313

非等方多孔質体内三次元熱流動場のモデリング

A mathematical model for three-dimensional heat and fluid flow within an anisotropic porous medium

*林朋博(静岡大院) 桑原不二朗（静大工） 中山顕（静大工）
T. Hayashi, F. Kuwahara and A. Nakayama
Dept. of Mechanical Engineering, Shizuoka University

1. 緒言

多孔質体内の熱流動に対し様々な巨視的モデル式が提案[1]されてきたがそのほとんどが等方多孔質体を扱ったものである。しかし、人工多孔質体においては、構造体形状が画一的で配列が規則的なため、強い非等方性を有するものが多い。このように空間的に非等方性を有する多孔質体内熱流動場の予測において、非等方性透過率を導入した修正 Darcy モデルを用いるいくつかの試みが報告されている。しかしながら未だ、未知な点も多く、モデル定数の一般的関数形を導くに至っていない。

本研究では、プレートフィン群及び角柱群からなる構造体を取上げ、微視的三次元計算を実施する。非等方的構造を有する多孔質体について、一般性を有する巨視的モデル式を導く。一連の計算を実施し、非等方性多孔質体内三次元熱流動場における巨視的モデル定数の関数形の決定を目指す[2]。

2. 非等方巨視的モデル式の導出

微視的支配方程式を空間平均し、次の巨視的支配方程式を得る。

$$\nabla\cdot\langle\vec{u}\rangle=0 \tag{1}$$

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon}\frac{\partial\langle\vec{u}\rangle}{\partial t}+\frac{\rho_f}{\varepsilon^2}\langle\vec{u}\rangle\cdot\nabla\langle\vec{u}\rangle=-\nabla\langle p\rangle^f+\rho_f g_i+\frac{\mu}{\varepsilon}\nabla^2\langle\vec{u}\rangle+\vec{S}$$

$$\rho_f C_{p_f}\left(\frac{\partial\varepsilon\langle T\rangle^f}{\partial t}+\langle\vec{u}\rangle\cdot\nabla\langle T\rangle^f\right)$$

$$=\nabla\cdot\left(k_f\nabla\varepsilon\langle T\rangle^f+\frac{1}{V}\int_{A_{int}}k_f T d\vec{A}-\rho_f C_{p_f}\langle T'\vec{u}'\rangle\right)+\frac{1}{V}\int_{A_{int}}k_f\nabla T\cdot d\vec{A}$$

$$\rho_s C_s\frac{\partial(1-\varepsilon)\langle T\rangle^s}{\partial t}$$

$$=\nabla\cdot\left(k_s\nabla(1-\varepsilon)\langle T\rangle^s-\frac{1}{V}\int_{A_{int}}k_s T d\vec{A}\right)-\frac{1}{V}\int_{A_{int}}k_f\nabla T\cdot d\vec{A}+(1-\varepsilon)S_h \tag{2)-(4}$$

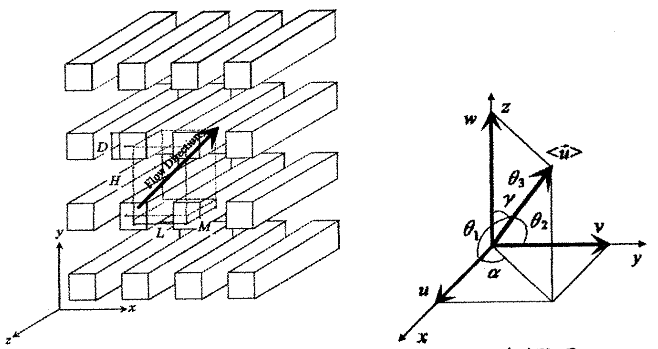
ここで、微視量で表現される項は、以下でモデル化する。

$$\vec{S}=\mu\overline{\overline{K}}^{-1}\cdot\langle\vec{u}\rangle+H\overline{\overline{b}}\cdot\langle\vec{u}\rangle|\langle\vec{u}\rangle|,\quad \rho_f C_{p_f}\langle T'\vec{u}'\rangle=-\overline{\overline{k}}_{dis}\cdot\nabla\langle T\rangle^f \tag{5)-(6}$$

$$h_{sf}=\frac{\frac{1}{V}\int_{A_{int}}k_f\nabla T\cdot d\vec{A}}{a_{sf}\left(\langle T\rangle^s-\langle T\rangle^f\right)},\quad \frac{1}{V}\int_{A_f}\overline{T}n_j dA=G_{f_{ij}}\left(\frac{\partial\langle\overline{T}\rangle^f}{\partial x_j}-\frac{k_s}{k_f}\frac{\partial\langle\overline{T}\rangle^s}{\partial x_j}\right) \tag{7)-(8}$$

