

112 “減衰行列”の理論的導出と有限要素解析への応用

Theoretical Derivation of Damping Matrix and Applications for FE Analysis

○学 那須野 洋 (いわき明星大 大学院) 正 清水 信行 (いわき明星大)

Hiroshi NASUNO, Iwaki Meisei University, 5-5-1 Chuodai Iino, Iwaki, Fukushima 970-8551.

Nobuyuki SHIMIZU, Iwaki Meisei University.

This paper presents a theoretical derivation of damping matrix and its application to the finite element analysis (FE Analysis). Fractional calculus constitutive law was applied for describing the viscoelastic material and was used to obtain the finite element formulation. The so-called “damping matrix” \mathbf{C} was derived including the parameters of fractional derivative order r , relaxation time τ , and shear modulus G of the concerned material.

A finite element computer program was developed on the basis of this formula and was used to analyze the viscoelastic seismic damper which was made of viscoelastic material. The computational results are in good agreement with the vibration test results. The flow of evaluation procedure by the FE Analysis for viscoelastic structures are summarized for user's convenience.

Key Words: *Damping Matrix, Fractional Calculus Constitutive Law, Finite Element Method, Viscoelastic Seismic Damper, Vibration Test*

1. はじめに

構造物の力学的な特性を有限要素法により解析する際、質量行列や剛性行列は構造物の形状、寸法と材料定数を用いて理論的に導出される。一方、構造物の減衰効果を予測することは極めて難しく、解析モデルの“減衰行列”は実用的な観点から近似的な方法によって導出されているのが現状である。

本論文においては、比較的減衰効果の大きい粘弾性減衰材料に着目し、この材料から成る構造物の減衰性能を理論的に推定することを目的とする。まず、粘弾性材料の構成方程式を分数階微分モデルで表し、これを有限要素法により定式化することによって、材料定数を用いて“減衰行列”を理論的に導出する。これを基に、有限要素解析理論を用いて粘弾性耐震ダンパの動的特性を把握する一連の流れを示す。

2. 分数階微分の Stieltjes 積分表現

時間に対して一階微分を行う微分演算子をここでは $D_t^1 = D_t \equiv d/dt$ と書く。一方、時間に対して r ($0 < r < 1$) 階微分を表す微分演算子を $D_t^r \equiv d^r/dt^r$ と書き、ここでは Riemann - Liouville の分数階微分

$$D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-r)} D_t \int_0^t (t-\tau)^{-r} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

を用いる。ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。式 (1) は合成則により次式のように書くことができる。

$$D_t^r f(t) = \frac{t^{-r}}{\Gamma(1-r)} f(0) + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-r}}{\Gamma(t-\tau)} D_t f(\tau) d\tau \quad (2)$$

ここで Riesz の超関数

$$R_r(t) = \begin{cases} 0, & (-\infty, 0] \\ \frac{t^{-r}}{\Gamma(1-r)}, & (0, +\infty) \end{cases} \quad (3)$$

を式 (2) に用いると

$$D_t^r f(t) = R_r(t) f(0) + \int_0^t R_r(t-\tau) D_t f(\tau) d\tau \quad (4)$$

と書くことができる。

これを Stieltjes 積分

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(t-\tau) D_t f(\tau) d\tau \\ &= g(t) * df(t) \end{aligned} \quad (5)$$

を用いて表すと

$$D_t^r f(t) = R_r(t) f(0) + R_r(t) * df(t) \quad (6)$$

となる。すなわち、分数階微分が Riesz の超関数を核とする Stieltjes 積分で表現できる。式 (6) は $t=0$ で特異点を持つが、この難点は回避できる⁽¹⁾。

3. 粘弾性材料の構成方程式

等温、等方性を満たす物体の3次元構成方程式は、線形性、連続性、移動不変性、非過及性を満足するひずみテンソル ϵ_{kl} の成分を用いて

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (7)$$

と書くことができる。ここで、テンソル写像 L_{ijkl} によって関係づけられる応力-ひずみ関係を線形遺伝則⁽²⁾と呼ぶ。

次に、線形遺伝則によって表される粘弾性材料の構成方程式は一般に緩和関数テンソル G_{ijkl} の成分とひずみテンソル ϵ_{kl} の成分との Stieltjes 積分により

