606

ガタを有する弾性梁背骨曲線の簡便計算法

Simplified Method for Calculating a Back-bone Curve of Elastic Beam with Gap Support

正 高畑 秀行(高松高専) Hideyuki Takabatake(Takamatsu n.c.t) 〇学 宇根坪裕幸(高松高専) Hiroyuki Unetsubo(Takamatsu n.c.t)

355, Chokushicyo, Takamatsu, Japan, 761-8058

1.研究の背景と目的

弾性梁の非線形振動問題において、しばしば問題となるのが解析 解の難解さである.梁の線形曲げ振動の基礎方程式については4階 微分が存在し、非線形振動となるとますます困難になる.有限要素 法などを利用して数値解を求めるにしても、繰返し計算を行い多く の計算時間を要することが必要である¹⁾.また、非線形バネ・質 点系の背骨曲線を求める方法は提案されているが、非線形弾性梁の 背骨曲線を解析的に求めた事例は見当らない、そこで本研究では、 非線形弾性梁・背骨曲線を近似的に簡便に求める方法を提案し²⁾、 その妥当性をガタのある片持梁の強制振動を例に検証する.

2. 解析対象

解析対象をFig1, Fig2に示す. Fig1は長さの異なる上板と下板 で梁を挟み,梁を固定している加振台を一定変位で周波数加振する ことで,梁は上下の当て板A,B点を支点とするガタを伴う非線形振 動となる. この梁形状が長さ方向と直角にわずかに反った梁を使用 する. 上に反っているとき,B点におけるすき間は0.35mmである. Fig2は上板と下板の長さは同じで,上板・梁・下板の間にそれぞれ 紙を挟み,すき間を上下とも0.07mmとし,Fig1と同様の加振を行 う.梁はC点及びD,D'点を支点とするガタを伴う非線形振動になる. 梁形状は反っていない梁を使用する. ピックアップは変位検出用と して加振台と梁先端に取付けている.



Fig.1 Instalation of beam with oneside gap support.



Fig.2 Instalation of beam with bothside gap support.

3. 計算手法の概要

1)線形等価質量、線形等価バネ定数の算出

本計算手法では線形弾性梁の曲げ振動を1自由度バネー質点系へ 近似的に変換することを考える.まず、線形等価質量 m_L と線形等 価バネ定数 k_L の算出方法を示す。弾性梁の基礎式は式(1)で与えら れる.ここで、E:ヤング率、I:断面2次モーメント、 ρ :密 度, A:断面積, y(x,t):変位

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad (1)$$

 $y(x,t) = Y(x) \sin \omega t$ と仮定し、式全体を梁の長さ方向x について 積分することにより次式を得る. 1 は梁の全長を示す.

$$m_{L} \frac{\partial^{2} \partial(t)}{\partial t^{2}} + k_{L} \delta(t) = 0 \qquad (2)$$

$$\Xi \Xi \overline{C},$$

$$m_{L} = \int_{0}^{t} \frac{\rho A Y(x)}{Y(l)} dx \quad (3), \quad k_{L} = \int_{0}^{t} \frac{EI}{Y(l)} \frac{\partial^{4} Y(x)}{\partial x^{4}} dx \quad (4)$$

$$\delta(t) = Y(l) \sin \omega t \qquad (5)$$

式(2)は1自由度バネ質点系に置き換えた式となっており、 *る(1)* は梁先端の変位を表す、線形固有振動数は式(6)から求まる.

$$f_{L} = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{L}}{m_{L}}} \tag{6}$$

 m_{L}, k_{L} の計算において梁のたわみ振幅Y(x)が必要であり、梁に加わる荷重の設定方法によって種々の値をとる.

梁がFig1のA点およびFig2のC点を支点としているときは静定梁 (片持梁)となり、固定端を変位一定加振したときの慣性力: $-pA\omega^2 Y(x)$ を静的な分布荷重w(x)とみなしFig3のように作用し ていると考える.このときの静的たわみ曲線を用いて、式(3),(4)よ m_{μ}, k_{μ} を求める.



Fig.3 Load model on a canti-lever beam.

梁がFig1のB点およびFig2のD, D'点に接触しているときは,不 静定梁となる.中間支持点(B, D, D')を固定端とする片持梁と みなし,変位一定加振したときの慣性力: $-\rho A \omega^2 Y'(x')$ がFig4 のように静的に作用すると考える.ここでY'(x')は中間支持点を 固定端とする片持梁の変位振幅を用いる.このときの静的たわみ曲 線を用いて,式(3),(4)より $m_{i,2},k_{i,2}$ を求める.



