303 傾いた振り子式動吸振器系の応答

The response of tilted vibration system with pendulum type dynamic vibration absorber

○ 正 宋 義林(金沢大院) 正 佐藤 秀紀(金沢大) 正 岩田 佳雄 正 小松崎 俊彦

Yilin SONG, Hidenori SATO, Yoshio IWATA and Toshihiko KOMATSUZAKI

Kanazawa University, 2-40-20, Kodatsuno, Kanazawa 920-8667

The response of a tilted dynamic vibration absorber system with parametrically excited pendulum is investigated using method of numerical calculation. It is found that its vibration-absorbing characteristic becomes worse if it is under some tilt angle. For this reason, the vibration system in which a pendulum with the same natural frequency as main system, or two pendulums which one has the same frequency and another has the half frequency as main system is hinged is supposed, and its vibration-absorbing characteristic with different damping is analyzed. Based on the numerical results, response of the system under different tilt angle is clarified, also the improvement of vibration-absorbing characteristic of the two pendulums system is verified.

Key words: tilted vibration system, pendulum, dynamic vibration absorber

1. 初めに

パラメトリック励振を利用した2自由度振り子式動吸振器システムの解析はこれまでいくつかの報告がある[1~6]．研究により，振り子のパラメトリック励振を利用して主系の振動を抑える効果があることが解明されている．ただし，系が傾斜した場合に吸振特性はどう変化するかという問題はまだ解明されていない．そのため，本研究では，まず，傾いたパラメトリック励振を利用した2自由度振り子式動吸振器システムの吸振特性は悪くなることを計算により明らかにした．次に，従来の2自由度振り子式動吸振器システムに主系と同じ固有振動数の振り子を付加した双振り子系を提案し，異なる角度における系の吸振特性を数値的明らかにするとともに，系の制振効果が改善されることを示した．

2. 傾斜した系に対する単振り子式動吸器系の応答

2.1 運動方程式

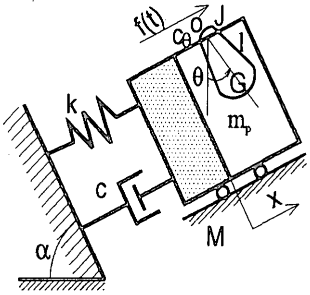


Fig. 1 Tilted vibration system with a pendulum dynamic vibration absorber

図1には傾いた1自由度系に対する単振り子式動吸振器系を示す．M, k, c は主系の質量，ばね定数，粘性減衰係数であり，m_p, c_θ，J，l は振り子系の質量，減衰係数，支点に対する慣性モーメント，支点から重心までの距離であり，α は主系の運動方向と垂直方向との角度である．また，主系に作用する外力は調和力 $f(t)=F\cos\omega t$ である．

系の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
&(m+m_p)\ddot{x}+c\dot{x}+kx+m_p l\ddot{\theta}\sin(\theta+\alpha)+\\
&+m_p l\dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha)=f(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
J\ddot{\theta}+c_\theta\dot{\theta}+m_p lg\sin\theta+m_p l\ddot{x}\sin(\theta+\alpha)=0 \tag{2}
$$

ここで，x は主系の変位，θ は振り子の角変位である．方程式(1)，(2)は無次元化すると次式になる．

$$
\begin{aligned}
&u''+\frac{2\zeta}{1+\lambda}u'+\frac{1}{1+\lambda}u+\frac{\lambda}{q(1+\lambda)}(\theta''\sin(\theta+\alpha)+\\
&+\theta'^2\cos(\theta+\alpha))=\frac{1}{(1+\lambda)}\cos z\tau
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\theta''+2\zeta_p p\theta'+p^2\sin\theta+\mu q u''\sin(\theta+\alpha)=0 \tag{4}
$$

