当該の黄金律問題が次のように定式化できる。

$$(3.2) \text{ maximize } u(c, b), \text{ with } \partial u / \partial \cdot > 0, \partial^2 u / \partial \cdot^2 < 0, \text{ s.t. } (3.1^*), \Delta k = 0, \\
 \text{ and } c = (1 - s) \{F(k, (1 - U_N)\omega) - b(U_N\omega + (1 - \omega))\}, \omega = \text{const.} > 0.$$

ただし、 $\partial u / \partial \cdot$ と $\partial^2 u / \partial \cdot^2$ は、関数 u の各要素についての偏微分係数を表している（効率単位を調整したこの種の定式化も可能である）。この社会的厚生最大化問題の黄金律、つまり社会的最適（性）条件は、(2.3) を若干変更して、次のようになる。

$$(3.3) \quad \partial F / \partial k = (v_N + v_L + \delta), \text{ and } \partial u / \partial b = \partial u / \partial c \cdot (U_N \omega + (1 - \omega)), \\ \text{with concavity of } u.$$

この(3.3)では、(2.3)には無い b に関する条件部分が付加されている。このことを要約して、次の命題と解釈が得られる。

命題 3.2 動学的方程式(3.1*)で定義される新古典派成長経済が想定されるとき、この動学的厚生経済問題として黄金律問題を(3.2)で定式化するならば、この黄金律条件は、(社会的効用関数 u が凹性を有するとして) 条件(3.3)で与えられる。■（鈴木[2003b]第3節命題2の若干の拡張）

命題 3.2 の解釈 命題 3.2 の黄金律条件では、社会的限界効用比と、潜在的労働可能人口に対する非雇用家計数の比率との均等が特徴であり、(3.1*)で定義される新古典派成長経済と社会的効用関数の解釈の限りでは、得られる b の社会的最適値に関して動学的な見地での社会保障政策の面から近似的に意味づけが可能である。■（鈴木[2003b]第3節命題2の解釈の若干の拡張）

さらに、ここでの拡張動学モデル(3.1*)に関して、(ラムゼイ-) キャス-クープマンズ型の動学的厚生経済分析を適用すると、前節の基本的な定式化(2.4)を若干変更して、当該の新古典派最適成長問題が次のように定式化される。

$$(3.4) \quad \text{maximize } \int_0^\infty u(c, b) e^{-rt} dt, \text{ subject to (3.1*) and } k_0 = \text{const.} > 0, \\ \text{where } (\omega, r) = \text{const.} > 0, \partial u / \partial \cdot > 0, \partial^2 u / \partial \cdot^2 < 0 (\text{concavity of } u),$$

$$\text{and also } c = (1 - s) \{F(k, (1 - U_N)\omega) - b(U_N\omega + (1 - \omega))\}.$$

それゆえ、この場合の新古典派最適成長問題(3.4)の動学的最適化条件は、前節と同様の手法に従って次のように導出される。

$$(3.5) \quad \Delta c = - \{(\partial u / \partial c) / (\partial^2 u / \partial c^2 + r)\} \{\partial F / \partial k - r - (v_N + v_L + \delta)\}, \\ \text{and (3.1*) with } k_0 = \text{const.} > 0, \partial u / \partial b = \partial u / \partial c \cdot (U_N \omega + (1 - \omega)), \\ \text{and also, } \lim_{t \rightarrow \infty} \{\partial u / \partial c \cdot e^{-rt} k\} = 0.$$

ただし、 r は、この(3.5)に含まれる $\partial u / \partial b = \partial u / \partial c \cdot (U_N \omega + (1 - \omega))$ という最適化条件の陰関数関係から導かれる次のような表現である。

$$(3.6) \quad r \equiv (\partial^2 u / \partial b \partial c) [\{\partial^2 u / \partial c^2 \cdot (U_N \omega + (1 - \omega)) - \partial^2 u / \partial c \partial b\} \\ / \{\partial^2 u / \partial b^2 - (U_N \omega + (1 - \omega)) \cdot \partial^2 u / \partial b \partial c\}].$$