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl} * d\epsilon_{kl} \quad (8)$$

と書くことができる。

一方、高分子材料の力学的な振る舞いは Boltzmann の重ね合わせ原理

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{-\infty}^t Y(t-\tau) d\epsilon(\tau) \\ &= Y(t)\epsilon(0) + \int_0^t Y(t-\tau) D\tau\epsilon(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (9)$$

によって記述できる。ここで $Y(t)$ は緩和弾性率であり、式 (9) の核は応力とひずみの関係を表している。

4. 緩和関数行列の導出

粘弾性材料の内部に応力が生じている場合を考える。このとき、平均応力 $\sigma_{kk}(t)$ と平均ひずみ $\epsilon_{kk}(t)$ および偏差応力 $s_{ij}(t)$ と偏差ひずみ $e_{ij}(t)$ とのそれぞれの関係は式 (8) より

$$\sigma_{kk}(t) = G_m(t) * d\epsilon_{kk}(t) \quad (10)$$

$$s_{ij}(t) = G_d(t) * de_{ij}(t) \quad (11)$$

と書くことができる。ただし $-\infty < t < 0$ の範囲では $G_m(t) = 0$, $G_d(t) = 0$ であるとする。ここで、緩和関数 $G_m(t)$ および $G_d(t)$ は

$$G_m(t) = 3\lambda(t) + 2G(t) = 3K(t) \quad (12)$$

$$G_d(t) = 2G(t) \quad (13)$$

と書ける。ここで $K(t)$ は体積変形の緩和関数、 $G(t)$ はせん断変形の緩和関数である。 $\lambda(t)$ は

$$\lambda(t) = K(t) + \frac{2}{3}G(t) \quad (14)$$

と書ける。

偏差応力と平均応力、偏差ひずみと平均ひずみのそれぞれの間には

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (15)$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (16)$$

の関係がある。ここで、クロネッカーのデルタ δ_{ij} である。式 (10) から (14) および式 (16) を式 (15) に代入すると

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\lambda_{ij}(t) * d\epsilon_{kk}(t) + 2G(t) * de_{ij}(t) \quad (17)$$

と書くことができる。

式 (17) の応力テンソルおよびひずみテンソルの各成分を、工学的な応力ベクトルと工学的なひずみベクトル

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \{\sigma_{11}(t), \sigma_{22}(t), \sigma_{33}(t), \sigma_{12}(t), \sigma_{13}(t), \sigma_{23}(t)\}^T \\ &= \{\sigma_x(t), \sigma_y(t), \sigma_z(t), \tau_{xy}(t), \tau_{xz}(t), \tau_{yz}(t)\}^T\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \{\epsilon_{11}(t), \epsilon_{22}(t), \epsilon_{33}(t), 2\epsilon_{12}(t), 2\epsilon_{13}(t), 2\epsilon_{23}(t)\}^T \\ &= \{\epsilon_x(t), \epsilon_y(t), \epsilon_z(t), \gamma_{xy}(t), \gamma_{xz}(t), \gamma_{yz}(t)\}^T\end{aligned}\quad (19)$$

を用いて表すと、3次元の粘弾性材料の構成方程式は

$$\sigma(t) = \mathbf{D}(t) * d\epsilon(t) \quad (20)$$

と書くことができる。ここで行列 $\mathbf{D}(t)$ は式 (21) のような緩和関数行列であり、粘弾性材料の応力緩和を表す行列である。

$\mathbf{D}(t) =$

$$\begin{bmatrix} K(t) + \frac{3}{4}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ & K(t) + \frac{2}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ & & K(t) + \frac{2}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ & & & G(t) & 0 & 0 \\ sym. & & & & G(t) & 0 \\ & & & & & G(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