ここに

$2\varepsilon=c/M$，　$\omega_n{}^2=k/M$，　$\lambda=m_p/M$

$\omega_p{}^2=m_p gl/J$，　$\mu=m_p l^2/J$，　$2\varepsilon_p=c_\theta/J$

$x_{st}=F/k$，　$u=x/x_{st}$，　$p=\omega_p/\omega_n$

$z=\omega/\omega_n$，　$q=x_{st}/l$，　$\zeta=\varepsilon/\omega_n$

$\zeta_p=\varepsilon_p/\omega_p$，　$\tau=\omega_n t$

また，式(3)，式(4)における($'$)は τ による微分を表わす．

式(4)において，$\sin(\theta+\alpha)$ を展開すると式(5)が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\theta''+2\zeta_p p\theta'+p^2\sin\theta+\mu q u''\sin\theta\cos\alpha\\
&+\mu q u''\cos\theta\sin\alpha=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

振り子が小角度で振動する時，$\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx 1$ と見な

し, また, 主系の定常振動の調和解は外力と同じ周波数で振動するのを仮定すれば, すなわち,

$$u = A\cos z\tau \tag{6}$$

式(5)は式(7)になる.

$$\theta'' + 2\zeta_p p\theta' + (p^2 - \mu q A z^2 \cos z\tau \cos\alpha)\theta = \mu q A z^2 \cos z\tau \sin\alpha \tag{7}$$

式(7)において, $\alpha = 0$ である時に方程式の右側はゼロになるため, Mathieu 理論により,その時振り子の振動はパラメトリック励振, すなわち, 振り子が主系の振動周波数の 1/2 で振動することがわかる. ただし, 系がある程度傾斜すると, 方程式の右側はゼロにならなく, また, この項は振り子系に対して主系と同じ周波数の外力と見なされる. 従って, その時, 振り子系の振動は少なくとも二つの周波数成分を含むのが予想された. 本論文では, 最初に, 傾いた角度の変動に対して, 主系の固有振動数の 1/2 および主系と同じ固有振動数を持つ二種類の振り子が別々に付加した単振り子系の制振特性を数値的に調べた.

計算では, 式(3), 式(4)に主系と振り子系の無次元化変位と角変位 u, θ の実効値を $\tilde{U}, \tilde{\Theta}$ と表わし, 実効値は最初 3000 周期をカットした後 300 周期に対する系の応答より求めた. なお, 計算では R. K. G 法を利用した. また, 主系と振り子系の固有振動数の比 p は 0. 5 と 1. 0 とした.

2. 2 角度 α の変動における系の応答

2. 2. 1 弱い減衰の場合 ($\zeta_p = 0.01$)

図2と図3には $p = 0.5$ と $p = 1.0$ について傾斜角度 α を変えた時の応答の計算結果を示した. ここで, 主系の初期変位と初期速度はゼロ, 振り子の初期角変位は0から3. 0まで0. 2づつ変化させて計算した. なお, 図の(a)と(b)はそれぞれ主系と振り子の応答を表す.

図2によってパラメトリック励振を利用した2自由度振り子式動吸振器系は傾斜するとすべての傾く角度に対してよい制振効果が得られないことがわかる. α は小さい時には振り子の発振により、ある周波数の領域に一定程度の吸振効果があるが、主系と振り子系とともに不安定運動が出てくる。周波数の比 z は 1. 0 の近くに達すると、応答曲線の右側に急に高いピークが起こる。また, α の増大に従い, 吸振領域が短く, ピークが高くなることがわかる. 計算結果によると、 $\alpha \le 60^0$ である場合は振り子の振動によって主系の振動に抑える効果が多少あることが見られるが, $\alpha \ge 75^0$ である場合は振り子があまり振動しなく、パラメトリック励振の特性は失ってしまい, 吸振器としての吸振効果がまったくないことがわかる. 振動の形態については、α の増大に従い、初期条件による振り子が発振したり, 発振しなかったりという領域が短くなり, 振り子が小さい振幅と大きい振幅で二つの定常振動をする領域や一つの定常振動と不安定運動と共に存在する領域が出てくることを見られた.

図3にはほかの条件は図2と同じで振り子の固有振動数を変えた時の系の応答を表す.