3. 非等方構造体モデルと微視的数値計算手法

本数値計算に用いる非等方構造体モデルの一例を図1に示す。非等方性のレベルは、配列の非等方度(H/L)で変化させる。巨視的流れ方向、気孔率と合わせ一連のケースに対し数値実験を実施する。



(a) 物理モデル　(b) 座標系

図1 三次元モデル

本数値計算においては、軸断面方向における巨視的流れ方向α、z方向における巨視的流れ方向γ及びレイノルズ数をそれぞれ変化させ検討する。構造体まわりの微視的速度場及び温度場を求めるために、先に示した微視的支配方程式(1)-(4)を考える。また、入口及び出口において周期的に十分に発達した速度場及び温度場に関する境界条件及び拘束条件を課す。

固体壁面

$$\vec{u}=\vec{0},\ T=T_w \tag{9}$$

周期境界条件

$$\vec{u}\big|_{x=-\frac{L}{2}}=\vec{u}\big|_{x=\frac{L}{2}},\ \vec{u}\big|_{y=-\frac{H}{2}}=\vec{u}\big|_{y=\frac{H}{2}},\ \vec{u}\big|_{z=-\frac{M}{2}}=\vec{u}\big|_{z=\frac{M}{2}} \tag{10}$$

$$\int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}udydz\Bigg|_{x=-\frac{L}{2}}=\int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}udydz\Bigg|_{x=\frac{L}{2}}=HM\cos\theta_1\langle|\vec{u}|\rangle \tag{11a}$$

$$\int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}vdxdz\Bigg|_{y=-\frac{H}{2}}=\int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}vdxdz\Bigg|_{y=\frac{H}{2}}=LM\cos\theta_2\langle|\vec{u}|\rangle \tag{11b}$$

$$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}wdxdy\Bigg|_{z=-\frac{M}{2}}=\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}wdxdy\Bigg|_{z=\frac{M}{2}}=LH\cos\theta_3\langle|\vec{u}|\rangle \tag{11c}$$

$$(T-T_w)\big|_{x=\frac{L}{2}}=\tau^{\frac{L\cos\theta_1}{L\cos\theta_1+H\cos\theta_2+M\cos\theta_3}}(T-T_w)\big|_{x=-\frac{L}{2}} \tag{12a}$$

$$(T-T_w)\big|_{y=\frac{H}{2}}=\tau^{\frac{H\cos\theta_2}{L\cos\theta_1+H\cos\theta_2+M\cos\theta_3}}(T-T_w)\big|_{y=-\frac{H}{2}} \tag{12b}$$

$$(T-T_w)\big|_{z=\frac{M}{2}}=\tau^{\frac{M\cos\theta_3}{L\cos\theta_1+H\cos\theta_2+M\cos\theta_3}}(T-T_w)\big|_{z=-\frac{M}{2}} \tag{12c}$$

$$\tau=\frac{(T-T_w)\big|_{x=\frac{L}{2},y=\frac{H}{2},z=\frac{M}{2}}}{(T-T_w)\big|_{x=-\frac{L}{2},y=-\frac{H}{2},z=-\frac{M}{2}}} \tag{13}$$

4. 指向透過率の決定

低レイノルズ数下では巨視的圧力及び速度場は、以下の Darcy 則に従うものと想定する。

$$-\frac{\partial\langle p\rangle^f}{\partial x_i}=\mu_f K_{fij}^{-1}\langle u_j\rangle \tag{14}$$

ここで、透過率テンソルに Dullien のモデル[3]を用いるとき、無次元圧力勾配は、次式で与えられる。

$$-\frac{\partial\langle p\rangle^f}{\partial s}\frac{L^2}{\mu|\langle\vec{u}\rangle|}\cong\frac{L^2}{K_{f1}}cos^2\theta_1+\frac{L^2}{K_{f2}}cos^2\theta_2+\frac{L^2}{K_{f3}}cos^2\theta_3 \tag{15}$$

一連の巨視的流れ方向に対し実施した微視的三次元数値計算結果を体積平均し求めた指向透過率を図2に示す。透過率は三次元的非等方性を示している。

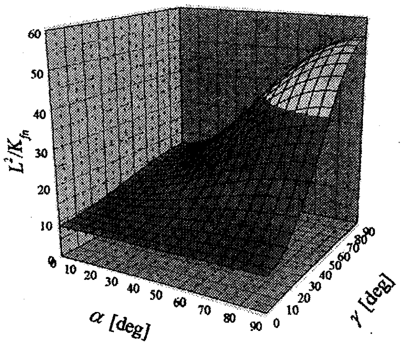


図2　透過率の非等方性

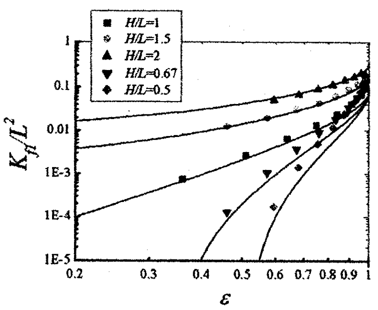


図3　K_{f1} 相関式

$\gamma=90^o$ のときの K_{f1},K_{f2} に対する気孔率 ε の影響を図3に示す。ここで、図中の実線は微視的数値計算結果に基づき決定した K_{f1},K_{f2} の相関式であり、以下で与えられる。