5. 有限要素運動方程式

3次元空間に置かれた物体を微小な要素に分けたとき、その要素に成り立つ基礎方程式を用いて有限要素運動方程式を導出する。

5.1 基礎式の導出 座標系 x, y, z 内に置かれた物体を矩形の微小な体積要素に分ける。次に、その要素に成り立つ運動方程式、応力-ひずみ関係式 および ひずみ-変位関係式の3つの基礎式から有限要素法を用いて運動方程式を導出する。微小体積要素に成り立つ運動方程式は

$$\mathbf{A}\sigma(t) + \mathbf{X}(t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(t)}{\partial t^2} \quad (22)$$

と書くことができる。ここで物体力ベクトル $\mathbf{X}(t) = \{X_x, X_y, X_z\}^T$ 、密度 ρ であり、行列 \mathbf{A} は次式で表される。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで、内部減衰の比較的高い粘弾性材料を解析の対象にすれば、応力とひずみとの関係は

$$\sigma(t) = \mathbf{D}(t) * d\epsilon(t) \quad (24)$$

である。

ひずみと変位との関係は

$$\epsilon(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{u}(t) = \mathbf{L} \mathbf{u}(t) \quad (25)$$

と書ける。

ここで、行列 \mathbf{L} は次式である。

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (26)$$

5.2 有限要素運動方程式の導出 式(22), 式(24), 式(25)の3つの基礎式を次に示す変位と速度の初期条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t)|_{t=0} = \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{D}\mathbf{u}(t)|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}(0) \end{cases} \quad (27)$$

および, 材料の表面上で変位の拘束が与えられている面 S_u 上, 材料に分布荷重が与えられている面 S_σ 上のそれぞれの境界条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t); & S_u \text{ 上} \\ \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{T}(t); & S_\sigma \text{ 上} \\ S = S_u + S_\sigma \end{cases} \quad (28)$$

の基で解く。ここで $\bar{\mathbf{u}}(t)$ は変位ベクトル $\mathbf{u}(t)$ が既知量で与えられることを表しており, 方向余弦行列 \mathbf{n} , 表面力ベクトル $\mathbf{T}(t)$ である。

運動方程式(22)に式(27), (28)の境界条件のもとで仮想仕事の原理を適用させると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^2 \mathbf{u}(t) dV = \\ \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{X}(t) dV + \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}(t) dS \end{aligned} \quad (29)$$

と書くことができる。ここで $\delta \mathbf{u}$ は仮想変位, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ は $\delta \mathbf{u}$ にもとづく仮想ひずみである。

式(29)に, 変位-ひずみ関係を表す式(25)を用いれば

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(t) + \rho \mathbf{D}^2 \mathbf{u}(t)] dV = \\ \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{X}(t) dV + \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}(t) dS \end{aligned} \quad (30)$$

と書ける。

次に, 物体を n 個の有限要素に離散化したときの要素内変位を

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{N} \mathbf{d}(t) \quad (31)$$

で近似する。ここで \mathbf{N} は要素の形状関数 \mathbf{N} , $\mathbf{d}(t)$ は有限要素節点変位ベクトルである。

要素内ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ と節点変位ベクトルとの間には

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{d}(t) = \mathbf{B} \mathbf{d}(t) \quad (32)$$

の関係がある。

節点変位 $\mathbf{d}(t)$ で式(30)を書きかえると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{d}^T [\mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(t) + \rho \mathbf{N}^T \mathbf{D}^2 \mathbf{d}(t)] dV = \\ \int_{\Omega} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \mathbf{X}(t) dV + \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \mathbf{T}(t) dS \end{aligned} \quad (33)$$

この式より有限要素運動方程式は

$$\mathbf{M} \mathbf{D}^2 \mathbf{d}(t) + \mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (34)$$

と書くことができる。ここで質量行列 \mathbf{M} , 粘弾性減衰力ベクトル $\mathbf{F}(t)$, 等価節点力ベクトル $\mathbf{P}(t)$ はそれぞれ

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T dV \quad (35)$$

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV \quad (36)$$

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \mathbf{X}(t) dV + \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \mathbf{T}(t) dS \quad (37)$$