図 3 を見ると, $p = 1.0$ の場合は振り子の固有振動数は主系と同じであるため, すべての傾く角度に対してパラメトリック励振でない2自由度系の特性を表わすことがわかる. $\alpha = 0$ である時に振り子がまったく振動しないため、主系に対する影響がない。それは式(7)より, その時, 方程式の右側にある振り子と同じ周波数の項がゼロになるからである. 図3によると, この場合はパラメトリック励振でない2自由度振り子式動吸振器系であるため, 主系と振り子系の応答曲線にはともに二つのピークが出てくる。また, α は大きくなるに従って, ピークの最大値は小さくなるともに, ピークが離れていくことがわかる。また、ある周波数の領域にはよい制振効果が得られることが図3より見られ, その吸振領域は α の増大に従い, 範囲は広くなることが明らかにした.

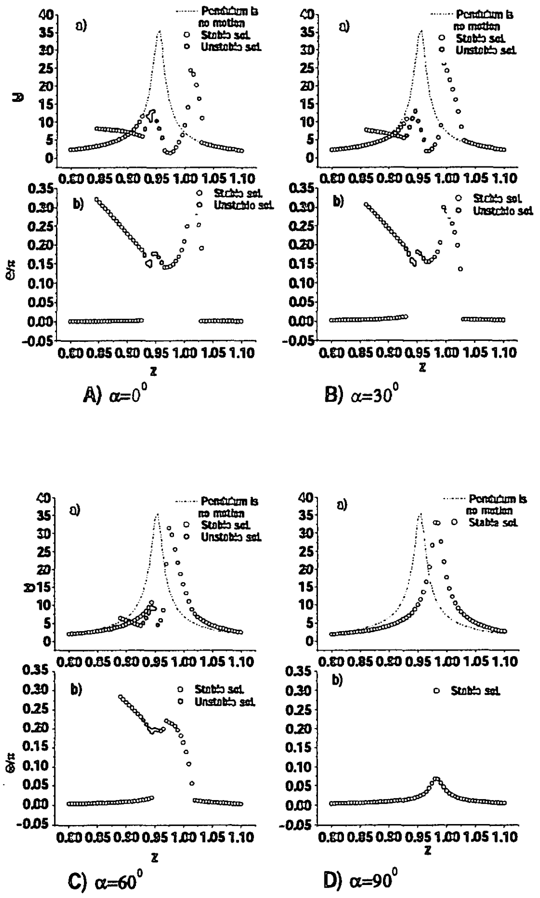
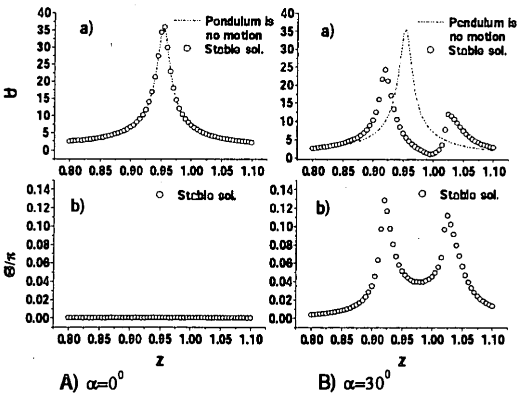


Fig.2 The response of main and pendulum systems with different tilt angle α in the case of $p = 0.5$, $\zeta_p = 0.01$ ($\mu = 0.5, q = 0.01, \lambda = 0.1, \zeta = 0.01$)

図2と図3に示す系の応答を比べて, 傾いた振り子式動吸振器系に振り子の周波数は変わると, 主系の応答も変化することを確認した. また、 $p = 0.5$ である時に小角度の場合は吸振効果があり, $p = 1.0$ である時に大角度の場合は吸振効果があることが応答曲線の比較よりわかり, 弱い減衰の場合 ($\zeta_p = 0.01$) は二つ周波数比の振り子式動吸振器系ではどちらが全領域に良い制振効果が得られなかったことがわかる.