Fig.4 Load model on a beam with a redundant support.

日本機械学会東海支部岐阜地区講演会講演論文集('01.9.15) Na013-2

2) 非線形等価質量, 非線形等価バネ定数及び背骨曲線の算出

Fig.5はFig.2の両当り非線形弾性振動梁の復元力特性(実線)を示しており、非線形等価バネ定数 k_n は前述1)にて求めた k_{L1} 、 k_{L2} より一点鎖線の傾きとして求まる. 図中の x_{pp} は復元力をプラス側、マイナス側で同じ高さにとったときの復元力に対応する梁先端の振幅値である. 周波数34時加振では、プラス側、マイナス側で加振力は同じになるとの判断である. 非線形等価質量 m_n は図中の x_1, x_2, ϵ 用いて次式より求める.



Fig.5 Calculation of non-linear equivalent spring constant k_N of bothside gap beam.

非線形固有振動数(背骨曲線) f_N は各 x_p について次式より求める.

$$f_N = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k_N}{m_N}} \tag{8}$$

4. 実験装置及び方法

実験装置として動電型加振装置(加振力7000[N])を用い、固定端を 変位量一定で周波数掃引加振した、梁先端に取付けた加速度圧電型 ピックアップ(質量3[g))により変位を求めた。

5. 線形等価質量、線形等価パネ定数の検証

1) 厳密解との比較

梁がFig1のA点を支点とした片持梁(静定梁)において,加振台(固定端)を片振幅0.1[mm]変位させた場合,Fig3の荷重によるたわみ曲線を用いて,式(3),(4)より m_{L1} =0.3916 ρAI , k_{L1} =4.909 EI/I^3 となる.片持梁の厳密解であるたわみ曲線から求めると m_{L1} =0.3915 ρAI , k_{L1} =4.839 EI/I^3 であり,厳密解に近い値となっている.

2) ANSYSによる計算との比較検討

梁がFig1のB点, Fig2のD, D'点の如き中間支持点(梁との ギャップなし)を有する不静定梁(*I*=180[mm],幅=18.5[mm],高 さ=3.2[mm]について,有限要素法プログラムANSYSより求めた固 有振動数と本稿にて提案する m_{L2} , k_{L2} を用いた固有振動数を比較 した結果がFig6である. a_0 が0~90[mm]の範囲ではよく合ってい ることがわかる.これより, m_{L2} , k_{L2} を用いた不静定梁の固有振 動数の算出が妥当なものであることの証明となった. a_0 が90[mm] を超えると合わなくなるが,これはANSYSによる計算モデルが, Fig1, Fig2に示す本解析対象の境界条件と一部異なることに起因す る.っまり,本解析では固定端から中間支持点までは下へはたわま ないのに対し,ANSYS計算モデルはたわむモデルとなっているた めである.



Fig.6 Natural frequency of beam with redundant support. [Indeterminate beam.]

6. 実験結果との比較検討

Fig.7にFig.2で示した両当り非線形弾性振動梁の共振曲線(実験)と、本稿にて提案する式(8)より求めた背骨曲線を示す.実験での加振台の振幅は0.15[mm-pp]である.





加振周波数を低周波から高周波に掃引したときは、50[Hz]から上板、下板と衝突する非線形振動になり、梁先端変位は徐々に上昇し 146[Hz]で一気に下降している。逆に高周波から低周波に掃引した ときは、135[Hz]のとき梁先端変位が急上昇し、50[Hz]まで非線形 振動している。加振振幅が低振幅になるにつれて、共振曲線の幅が 細く、傾きが小さくなり背骨曲線に近づいてくる傾向がある。この ことから、本稿にて示した背骨曲線(●印)が、実験で求めた共振 曲線の背骨曲線とほぼ一致することが判明し、提案する手法の有効 性を証明している。

参考文献

1) 中桐・高畑,背骨曲線のシフト・シンセシス,

日本機械学会第70期全国大会講演論文集(vol.A)No.920-78,

p.39~41 (1992)

2) 三木・高畑,弾性粱・背骨曲線計算法の提案,日本機械学会 中国四国学生会第30回学生員卒業研究発表講演会講演前刷集, p.122 (2000)