で表される。これらはいずれも要素単位で与えられる。

6. “減衰行列”の理論的導出

体積変形が Hooke 則, 偏差変形が分数階 Voigt 則に従う材料を仮定して“減衰行列”を具体的に求める。粘弾性構造物の構成方程式を分数階微分モデルで表して“減衰行列”を理論的に導出する。

6.1 分数階微分 Voigt モデル 粘弾性材料の構成方程式を記述するために機械モデル (mechanical model) を使用すると, その力学的特性を理解するのに便利である。粘弾性固体の応力ひずみ関係を表す機械モデルとして Voigt モデル

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = E \boldsymbol{\varepsilon}(t) + E \tau \mathbf{D}_t \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (38)$$

がある。ここで緩和時間 $\tau = \eta/E$ である。

これに対して, 分数階微分 Voigt モデル (fractional derivative Voigt model) が考えられる。分数階微分モデルを用いると, 少ないパラメータで広い周波数範囲に亘って実験値と精度良く一致する構成方程式が導かれることが分かっている⁽³⁾。

分数階微分 Voigt モデルは, ばね要素と粘弾性減衰効果をもったスプリング-ポット要素とが並列に組み合わせられた機械モデルとして表現される。分数階微分 Voigt モデルで表現される粘弾性材料の構成方程式を次式に示す。

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = E \boldsymbol{\varepsilon}(t) + E \tau^r \mathbf{D}_t^r \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (39)$$

6.2 体積変形および偏差変形の仮定 ここでは, 体積変形が Hooke 則, 偏差変形が分数階 Voigt モデルに従う粘弾性材料を仮定し, それぞれの変形に対する緩和関数を具体的に求める。

上記の仮定に従う機械モデルの応力-ひずみ関係は

$$\sigma_{kk}(t) = 3K \epsilon_{kk} \quad (40)$$

$$s_{ij}(t) = G(1 + \tau^r \mathbf{D}_t^r) e_{ij}(t) \quad (41)$$

と書くことができる。すなわち, 緩和関数は式(12), (13)より

$$G_m(t) = K \left(1 + \frac{\tau^r}{\Gamma(1-r)} t^{-r} \right) \quad (42)$$

$$G_d(t) = G \quad (43)$$

と求めることができる。ここで K は体積弾性率, G はせん断弾性率である。

式(42), (43)を先ほど求めた緩和関数行列の式(21)にそれぞれ代入すれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{D}_1 R_r(t) * d\boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ &= \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_t^r \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{aligned} \quad (44)$$

と求めることができる。ここで行列 D_0 , D_1 の各要素はそれぞれ次式で表される。

$$D_0 = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 0 & G & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 0 & G & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tau^r \quad (46)$$

6.3 導出された“減衰行列” 粘弾性減衰力ベクトルの式 (36) において、応力ベクトルを体積変形が Hooke 則、偏差変形が分数階 Voigt 則に従う材料を仮定し、その構成要素を陽な形で求める。式 (44) を式 (36) に代入すると

$$F(t) = CD^r d(t) + Kd(t) \quad (47)$$

と求められる。ここで要素の“減衰行列” C 、要素の剛性行列 K のそれぞれは

$$C = \int_{\Omega} B^T D_1 B dV \quad (48)$$

$$K = \int_{\Omega} B^T D_0 B dV \quad (49)$$

と具体的に導出された。行列 D_0 , D_1 は前節の行列 (式 (45), (46)) である。この場合の運動方程式は次式となる。

$$MD^2 d(t) + CD^r d(t) + Kd(t) = P(t) \quad (50)$$

これら C および K について考察を加える。この行列 C は粘弾性材料の減衰特性を反映した有限要素法で定式化された“減衰行列”である。行列 C を表す式 (48) の被積分関数に含まれる行列 D_1 の性質から明らかなように、行列 C は緩和時間 τ , 分数階数 r , せん断弾性率 G , に依存する。また、式 (47) から分かるようにこれは要素力としては $CD^r d(t)$ の形で作用し、節点変位 $d(t)$ の r 階の時間微分の係数行列となっている。 $r \rightarrow 1$ とすれば $D^r d(t) = Dd(t) = v(t)$ となり、 C は節点速度に比例する係数行列、すなわち粘性減衰係数で記述される通常の意味の減衰行列に帰着する。