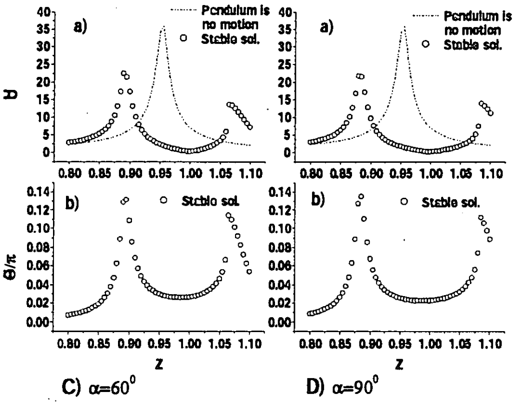
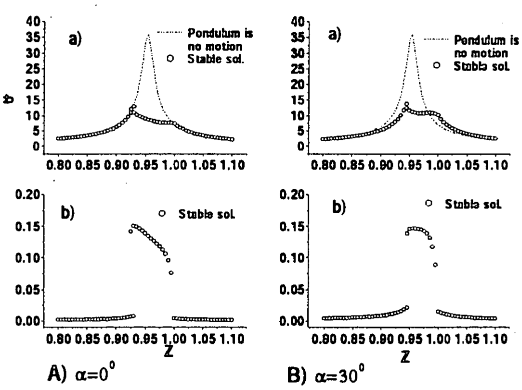


Fig.3 The response of main and pendulum system with different tilt angle α in the case of $p=1.0$, $\zeta_p=0.01$ ($\mu=0.5, q=0.01$, $\lambda=0.1, \zeta=0.01$)

2. 2. 2 強い減衰の場合 ($\zeta_p=0.05$)

図 4 には振り子系の減衰は $\zeta_p=0.05$ 時に主系の応答の実効値を表わす. ここで, 系のパラメータは図 2 と同じとした. 図 4 によって, $\zeta_p=0.05$ 場合は主系の応答は $\zeta_p=0.01$ 場合に比べて同じ傾向であることが見られるが, 減衰の影響で, α の小さい時の吸振効果は $\zeta_p=0.01$ 場合により全般的によくなることが明らかである.



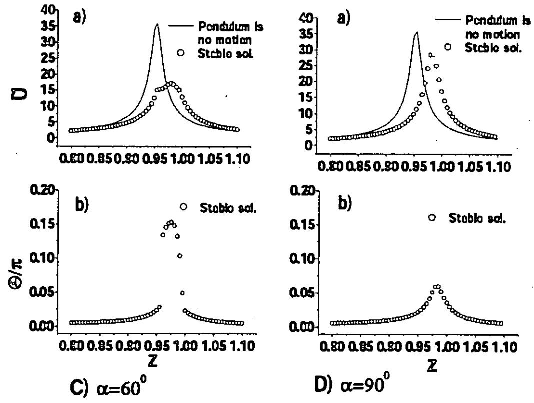
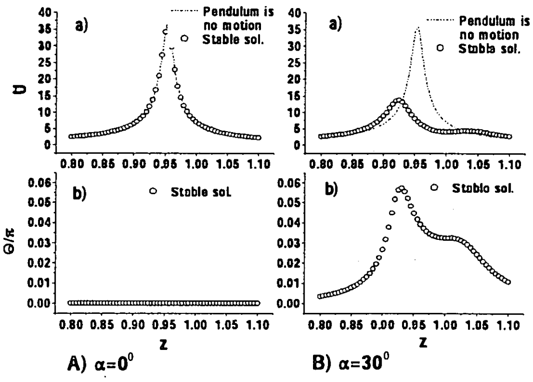


Fig.4 The response of main and pendulum systems with different tilt angle α in the case of $p=0.5$, $\zeta_p=0.05$ ($\mu=0.5, q=0.01$, $\lambda=0.1, \zeta=0.01$)

特に, $\alpha=0$ である時に, パラメトリック励振であるため, 振り子の振動により, 主系の振動を抑える動吸振器としてのよい制振特性が得られている. ただし, α の増大に従い, 制振特性は悪くなり, $\alpha=90^0$ 時に, 吸振効果はまったくないことがわかる. なお, 主系と振り子系と共に非定常振動が出てこなく、すべての領域に定常振動をすることが見られた.



