

## 速度緩和を用いた超音速流の亜音速計算法

正 ○杉浦崇之 (豊橋技科大院) 正 中川 勝文 (豊橋技科大)

Takayuki SUGIURA and Masafumi NAKAGAWA

Dept. of Mech. Eng., Toyohashi Univ. of Tech., 1-1 Hibarigaoka, Tenpaku, Toyohashi 441-8580, Aichi

Key Words : Supersonic, Critical Condition, Relaxation, Subsonic Shock waves

## 1. 緒言

高速気体流れの解法の問題点の1つは、臨界現象である。臨界流の発生の理由は流れの速度が音速より速くなり、下流の情報が上流に伝わらなくなり、流れが上流の条件だけで決まってしまうためである。したがって、これを解くためには臨界条件を求め、ここで解法を変更する必要がある。著者らはこれまで高速ミスト流のノズル流れの研究を行ってきたが、その中で運動量の緩和現象を扱い、2つのマッハ数が存在することを示してきた。流れを支配するマッハ数が1より小さい亜音速であるにもかかわらず、平衡流から見ればマッハ数が1より大きいミスト流には、擬似的な臨界現象が存在し、また、この亜音速流中に、衝撃波に似た圧力上昇も存在することを示して<sup>(1)</sup>きた。この考えを拡張し、亜音速の条件で、超音速の気体の流れ場を解く方法を本報告で提案する。そして、ノズル流れ場での気体の超音速流と発生する衝撃波を亜音速の支配方程式で解いた結果を示す。

## 2. ミスト流中に発生する亜音速衝撃波

高速ミスト流のノズル流れの特徴は、質量の大きな液体が加速されずに、質量の小さい気体が加速されやすいことにある。この現象を表すために著者ら<sup>(1)</sup>は以下の基礎式を導出してきた。

## 2.1 高速ミスト流の基礎式

流れ方向 $z$ に沿って流路断面積 $A$ が変化するノズルの中を、気体と液体がそれぞれ $w_g, w_l$ の速度で減圧加速する場を考える。相変化を起こさないとき、気体と液体の連続の式は、ボイド率を $\alpha$ として(1)、(2)のように書かれる。運動量の式は断面積変化による圧力降下が大きいのので圧力損失を無視すると、(3)式となる。また、エネルギーの保存式は気体の温度が等しい場合、(4)式で表される。気体の温度が異なる場合の解析<sup>(2)</sup>を行ったが温度緩和は、衝撃波の発生についてそれほど重要でないので、ここでは省略する。液体と気体の速度差を決める緩和方程式(5)は液滴の運動量の式から得られる。液滴の摩擦抵抗がストークスに従うならば、緩和時間 $\tau$ は $\rho_l D^2 / (18\rho_g \nu)$ となる。

$$\frac{d}{dz} \alpha \rho_g w_g A = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz} (1 - \alpha) \rho_l w_l A = 0 \quad (2)$$

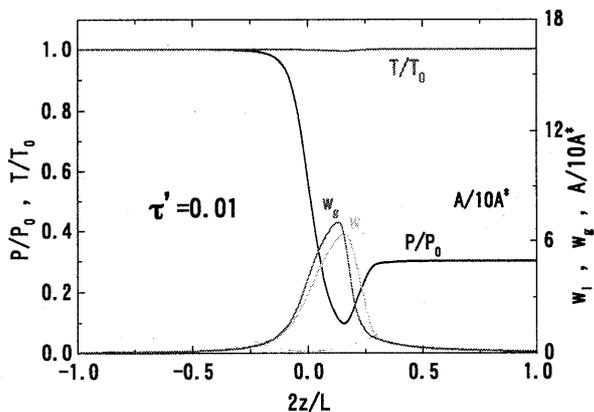


Fig.1 Disperse shock waves in Two-phase Flow

$$\alpha \rho_g w_g \frac{dw_g}{dz} + (1 - \alpha) \rho_l w_l \frac{dw_l}{dz} + \frac{dp}{dz} = 0 \quad (3)$$

$$x \left( \frac{w_g^2}{2} + c_p T_g \right) + (1 - x) \left( \frac{w_l^2}{2} + \frac{p}{\rho_l} + c_l T_g \right) = \text{一定} \quad (4)$$

$$w_l \frac{dw_l}{dz} + \frac{1}{\rho_l} \frac{dp}{dz} = \frac{w_g - w_l}{\tau} \quad (5)$$

ここで、 $\rho_g, \rho_l$ は気液の密度で、気体は理想気体、液体は非圧縮とした。 $c_p$ と気体の定圧比熱、 $c_l$ は液体の比熱で一定とし、クオリティ $x$ もノズル流れ中で一定である。