一方 K は粘弾性材料のばね効果を表す剛性行列である。 $r \rightarrow 0$ の材料では式 (47) より $CD^0 d(t) + Kd(t) = (C + K)d(t)$ となり減衰性が失われ $(C + K)$ で表される剛性行列に帰着する。

なお、運動方程式 (47) を時刻歴で解く数値積分法については清水・張^{(4),(5)}らの研究報告がある。

7. 粘弾性構造物の特性把握法

前章までの有限要素解析一般理論を、円筒座標系内に置かれた軸対称形状の物体に軸対称荷重が加わる問題を解く有限要素解析理論に適用し基礎式を導出した。これに基づきプログラムを作成した。このプログラムを用いて軸対称形状の粘弾性耐震ダンパの有限要素解析を行う。そのためまず、粘弾性構造物の特性を把握するための解析手順について述べる。次に粘弾性構造物の動的特性を有限要素解析で把握した結果について述べる。

7.1 有限要素法による特性把握の手順 本研究においては、分数階微分モデルを適用していることが特色である。したがって、本有限要素解析理論を用いて実際に粘弾性構造物の解析を行うためには、使用粘弾性材料から分数階微分モデルのモデルパラメータを同定することがまず必要である。これに加えて、解析結果から粘弾性構造物の減衰特性を評価することも必要である。

以上を踏まえた、本解析理論による設計プロセスを含めた解析手順は図 1 のようになる。

図 1 より、粘弾性構造物の特性把握は材料試験片の試験から有限要素解析を経て特性把握を行うまで一環した流れとなっていることが分かる。

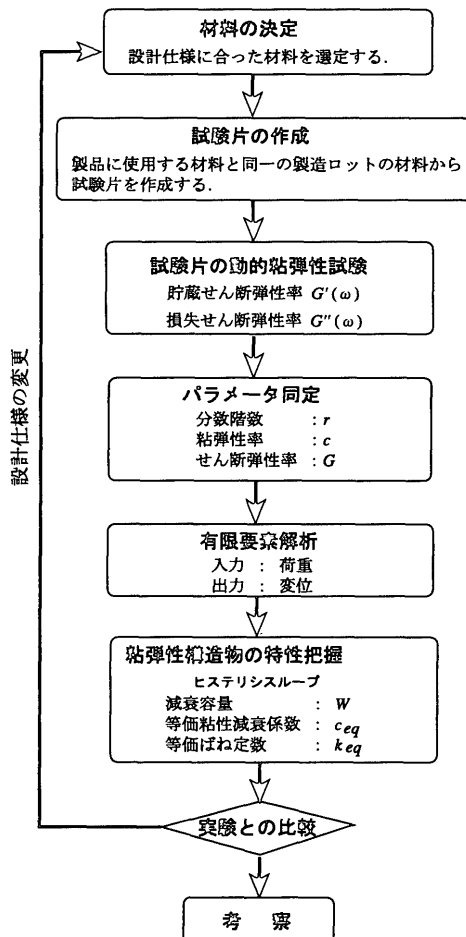


Fig.1 : Analysis Flow Chart

7.2 有限要素解析入力パラメータの同定 解析手順の一番目のステップとして、解析する材料を決定する。ここではより具体的な解析を示すために開発途上の粘弾性耐震ダンパ減衰材料を解析対象物に選ぶ。

二番目のステップとして、粘弾性ダンパに使用している材料と同時に製造された材料から試験片を製作し、これの動的特性を得る⁽⁶⁾。ダンパに使用する粘弾性材料と同時に製造された材料を使用するのは、粘弾性材料のロットの違いによる特性のばらつきを排除するためである。