ここでも、当該の現行価値表示の随伴変数を λ とすれば、当該の動学的最適化のために $\partial u / \partial c = \lambda$ が必要だから、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \{\lambda e^{-rt} k\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\partial u / \partial c \cdot e^{-rt} k\} = 0$ が当該の横断性条件である。それゆえ、一層詳細な条件無しには、この動学的体系が、この動学的均衡へと到る一義的な鞍点軌道で当該の動学的最適解を与えるかどうかは不明である。この動学的均衡は、 $\partial F / \partial k = r + (v_N + v_L + \delta)$ で特徴付けられ、前節での「修正黄金律」とほぼ同様な条件で与えられる。

補題 3 動学的方程式(3.1*)に従う新古典派成長経済が想定されるとき、この動学的厚生経済問題として動学的最適化問題を(3.4)で定式化するならば、この動学的最適化条件が(3.5)と(3.6)で与えられる最適経路は存在する可能性がある。もしも、この最適経路が存在して、明確な特徴づけを可能にするならば、動学的社会保障政策としての解釈も可能となる。■（鈴木[2003b]第3節

補題 3 の若干の拡張)

命題 3.3 動学的方程式 (3.1^{*}) に従う新古典派成長経済が想定されるとき、この動学的厚生経済問題として動学的最適化問題を (3.4) で定式化するならば、さらにもしも $|T|$ の値が (社会的限界効用の通減性 $\partial^2 u / \partial c^2$ に比べ) 相対的にかなり小さいならば、この動学的最適化条件が (3.5) と (3.6) で与えられる最適経路は存在し、しかも当該の動学的均衡が鞍点となるので、最適経路は単調でかつ一義的に決定される。それゆえ、当該の定式化の限り、命題 3.1 と類似の意味で、補題 1 と補題 2 の結論内容が (3.4) および (3.5) などについても保持される。■ (鈴木[2003b]第3節命題3の若干の拡張)

命題 3.3 の系 動学的方程式 (3.1^{*}) に従う新古典派成長経済が想定されるとき、この動学的厚生経済問題として動学的最適化問題を (3.4) で定式化すれば、さらにもしも $|\partial^2 u / \partial b \partial c|$ の値が (社会的限界効用の通減性 $\partial^2 u / \partial c^2$ に比べ) 相対的にかなり小さく、かつ、 $|\partial^2 u / \partial b^2|$ の値が相対的に大きいならば、命題 3.3 の結論が保持される。■ (鈴木[2003b]第3節命題3.3の系の若干の拡張)

命題 3 の系の例題 動学的方程式 (3.1^{*}) で定義される新古典派成長経済が想定されるとき、この動学的厚生経済問題として動学的最適化問題を (3.4) で定式化するならば、さらにもしも $|\partial^2 u / \partial b \partial c| = 0$ ならば、命題 3.3 の結論が保持される。■ (この場合、命題 3.3 は、ほぼ命題 3.1 に還元され、両命題は近似的に同じになってしまう。：鈴木[2003b]第3節命題3の系の例題の若干の拡張)

このように、この場合での主張は、社会的効用関数の想定しだいで、つまり、動学的な社会的厚生関数の定式化しだいで左右される。特に、命題 3.1 などに類似の場合には一層そうだが、動学的均衡の位置や最適経路の動学的速度に

影響が及ぶということがわかる。また、動学的な社会的厚生関数について先験的に検討することには、明らかに不可避的な限界があり、一層詳細でかつ有用な含意を得るには、経験的な考察が必要となる。

IV. 基本的なケインジアン最適経済成長モデルと完全雇用

ケインジアン基本的な経済成長理論としては、周知のハロッド-ドーマー型経済成長モデルがある。しかしながら、ケインジアン最適経済成長理論としては、ハロッド (Harrod[1973, chap.5]) の自然成長率 (達成) 重視という理解以上には、一部の基本的な試み (鈴木[2001]第5章) があるだけでほとんど知られていない。それゆえ、新古典派モデルに匹敵するような位置づけが与えられているケインジアンの標準的な最適成長モデルと言えるものはまだ確立されていないが、その一部の新たな試みについて述べることはできる。ここでは、一つのケインジアン最適成長モデルとして、鈴木[2001, pp.95-103] (第5章) のモデルが検討され、若干の修正や補充ないし解釈などが加えられる。