## 2.2 高速ミスト流の圧縮性を表すマッハ数

これらの基礎式から得られる臨界条件を示すマッハ数は(6)式となる。液体の密度は非常に大きいので、これは $w_g^2 / (\gamma_m p / \rho_g)$ となり、ほぼ気体のマッハ数に一致する。ただし、ここでは気液の等温を仮定したので、比熱比 $\gamma_m$ はほぼ1となる。 $w_g = w_l$ とし、緩和方程式(5)を用いない運動量平衡流れの基礎式から得られるマッハ数は(7)式となり、 $\rho_m = 1 / (x / \rho_g + (1 - x) / \rho_l)$ が大きいので(6)式に比べ大きくなる。したがって、気体の音速に比べ遅い流れでも、二相流の平衡音速に比べ十分大きな流れが存在する。

$$M_f^2 = \frac{x}{\gamma_m \rho_g w_g p} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\rho_g^2 w_g^3} + \frac{(1-x)}{\rho_l^2 w_l^3}} \quad (6)$$

$$M_e^2 = \frac{x \rho_m^2 w^2}{\gamma_m \rho_g p} \quad (7)$$

ここで、 $\gamma_m = (x c_{pg} + (1 - x) c_l) / (x c_{vg} + (1 - x) c_l)$ である。

## 2.3 高速ミスト流に発生する亜音速衝撃波

Fig.1に $A/A^*$ で示すような2次曲線に変化する断面積の先細末広ノズルで、減圧加速するミスト流の解析の結果を示す。水の沸騰二相ミスト流を想定し、クオリティ $x=0.01$ 、比熱比 $\gamma=1.4$ 、 $c_l/c_v=1$ 、入口密度比 $\rho_g/\rho_l=0.001$ 、出入口圧力差0.3とした。Fig.1は緩和時間 $\tau$ の小さい平衡流に近い場合で、図に示される圧力分布 $p/p_0$ はノズル流れのマッハ数が1に比べ小さいにもかかわらず、末広部で加速し、衝撃波に似た形状の圧力上昇を示している。Fig.2はノズル長さ $L$ と気体音速で緩和時間

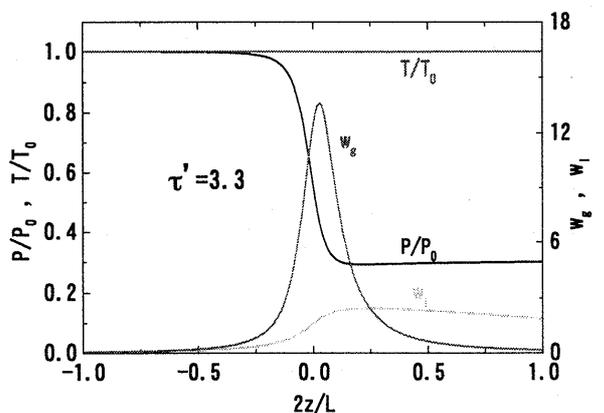


Fig.2 Pseudo-like shock waves in Two-phase Flow

$\tau' = \tau \sqrt{p_0/\rho_g}/L$  が大きい場合で、非平衡流に近い場合でノズルのど部付近で、気体だけが大きく加速し液体はほとんど加速していない。末広部の下流で気体速度は衝撃波の発生により減速されるが、液体速度は慣性力のためにそれほど減速されず、圧力が変化しない擬似衝撃波に似た圧力分布を得る。これはミスト流の特徴で、擬似的衝撃波と呼んだものである。

4. 運動量緩和する仮想圧縮性流体の流れ

Fig.1 での圧力上昇は平衡衝撃波と考えることができるが、基礎式を支配する(6)式のマッハ数は十分小さいので亜音速である。実際に、その変化の量は無視出来るが背圧の変化によって流量が変化し、臨界には達していない。超音速の気体の流れも、二相流のように平衡流の音速を超えているが非平衡流から見れば亜音速なっていると考えることが出来る。それは、二相流の平均密度を気体の密度と等しく保ったままで、二相流の気体の密度を仮想的に非常に小さくすれば、基礎式を支配するこの仮想気体の音速( $\sqrt{\gamma p/\rho_g}$ )を無限大にすることが出来る。これは(1)~(5)の基礎式で、ポイド率 $\alpha$ を1とし、 $(1-\alpha)\rho_l$ を実際の気体の密度にする極限を取ると得られ、次式となる。

$$\rho_g w_g A = G \text{ (一定)} \tag{8}$$

$$G \frac{dw_l}{dz} + A \frac{dp}{dz} = 0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{w_l^2}{2} + c_p T_g\right) = \text{一定} \tag{10}$$

$$w_l \frac{dw_l}{dz} = \frac{w_g - w_l}{\tau} \tag{11}$$

この極限で、気体の連続の式で $\alpha$ は消え、実際の気体の連続の式と同じになる。運動量式では気体の運動量が消え液体の部分だ

けが残る。エネルギー式では気体の運動エネルギーが消え、質量の小さい仮想気体と液体の熱エネルギーが実際の気体のエネルギーとなる。緩和方程式では液体の体積が無視できるので圧力項が消える。

fig.3, fig.4, Fig.5 に3.で示したノズルに対する計算結果を示す。fig.3は無次元緩和時間が0.1の場合で、二相流の亜音速分散衝撃波(Fig.1)と似た分布を示している。0.01(fig.4)にするとこの分散衝撃波の厚さは薄くなり、気体力学の衝撃波に近くなる。0.001にすれば、この横軸のスケールでは厚さは無視できるようになる。