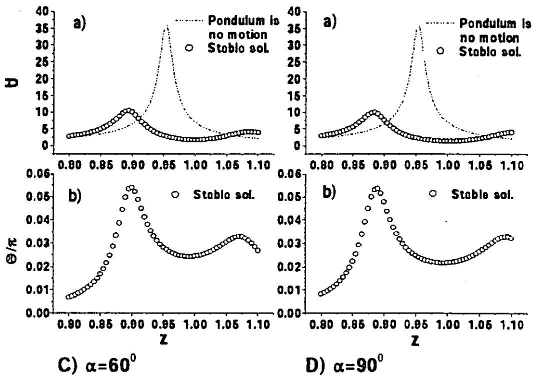


Fig.5 The response of main and pendulum system with different tilt angle α in the case of $p=1.0$, $\zeta_p=0.05$ ($\mu=0.5, q=0.01$, $\lambda=0.1, \zeta=0.01$)

図５は $p=1.0$，ほかの条件は図４と同じな場合を示す．

図５によって，$\zeta_p=0.05$ の場合には $\alpha=0$ 時に系の応答を除いて，広い範囲に良い制振効果が得られることがわかる．ただし，α の増大にしたがい周波数比 z の低い領域には振り子の振動より，主系に増振の役割を果たすことが見られた．また，その時振り子は小さい振幅で振動することがわかる．

３．双振り子式傾く動吸器系の応答

以上の分析により，振り子系と主系との周波数の比 p は 0.5 または 1.0 とした時に,ある程度の制振効果があるが,吸振を働く領域が異なる．たとえは，図４には z の低い領域に一定程度の制振効果が得られるのに対し，図３と図５には z の真中領域に良い制振効果が得られる．従って，これらを加え合わせた双振り子動吸振器系を考えることにより，全領域にわたって制振効果が改善されることが期待される．図６にはその双振り子動吸振器系を示した．

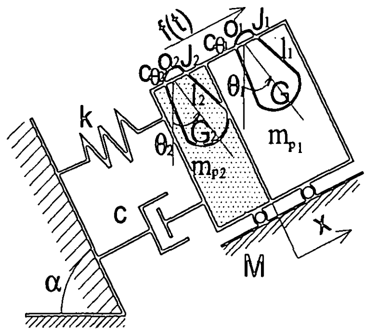


Fig.6 Tilted vibration system with two pendulums dynamic vibration absorber

3.1 運動方程式

系の無次元化運動方程式は

$$u''+\frac{2\zeta}{1+\lambda}u'+\frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_2}u+\frac{\lambda_1}{q_1(1+\lambda_1+\lambda_2)}\times(\theta_1''\sin(\theta_1+\alpha)+\theta_1'^2\cos(\theta_1+\alpha))+\frac{\lambda_2}{q_2(1+\lambda_1+\lambda_2)}\times(\theta_2''\sin(\theta_2+\alpha)+\theta_2'^2\cos(\theta_2+\alpha))=\frac{1}{(1+\lambda_1+\lambda_2)}\cos z\tau \tag{8}$$

$$\theta_1''+2\zeta_{p1}p_1\theta_1'+p_1^2\sin\theta_1+\mu_1q_1u''\sin(\theta_1+\alpha)=0 \tag{9}$$

$$\theta_2''+2\zeta_{p2}p_2\theta_2'+p_2^2\sin\theta_2+\mu_2q_2u''\sin(\theta_2+\alpha)=0 \tag{10}$$