そこで、まず、その第5章第2節 (pp.97-99) のモデル構造から分析内容までを手短かに要約する。前節までの変数に加えて、資本係数の逆数を $v = Y/K$ 、資本稼働率を α 、完全雇用に対応する資本稼働率水準を α_f と表す。また、このモデルでは、資本 (ストックの) 減耗関数が用いられているので、これも考慮すると、当該の状態方程式は次のように与えられる。

$$(4.1) \quad \Delta k = svk\alpha - \delta(k) - vk, \quad 0 < \delta', \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_f, \\ \text{and, } 0 < (v, s, v, \alpha_f, k_0) = \text{const.}$$

ただし、 $\delta' \equiv d\delta/dk$ であり、また $\delta'' \equiv d^2\delta/dk^2$ は下で用いる。

さらに、社会的な動学的最適化の目的関数を、雇用率に関して定義する。すなわち、雇用率を e_m 、完全雇用率を e_n 、雇用の平均生産性を ϕ と定義すれば、この定義から次のことがわかる。

$$(4.2) \quad e_m = vk\alpha / \phi, \quad 0 \leq \phi, \quad 0 \leq e_m \leq e_n = \text{const.}$$

しかも、 $\alpha / \phi = \xi(\alpha)$ と仮定すれば、これを用いて(4.2)は次のような(4.3)に書き換えられる。

$$(4.3) \quad e_m = vk\xi(\alpha), \quad 0 < \xi', \quad 0 > \xi'' (\alpha / \phi = \xi(\alpha)).$$

ただし、 $\xi' \equiv d\xi/d\alpha$ であり、また $\xi'' \equiv d^2\xi/d\alpha^2$ である。

ハロッド-ドーマー型の最適経済成長問題または動学的厚生経済問題としての動学的最適化は、社会厚生ストックの表現で、社会厚生フローを割り引く社会的割引率を r と表して用いることで次のように定式化される。ただし、社会的割引因子を構成する e は自然対数の底を表している。

$$(4.4) \quad \text{maximize}_{(\alpha)} \int_0^\infty e_m \cdot e^{rt} dt, \quad \text{s.t. } e_m \leq e_n, \quad (4.1), \text{ and, } (4.3).$$

ただし、ここでは、政府などの経済政策当局による直接的にかつ連続的に制御可能な α が想定されている。このような表現は、被積分関数である割引かれた社会厚生フローにおいて、雇用率を長期的政策目標の核にしている点でケインジアン的な定式化と解釈される。

前節までと同様に、変分法や最適制御理論を適用して、当該の動学的社会厚生最大化問題としての動学的最適化問題(4.4)は解くことができる。ここでも、同様に、経常的価値表示のハミルトニアンや随伴変数 λ を用いれば、その解経路としての最適経済成長経路のための必要条件が次のように得られる。

$$(4.5 \text{ ①}) \quad \xi' + \lambda s = 0, \text{ and, } \xi'' < 0 \text{ with } (4.3) \text{ and } e_m \leq e_n,$$

$$(4.5 \text{ ②}) \quad \Delta\lambda = (r - sv\alpha + v + \delta')\lambda - v\xi, \\ \therefore \Delta\lambda = -(r + v + \delta' - sv\alpha)\xi' / s - v\xi,$$

$$(4.5 \text{ ③}) \quad \text{also, } \lim_{t \rightarrow \infty} \{(-\xi' / s) \cdot e^{rt} k\} = 0.$$