この速度緩和する流れのエントロピー生成は、不可逆過程である相間の速度差による摩擦から生ずる。実際、(8)~(11)の基礎式からエントロピー生成を求めると

$$\frac{ds}{dz} = \frac{c_p}{T_g} \frac{dT_g}{dz} - \frac{1}{T_g \rho_g} \frac{dp}{dz} = \frac{(w_g - w_l)^2}{\tau T_g} \tag{12}$$

となり、右辺は速度差の二乗の形になり、流れの中で増加し続ける。Fig.4は定圧比熱で無次元化されたエントロピーを流れ方向に示したものであるが、増加している様子が分かる。最終値が同じになるのは、温度が元の値に戻るため、この増加量は出入口の圧力比だけで書かれるためである。緩和時間が0.1のときは衝撃波の前と衝撃波内で同程度のエントロピー生成があるが、0.01では衝撃波前の生成量が少なくなり、0.001ではほとんどなくなる。 $\tau = 0.001$ を用いると、亜音速法で十分に超音速の気体の流れを解くことが出来ると言える。

参考文献

- (1) 中川・杉浦, 機論, 66-645, B(2000-5), 1495-1502.
- (2) 杉浦・中川, 機論, 67-662, B(2001-10), 2462-2469.

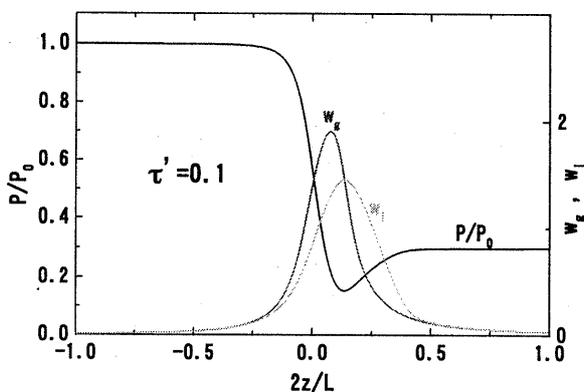


Fig.3 Relaxation gas flow at  $\tau'=0.1$

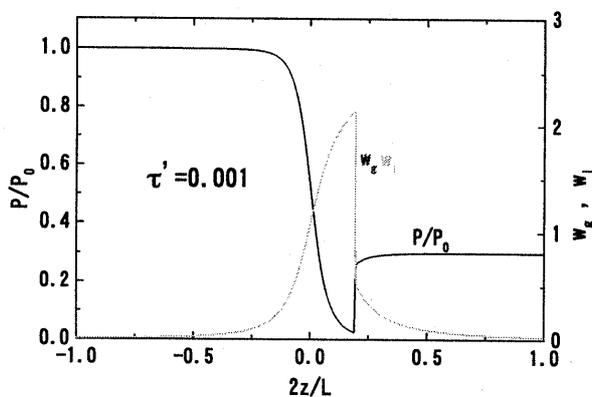


Fig.3 Relaxation gas flow at  $\tau'=0.001$

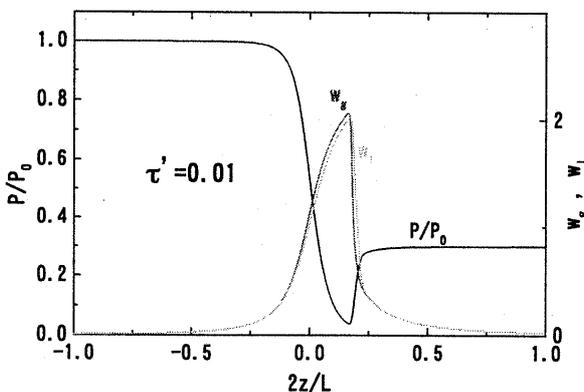


Fig.4 Relaxation gas flow at  $\tau'=0.01$

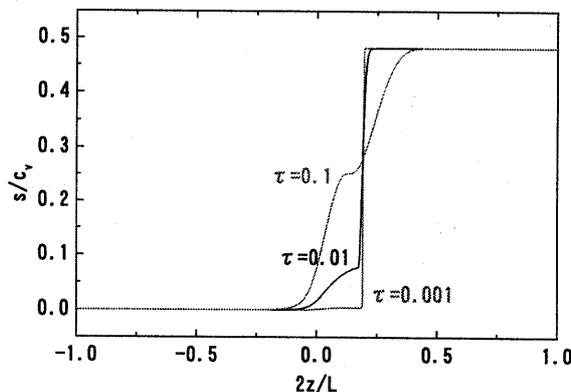


Fig.4 Entropy production in nozzle flow