有限要素解析を行う際、現実の材料と誤差の少ないモデルパラメータを入力するために、試験片の動的粘弾性試験を行って貯蔵せん断弾性率 $G'(\omega)$ と損失せん断弾性率 $G''(\omega)$ とを求める。ここで一般に、複素せん断弾性率 $G^*(\omega)$ は次式で定義される。

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega) \quad (51)$$

三番目のステップとして、異なるいくつかの周波数において測定した $G'(\omega)$, $G''(\omega)$ のそれぞれに対して、分数階微分 Voigt モデルの $G'(\omega)$, $G''(\omega)$ をカーブフィットさせることで未知パラメータを同定する。分数階微分 Voigt モデルの周波数特性は、その構成方程式である式 (39) をフーリエ変換したのち式 (51) を用いて $c = G\tau^r$ (c を “粘弾性率” と呼ぶことにする) を考慮すると

$$G'(\omega) = G + c\omega^r \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \quad (52)$$

$$G''(\omega) = c\omega^r \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) \quad (53)$$

と書くことができる。分数階微分 Voigt モデルのカーブフィットには、最小二乗法などが使用できる。

一例として温度 $T = 30^\circ\text{C}$ における試験片のマスターカーブに式 (52), (53) をカーブフィットさせた。図 2 および求めたパラメータを表 1 にそれぞれ示す。図 2 より、分数階微分モデルが非常に広い周波数範囲に亘って測定結果と一致していることが分かる。

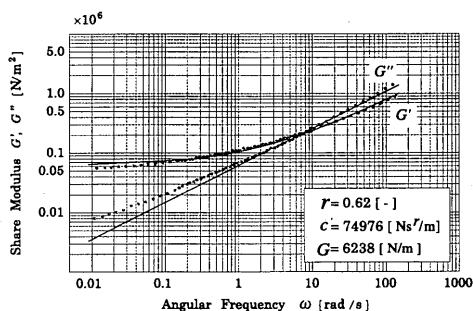


Fig.2 : FD Voigt Model for VEM ($T = 30^\circ\text{C}$)

Table1 : Parameters of Test Piece (VEM)

Fractional order r [-]	0.62
“Viscoelasticity modulus” c [Ns^r/m]	749.76×10^2
Shear modulus G [N/m^2]	623.80×10^2

Table2 : Parameters of FE Analysis Model

Fractional order r [-]	0.62
“Viscoelasticity modulus” c [Ns^r/m]	749.76×10^2
Relaxation time τ [s]	1.20
Shear modulus G [N/m^2]	623.80×10^2
Density ρ [kg/m^3]	1.20
Poisson's ratio ν [-]	0.48
Bulk modulus K [N/m^2] $K = 2(1 + \nu)G/3(1 - 2\nu)$	1.18×10^5
Integration time step Δt [s]	0.01, 0.001
Algorithm parameters α, β [-]	0.50, 0.25

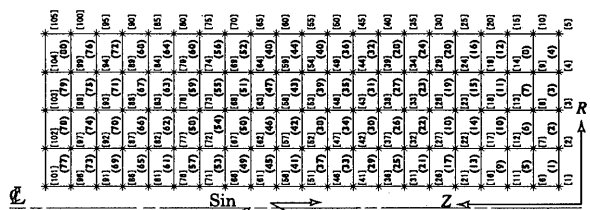


Fig.3 : FE Analysis Model for VESD

7.3 有限要素解析 図 1 に示した作業の四番目のステップとして、カーブフィットにより求めた分数階微分モデルパラメータと材料定数や境界条件などを設定して有限要素解析を行う。一例として解析に使用したパラメータおよび有限要素解析モデルを表 2 および図 3 に示す。

解析に使用したパラメータの中で分数階数 r 、粘弾性率 c 、せん断弾性率 G のそれぞれは、前節において説明したカーブフィッティングによって求めたパラメータである。図 3 の有限要素解析モデルは、ダンパの中心軸断面の粘弾性材料部分であり、円括弧 () 内が要素番号、角括弧 [] が節点番号である。 R , Z は円筒形状をしたダンパの半径方向および軸方向をそれぞれ表している。