なお、こうした動学分析の通例に従って、横断性条件(4.5 ③)も併記する。ここで、この動学的均衡点の存在可能性について補充説明を記述しておく。

解経路としての最適経済成長経路は、(4.1)と(4.5 ②)の連立動学体系が決定する経路で、かつ(4.5 ③)を充たす経路で決定されるから、この動学的均衡点の存在性が重要となる。特に、(4.5 ②)では、一見すると均衡 $\Delta\lambda = 0$ の可能性が不明である。このためには少なくとも、 sv が相対的に大きく、それゆえに $0 < (r + v + \delta') / (sv) \ll 1$ かつ $\xi / \xi' \ll 1$ となるようにこの比が十分に小さい必要があるだろう。一方、 s や v は、例えば1/10単位や1/5単位で近似できるから、これらの積を0.06といった値で考えることができるかもしれない。普通に見て、 r と v は、例えば1/100単位で、これらの和を0.05未満のかなり小さな値と考えても無理がないが、 δ' については明らかではない。それゆえ、それら3つの各値を同程度の小単位で考えることができる場合には、 $(r + v + \delta') / (sv)$ という比の大きさについても、1/10単位の1より比較的に小さい値で考えることができるかもしれない。もしもそうならば、一見難しそうだが、適当な α の値で $(r - sv\alpha + v + \delta') < 0$ とでき、つまり $\Delta\lambda > 0$ や $\Delta\lambda < 0$ が可能であり、この範囲にある α と ξ' や ξ の値の組によっては、 $\Delta\lambda = 0$ が全く不可能というわけではなくなる。

また、(4.5 ②)についてももう少し考えてみると、動学的均衡の存在可能性について若干明らかになる。(4.5 ②)で、 $\Delta\lambda = -v\xi' \{ (r + v + \delta') / sv - \alpha + \xi / \xi' \}$ として、諸仮定から $\alpha = 0$ についてこの中括弧内部は、明らかに $0 < \{ \cdot \}$ かつ $0 < \Delta\lambda$ である。また、 α の微分を考えると $(\partial / \partial \alpha) \{ \cdot \} = -1 + (\xi'^2 - \xi\xi'') / \xi'^2 = -\xi\xi'' / \xi'^2 > 0$ も明らかである。それゆえ、 $\partial(\Delta\lambda) / \partial \alpha = -v \{ \xi'' \{ \cdot \} - \xi\xi'' / \xi' \} = -v\xi'' \{ \{ \cdot \} - \xi / \xi' \} = -v\xi'' \{ (r + v + \delta') / sv - \alpha \}$ となり、 $\Delta\lambda$ の変化の符号から判断しようとする理解はすぐ上の段落の内容に帰着し、その場合には $\partial(\Delta\lambda) / \partial \alpha < 0$ とできるわけである。さらに、同様に $\partial^2(\Delta\lambda) / \partial \alpha^2 = -v(\xi''' \{ \cdot \cdot \} - \xi'')$ で、もしも $\xi''' \geq 0$ ならば、 $\partial^2(\Delta\lambda) / \partial \alpha^2 < 0$ とでき、 $\alpha = 0$ の近傍で $\Delta\lambda > 0$ でも、前段落の場合も考慮すると、動学的均衡点の存在可能性は比較的にだが高くなる。もちろん、

その ξ''' については想定上限界だがもっと考えるべきである。鈴木[2001, p.101]ではこのことも考慮して、 $|\xi'''|$ の値が十分に小さいものと仮定している。それゆえ、まだ疑わしさは残るが、こうした存在可能性に注目して、当該の動学的均衡の存在を仮定しつつ、最適経済成長経路についての分析を進める。

解経路としての最適経済成長経路は、(4.1)と(4.5 ②)の連立動学体系で基本的な特徴を決定される。それゆえ、その候補経路の軌道の諸性質について考える。通常の性質の（つまり、ここでは連続な ξ''' などの条件を持つように古典的に定義された）解経路を考えるために、(4.5 ①)を用いて、 λ を α に帰着させるように(4.5 ②)の表現を変更する。

$$(4.6) \quad \Delta\alpha = (r + v + \delta' - sv\alpha)\xi'/\xi'' + sv\xi/\xi'' \\ = [\{(r + v + \delta')/(sv) - \alpha\}\xi' + \xi]sv/\xi''.$$

かくして、当該の体系の動学的均衡点は、 $\Delta\alpha = \Delta k = 0$ についての次の連立方程式から特徴付けられる。もちろん、代入などによりその均衡値も得ることができる。

$$(4.7) \quad \alpha = \delta/(svk) + v/(sv), \text{ and, } \delta/k - \delta' = sv\xi/\xi' + r.$$