$$\frac{K_{f1}}{L^2}=\frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{L}{H}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right\}^3\left(\frac{H}{L}\right)^2,\quad \frac{K_{f2}}{L^2}=\frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right\}^3$$

$$\frac{K_{f3}}{L^2}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{L}{H}\right)^{\frac{1}{3}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}\right\}^3\left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{16 a,b,c}$$

5. 指向 Forchheimer 係数の決定

高レイノルズ数下では以下の修正 Darcy 則に従うものと考えられる。

$$-\frac{\partial\langle p\rangle^f}{\partial x_i}=\left(\mu_f K_{fij}^{-1}+\rho_f b_{fij}|\langle\vec{u}\rangle|\right)\langle u_j\rangle\cong\rho_f b_{fij}|\langle\vec{u}\rangle|\langle u_j\rangle \tag{17}$$

配列の周期性より、圧力場の対称性を実現する最も簡単な Forchheimer テンソルの表現は次式となる。

$$\begin{aligned}b_{fij}&=b_{f1}(l_il_j)+b_{f2}(m_im_j)+b_{f3}(n_in_j)+bb_{f1}cos\theta_1cos\theta_2((l_im_j)+(l_jm_i))\\&+bb_{f2}cos\theta_2cos\theta_3((m_in_j)+(m_jn_i))+bb_{f3}cos\theta_3cos\theta_1((n_il_j)+(n_jl_i))\end{aligned} \tag{18}$$

無次元圧力勾配を微視的三次元数値計算結果から決定する。指向透過率と同様の手順を行うことで $\gamma=90^o$ における指向 Forchheimer 係数 b_{f1},bb_{f1} の相関式を導出する。相関式を(19)式に示す。

$$b_{f1}L=\left[\frac{27}{7}\left\{1-\left(\frac{L}{H}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]^{-3}\left(\frac{L}{H}\right)^3,\quad bb_{f1}L=120(1-\varepsilon)^2 \tag{19a,b}$$

6. 指向界面熱伝達率の決定

指向 Nusselt 数を次式のようにモデル化する。

$$Nu_L\equiv\frac{h_{sf}L}{k_f}=c_f+d_f\,Re_D^{0.6}\,Pr^{1/3} \tag{20}$$

ここでモデル定数 c_f,d_f を以下でモデル化する。

$$c_f=c_{f_1}cos^2\theta_1+c_{f_2}cos^2\theta_2+c_{f_3}cos^2\theta_3 \tag{21}$$

$$d_f=\left(d_{f_1}cos^2\theta_1+d_{f_2}cos^2\theta_2+d_{f_3}cos^2\theta_3\right)^{0.3} \tag{22}$$

指向 Nusselt 数を微視的数値解析結果から決定する。$\gamma=90^o$ における指向界面熱伝達率のモデル定数 c_f,d_f を決定する。これらより、以下の相関式を得る。

$$c_{f_1}=\frac{8}{\varepsilon}\left[1-\left(\frac{H}{L}-1\right)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{4}}\right]\qquad 但し:\ \frac{H}{L}\geq 1 \tag{23}$$

$$c_{f_2}=\frac{8}{\varepsilon}\left[1-\left\{1-\left(\frac{H}{L}\right)^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{4}}\right]\qquad 但し:\ \frac{H}{L}<1 \tag{24}$$

$$d_f=\frac{3}{5}\frac{1}{1-\frac{H}{L}(1-\varepsilon)^2} \tag{25}$$

7. 結言

微視的三次元数値計算結果に基づき、純理論的に非等方多孔質体内における指向透過率、指向 Forchheimer 係数および指向界面熱伝達率を決定した。この結果を用いることで、巨視的モデル式による非等方多孔質体内熱流動場の正確な予想が可能となる。

8. 参考文献

(1) 桑原 不二朗、多孔質体内熱流動の微視的数値シミュレーションに関する研究、博士論文、1996.

(2) Nakayama, A.他2名, A Two-energy Equation Model in Porous Media, Int. J. Heat Mass Transf., 44, pp. 4375-4379, 2001

(3) Dullien, F. A. L., 1979, Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure, Academic Press, pp. 215-219.