7.4 有限要素解析結果と試験結果との比較および考察 五番目のステップとして、有限要素解析結果より粘弾性構造物の減衰特性を評価する。減衰特性を評価方法として、解析を行う際に入力した荷重の時刻歴データと出力された変位の時刻歴データの 2 つを縦軸および横軸のそれぞれにとり、ヒステリシスループを作成する。

作成したヒステリシスループから減衰容量 W 、等価粘弾性減衰係数 c_{eq} 、等価ばね定数 k_{eq} を求める。ここで求めた 3 つの値によって粘弾性構造物の特性を評価する。これらの値の計算方法は参考文献 (7) に述べられている。

ここでは、解析対象物である粘弾性耐震ダンパに正弦波荷重を入力したときの有限要素解析結果とダンパ加振試験結果とを上記の評価項目を用いて比較した結果を図 4 ~ 図 7 に示す。ダンパの加振試験については参考文献 (8) を参照されたい。

図 4 より 5[Hz] の周波数を除けば解析による結果はダンパ特性を良く説明しているのが分かる。5[Hz] の実験データは摩擦の影響が強い。減衰とばねのパラメータ W, c_{eq}, k_{eq} についても図 5 ~ 図 7 より解析結果は試験結果と比較的良く一致している。

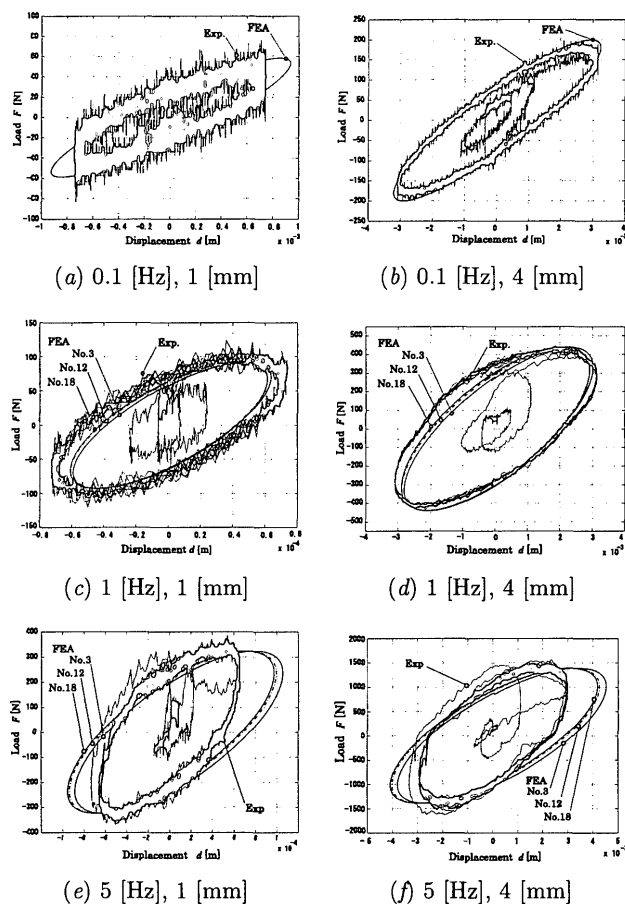


Fig.4 : The Hysteresis Behavior of VESD

8. おわりに

粘弾性体を分数階微分の構成方程式で表した。これを用いて粘弾性構造物を有限要素法により定式化し、粘弾性材料の体積変形が Hooke 則、偏差変形が分数階 Voigt 則に従う場合の“減衰行列”を理論的に求め、この“減衰行列”は、材料の緩和時間 τ 、分数階数 r およびせん断弾性率 G の値により与えられることを述べた。

提案する粘弾性有限要素解析理論は、構成則に分数階微分を適用しているため、従来の弾性材料や粘性減衰を有する材料を解析する手順とは異なる。本研究では、これらの手順を一連の解析手順としてフローチャートにまとめた。