これについて重要なのは、左の式は明瞭だが、この右の式で、 α と k の一意的な関係が確認できるかどうかである。この右式で、右辺の微係数は常に正で α に対して単調だが、この左辺の微係数は $\delta'/k - \delta/k^2 - \delta''$ である。もしも δ'' の絶対値が相対的に十分に小さいときには、 $\delta'/k - \delta/k^2$ の符号が確定すれば、その右式でも単調な関係が得られる。ここでは、 $|\delta''|$ を相対的に十分に小さくかつ $\delta'' < 0$ と仮定する。鈴木[2001, pp.100-103]（第5章第3節）ではこの反対の符号が仮定されていたが、それは十分条件の計算の際の誤りのためであった。ここでの相対的に十分に小さい $\delta'' < 0$ という仮定の下では、 $-\delta'' + \delta'/k - \delta/k^2 = -\delta'' + (\delta' - \delta/k)/k < 0$ とできる。それゆえ、この仮

定で均衡が存在すれば、一意とできることがわかる。

次に、当該の動学的体系の均衡点近傍で、次のように局所的なヤコビ行列の固有値を調べ、これから最適解候補軌道の性質を確定する。ただし、上記に従って、 ξ の3階微分係数の絶対値は無視しうるほど小さいものと仮定している。

$$(4.8) \quad \begin{vmatrix} sv - \delta' - v & svk \\ \delta''\xi'/\xi'' & r + \delta' - \delta/k \end{vmatrix}.$$

δ の微分係数に関する諸仮定と、経験的な解釈 $0 < sv - \delta/k$ から、トレースの符号は正と考えられる。また、非対角要素の積自体が正值となるから、当該の固有値は異符号の実数なので、当該体系の最適経路の候補経路が向かう均衡点は鞍点である。これにも鈴木[2001, pp.100-103]（第5章第3節）では計算の誤りがあった。これらの誤りや、不明瞭で過大に見える表現に修正を施して、鈴木[2001, pp.100-103]（第5章第3節）で提示した補題1、補題2、定理1をそれぞれ次のように訂正しておく。

補題4.1 ハロッド-ドーマー型最適経済成長の基本問題(4.4)で、最適解候補軌道は(4.1)と、(4.5)または(4.6)で得られる。この動学的均衡は、(4.7)で完全に特徴付けられ、また、もしも存在して、 δ の、正の1階、および、負の2階微分係数の絶対値が共に十分に小さいならば、一意である。■

補題4.2 ハロッド-ドーマー型最適経済成長の基本問題(4.4)で、最適解候補軌道の体系(4.1)と、(4.5)または(4.6)が、(4.8)を用いて局所的に近似でき、この動学的均衡が存在するとき、しかも ξ の3階微分係数が十分に小さく無視できるとき、諸々の δ の微分（係数）条件（： δ の、正の1階、および、負の2階微分係数の絶対値が共に十分に小さい）が充たされるならば、その動学的均衡（点）は鞍点となる。■（局所的な鞍点は一般に大域的にも鞍点である。）

命題 4.1 ハロッド-ドーマー型最適経済成長の基本問題(4.4)で、最適候補軌道は(4.1)と、(4.5)または(4.6)で得られ、この動学的均衡は、(4.7)で完全に特徴付けられる。もしも、この動学的均衡が存在して、 ξ と δ の補題の微分条件が満たされれば、その均衡は一意であり、その動学的均衡(点)は鞍点となる。このとき、最適経済成長経路としての最適解経路は一義的で単調な(漸近的な)特異点軌道として存在する。■

ただしここで、明らかなことではあるが、鈴木[2001, pp.102-103]での分析では簡単なこととして省略したにもかかわらず、そこでの計算に誤りがあったりしたので、当該の場合に十分条件が満たされているかどうかを手短かに確認しておく。すなわち、最適な水準での λ を伴う当該のハミルトニアンを状態変数で2回偏微分して δ の微分条件を考慮すると、 $-\lambda\delta'' < 0$ だから、その強凹性が確認される。これは周知のアロー(の十分)条件を満たしているので、当該の必要条件を満たす最適解候補経路は当該問題の最適経路つまり最適経済成長経路である。