ここで、式(8)~(10)のパラメータは式(3)、式(4)と同じであり、添字１,２はそれぞれ振り子１、振り子２のパラメータを意味する。

3.2 角度 α の変動における系の応答

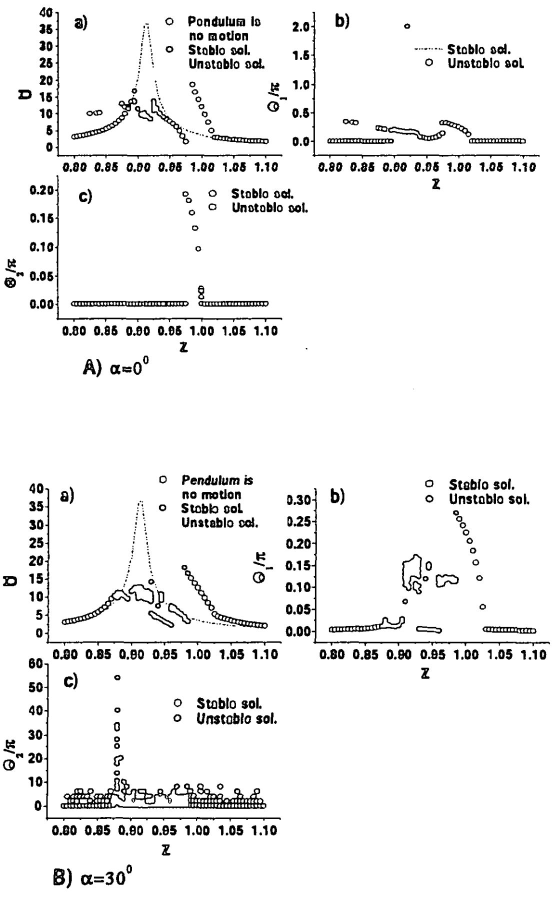
ここで，主系のパラメータは単振り子式の場合と同じであり,振り子１,振り子２のパラメータはそれぞれ $\mu_1=0.5$, $q_1=0.01,\lambda_1=0.1,p_1=0.5$ と $\mu_2=0.5$，$\lambda_2=0.1,,p_2=1.0$ である．系の初期条件では，主系の初期変位と初期速度はゼロ,振り子２の初期角変位は 0.1，振り子１の初期角変位は０から 3.0 まで 0.2 づつ変化に設定した．なお,図の (a)，(b)，(c) はそれぞれ主系，振り子１と振り子２の応答を表し，図に示した応答の実効値は単振り子式の場合の計算方法と同じである．また、双振り子式の場合には q_2 は独立のパラメータではないため，その値は式(11)のように算出することができる。

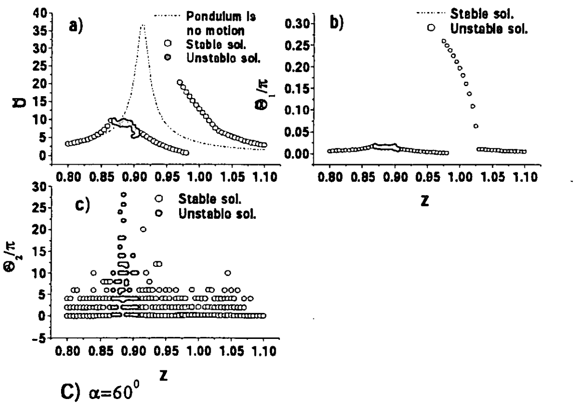
$$q_2=(\mu_1p_2^2/\mu_2p_1^2)q_1 \tag{11}$$

3.2.1 振り子１の弱い減衰の場合 ($\zeta_{p1}=0.01$)

図７に振り子１と振り子２の減衰はともに弱い場合の系の応答を表す．その時振り子 1，2 の減衰はそれぞれ $\zeta_{p1}=0.01$，$\zeta_{p2}=0.01$ である．

図７を図２と図３に比較すると，二つ振り子の間に互いに影響を与えることがわかる．ただし，この場合は振り子の減衰は弱いため、振り子１と振り子２はともに大振幅で振動する．特に振り子２に対して外力の影響は強いから，回転運動が起こる．図７によって、すべての傾く角度では三つの系とともに不安定運動が発生した．また，図３に示した主系の応答曲線の左側のピークと図２の右側のピークが低くなる一方，真中領域の制振効果が悪くなる．全般に考えると弱い減衰の場合はよい制振効果が得られないことがわかった。