その解析手順に従って、具体的に粘弾性耐震ダンパをとりあげ、その有限要素解析結果であるヒステリシスループを計算して W , c_{eq} , k_{eq} などの具体的な特性パラメータの数値を求めて試験結果と比較した。加振周波数 5[Hz] のときの解析結果は試験結果との整合性が悪いが、その他の結果は試験結果をほぼ良好に再現した。

本解析手法により、製品に使用する材料の粘弾性材料試験を基に、この材料から製作された粘弾性構造物の動的特性を把握し、その結果を設計や解析に反映できる道が拓けた。今後は、幾何学的非線形性を考慮にいた定式化などを行っていく予定である。

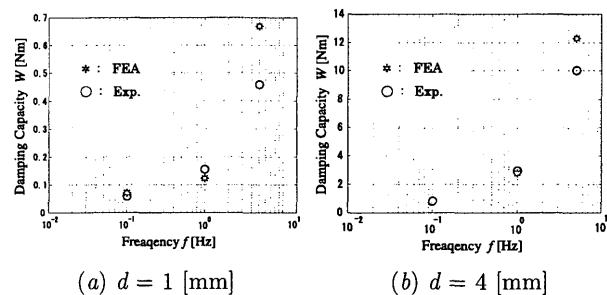


Fig.5 : Damping Capacity W

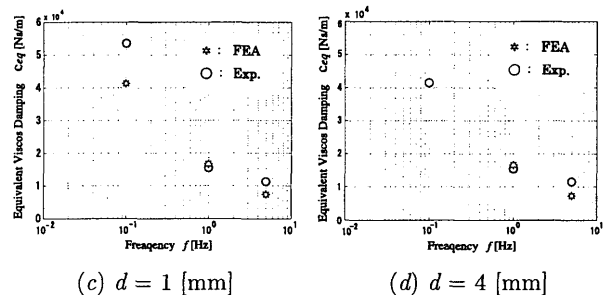


Fig.6 : Equivalent Viscous Damping c_{eq}

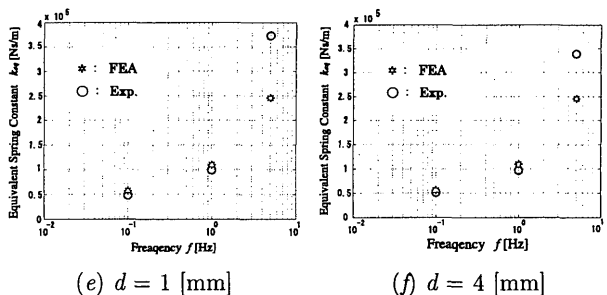


Fig.7 : Equivalent Spring Constant k_{eq}

参考文献

- (1) Gel'fand, I.M., Shilov, G.E., Generalized Functions, Vol.1., Properties and Operations, Academic Press(1964).
- (2) Koeller, R. C., Polynomial Operators, Stieltjes Convolution, and Convolution, and Fractional Calculus in Hereditary Mechanics, ACTA Mechanica. Vol.58(1986), pp.251-264.
- (3) Bagley, R. L. and Tolvik, P. J. On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior, J. of Rheology, Vol. 30, No.1 (1986), pp.133-155.
- (4) 清水 信行・張 衛, 分数階微分で記述される粘弾性体の有限要素法解析, 機論 (C), No.66-648 (2000), pp.21-28.
- (5) Zhang, W. and Shimizu, N., Newmerical Algorithm for Dynamic Problem Involving Fractional Operators, JSME International Journal, Series C, Vol 41, No.3 (1998a), pp.364-367.
- (6) 日本レオロジー学会, 講座・レオロジー, 高分子刊行会 (1996), pp.50-60.
- (7) 清水 信行, Mathematica による振動解析, 共立出版 (1999), pp.95-98.
- (8) 那須野・矢崎・清水・砂子田, 日本機械学会機械力学・計測制御講演論文集 (D & D'01) 平成 13 年 8 月 6-9, 東京.