この節での考察は、経験的な可能性も念頭におきながら、内点解経路の可能性を追求しているが、周知のように、こうした分析的関心は一般の動学的経済分析の考察ではごく普通の企てである。ここでの基本的な定式化から、端点解経路 $\alpha = \alpha_f$ が最適解経路になるかどうか、またはこの可能性が極めて高いかどうかを、先験的に、即座に判断することはできないが、諸パラメータの値の特定の組によって当該の(4.1)と(4.5)の体系に動学的均衡が存在しないときはその可能性が高いだろう。それゆえ、この動学的均衡の不存在自体の可能性も決して低くはないが、理論的興味に乏しい場合であり、その場合の δ や ξ などの形と端点解および(4.1)や(4.5)は無矛盾のはずである。それから、鈴木[2001, pp.102-103]の例題1も別の δ の特定化で訂正するべきであるが、一例に過ぎないので、ここではこれ以上展開せず、ただ放棄するだけにとどめておく。

なお、前節での、新古典派モデルについて考察されているような拡張をここでの分析にも、もちろん適用可能である(本稿では、この検討も予定されてい

たが、紙幅の規定分量を超えてしまうので、今後さらに引き続き研究を続け、別の機会にそれを公表するでしょう)。

参考文献

- 足立英之『マクロ動学の理論』(経済学叢書16), 有斐閣, 1994年。
 秋山裕『経済発展論入門』(経済学研究双書), 東洋経済新報社, 1999年。
 浅野栄一『景気循環と経済成長』(経済学叢書9), 新評論, 1970年。
 Barro, R.J. and X.Sala-i-Martin, *Economic Growth*, McGraw-Hill, 1995. / 大住圭介 訳, 『内生的経済成長論』(I・II), 九州大学出版会, 1997年。
 Burmeister, E. and A.R. Dobell, *Mathematical Theories of Economic Growth*, The Macmillan Company, 1970/邦訳: 佐藤隆三&大住英治(共訳)『テキストブック現代経済成長理論』勁草書房, 1976。
 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, vol.27, 1965 (pp.233-240).
 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem," *Econometrica*, vol.34, 1966 (pp.833-850).
 Domar, E.D., "Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment," *Econometrica*, vol.14, April 1946 (pp.137-47); reprinted in Stiglitz and Uzawa [1969].
 Domar, E.D., *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford Univ. Pr., Inc., New York, 1957/宇野健吾 訳『経済成長の理論』東洋経済新報社, 1959年。
 Harrod, R.F., "An Essay in Dynamic Theory," *Economic Journal*, Vol.XLIX, March 1939 (pp.14-33); Reprinted in Stiglitz and Uzawa [1969] (pp.14-33).
 Harrod, R.F., *Towards a Dynamic Economics: Some Recent Developments of Economic Theory and Their Application to Policy*, Macmillan, 1948/ 高橋長太郎・鈴木諒一 訳『動態経済学序説』有斐閣, 1953年。
 Harrod, R.F., *Economic Dynamics*, Macmillan, London, 1973 / 宮崎義一 訳『ハロッド経済動学』丸善, 1976年。
 Jones, C.I., *Introduction to Economic Growth*, W.W.Norton, 1998 / 香西泰 訳『経済成長理論入門』日本経済新聞社, 1999年。
 Jones, H.G., *An Introduction to Modern Theories of Economic Growth*, Thomas Nelson & Sons, Middlesex, 1975/ 松下勝弘 訳『現代経済成長理論』マグローヒル好学社, 1980年。