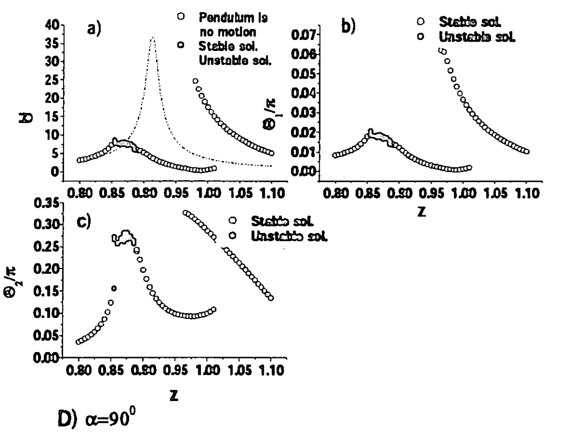
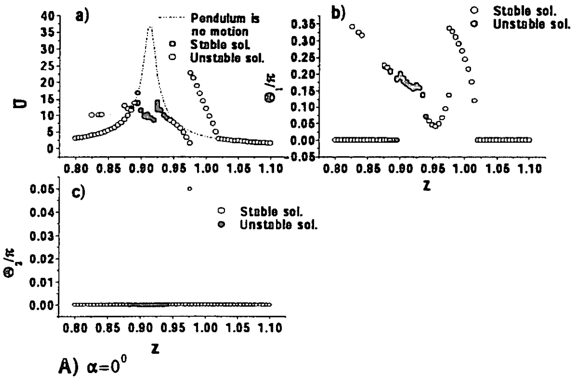
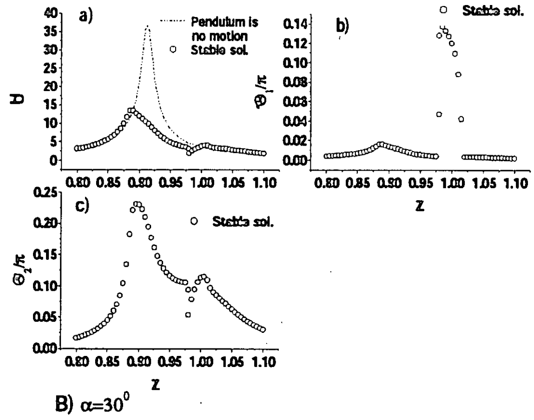
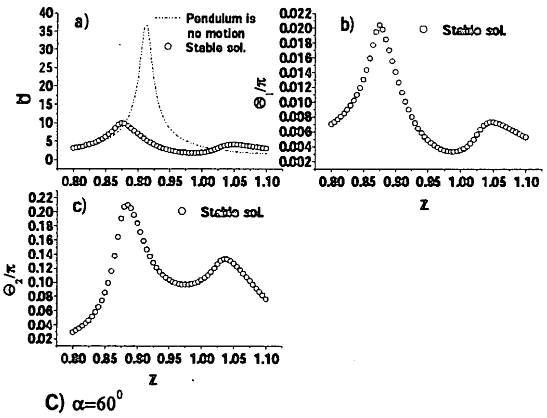


Fig.7 The response of main and two pendulum systems with different tilt angle α in the case of parameter $\mu_1 = 0.5, q_1 = 0.01, \lambda_1 = 0.1, \zeta_{p1} = 0.01$ and $\mu_2 = 0.5, \lambda_2 = 0.1, \zeta_{p2} = 0.01$

図 8 に振り子 1 の減衰が弱く，振り子 2 の減衰が強い場合の系の応答を表す．図 8 によると、$\alpha=0$ 時のパラメトリック励振を除いて，良い制振効果が得られることが見られた．また，図 8 は図 2 と図 5 に比べて，振り子 1 と振り子 2 の共同振動で主系に対する振動を抑える効果が改善されることがわかる．