- Koopmans, T. C., "On the Concept of Optimal Growth," pp.225-300, in *The Econometric Approach to Development Planning*, Chicago : Rand McNally, 1965.
- Lucas, R. E., "On the Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economics*, vol.22, July, 1988 (pp.3-42).
- 二階堂副包「新古典派成長の病理」『季刊 理論経済学』Vol.XXX, No.1, April, 1979 (pp.1-9)。
- 置塩信雄「均衡発展の不安定性」『リーディングス 経済成長論』(森嶋通夫・伊藤史朗 編, 創文社), 1970年 (第4部の15, pp.233-50)。
- 大住圭介『長期経済計画の理論的研究』勁草書房, 1985年。
- Ramsey, F. P., "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, vol.38., December, 1928 (pp.543-559).
- Romer, D., *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, 1996 / 堀雅博・他 訳『上級マクロ経済学』日本評論社, 1998年。
- Romer, P. M., "Increasing Returns and Long-run Growth," *Journal of Political Economy*, vol.94, 1986 (pp.1002-1037).
- Romer, P. M., "Capital Accumulation in the Theory of Long-run Growth", in R. J. Barro, ed., *Modern Business Cycle Theory*, Oxford : Basil Blackwell, 1989.
- Romer, P. M., "Endogenous Technological Change," *Journal of Political Economy*, vol. 98, 1990 (pp.S71-S102).
- Rose, H., "Unemployment in a Theory of Growth," *International Economic Review*, Sept., 1966 (pp.260-282).
- Rose, H., "On the Non-Linear Theory of the Employment Cycle," *Review of Economic Studies*, April., 1967 (pp.153-173).
- Rose, H., "Real and Monetary Factors in the Business Cycle," *Journal of Money Credit and Banking*, May., 1969 (pp.138-152).
- 齊藤誠『新しいマクロ経済学』有斐閣, 1996年。
- 佐藤隆三『経済成長の理論』(経済学全集), 勁草書房, 1979 (第3刷)。
- Sen, A.(ed), *Growth Economics*, (Penguin Modern Economics Readings), Penguin Books, 1970 (特にpp.9-16).
- 柴田章久「内生的経済成長理論」『季刊 理論経済学』Vol.44, No.5, 1993(pp.385-401)。
- Solow, R.M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Vol.LXX, February 1965 (pp.65-94) ; Reprinted in Stiglitz & Uzawa (eds) [1969] (pp.58-87).

- Solow, R.M., *Growth Theory*, Oxford Univ. Pr., 1970 / 福岡正夫 訳『成長理論』岩波新書, 1971年。
- Solow, R.M., *Growth Theory*, 2nd., Oxford Univ. Pr., 2000 / 福岡正夫 訳『成長理論 (第二版)』岩波新書, 2000年。
- Stein, J.L., *Money and Capacity Growth*, Columbia Univ. Pr., 1971 / 佐藤隆三 訳『マネタリズムとケインジアン理論の統合』春秋社, 1981年。
- Stein, J.L. and K. Nagatani, "Stabilization Policy in a Growing Economy," *Review of Economic Studies*, April, 1969 (pp.165-183).
- Stiglitz, J.E., and H. Uzawa (eds), *Readings in the Modern Theory of Economic Growth*, The M.I.T. Press, 1969.
- 鈴木康夫『不安定性原理とハロッド=ドーマー型経済変動成長理論』(滋賀大学経済学部研究叢書第35号), 滋賀大学経済学部, 2001年 : [2001a]。
- 鈴木康夫「ハロッド=ドーマー型モデルと現代経済成長理論」『彦根論叢』(滋賀大学経済学会) 第332号, 2001年 (pp.197-214) : [2001b]。
- 鈴木康夫『ケインズ革命とマクロ経済学』昭和堂, 2003年 : [2003a]。
- 鈴木康夫「基本的な最適成長理論と完全雇用」『彦根論叢』(滋賀大学経済学会) 第343号, 2003年 (pp.51-68) : [2003b]。
- Swan, T.W., "Economic Growth and Capital Accumulation," *Economic Record*, Vol. XXXII, No.63, November 1956 (pp.334-61) ; Reprinted in Stiglitz & Uzawa (eds) [1969] (pp.88-115).
- 武野秀樹・山崎良也(編)『経済成長論』有斐閣, 1977年。
- 鍋田忠彦『マクロ・ダイナミックス：現代インフレーションの基礎理論』東洋経済新報社, 1976年。
- Uzawa, H., "Optimum Technical Change in an Aggregate Model of Economic Growth," *International Economic Review*, vol.6, Jun., 1965 (pp.18-31).
- 吉川洋『現代マクロ経済学』(現代経済学選書12) 創文社, 2000年。