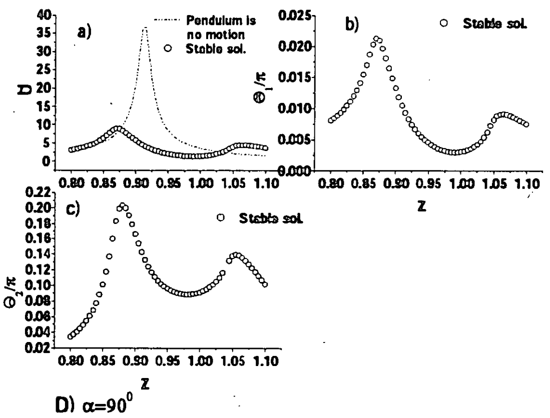


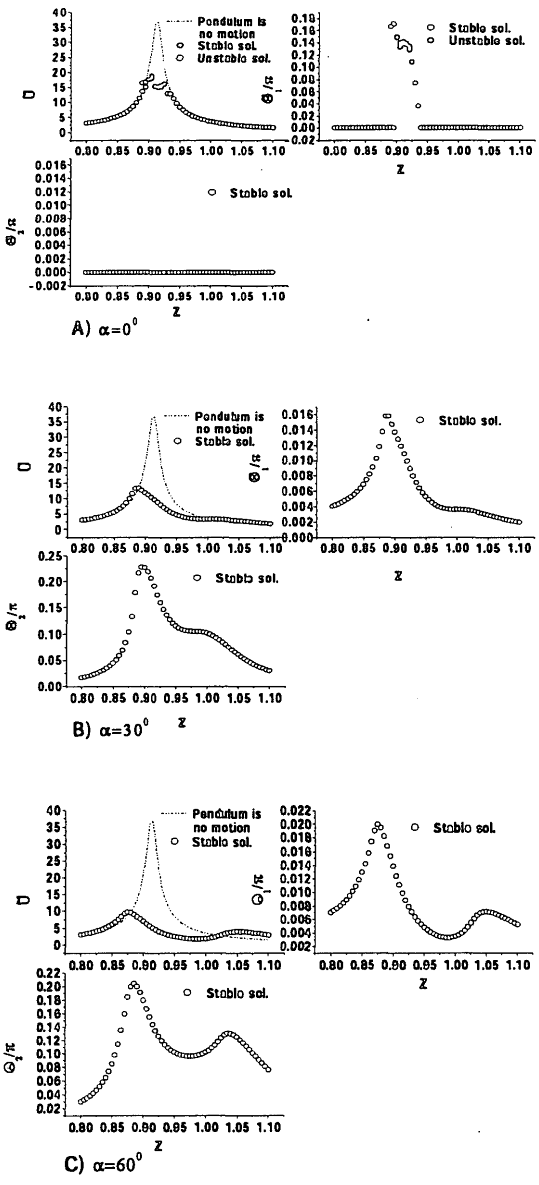
Fig.8 The response of main and two pendulum systems with different tilt angle α in the case of parameter $\mu_1 = 0.5, q_1 = 0.01, \lambda_1 = 0.1, \zeta_{p1} = 0.01$ and $\mu_2 = 0.5, \lambda_2 = 0.1, \zeta_{p2} = 0.05$

図 8 は図 5 に比べると，二つの系はともに吸振効果があるが、図 5 の周波数の低い領域における振り子の運動が主系に対して増振の役割を果たすのに対し、図 8 では増振の役割がなくなることがわかる。

3.2.2　振り子 1 の強い減衰の場合 ($\zeta_{p1} = 0.05$)

図 9 には$\zeta_{p1} = 0.05$の場合の計算結果を示す.

図 9 によって，$\alpha = 0$である時，動吸振器はパラメトリック励振であるため，振り子 2 は振れなく，ただ振り子 1 の振動より，主系の運動を抑えられる．また，図 4 に比べてその時主系には不安定運動が出るとともに, 吸振領域が狭くなる．それはもう一つの振り子を付加して，系の重量が増えるからである．αの増大に従い，振り子 2 の振動により主系に制振の役割を果たしてきて，$\alpha \geq 30$になってからすべての領域に良い制振効果が得られ，系の運動は定常振動になることがわかる．また，図 9 と図 8 に比べ，角度の小さい場合には，例えば$\alpha = 0$と$\alpha = 30$，振り子 1 の減衰より，主系の応答曲線にはある程度の違いがあるが，大きい角度の場合には，主系，振り子 1 と振り子 2 の応答曲線はだいたい同じであることがわかり，一定の傾く角度を超えると，振り子 1 の振動が，主系に与える影響は小さくなることがわかる.



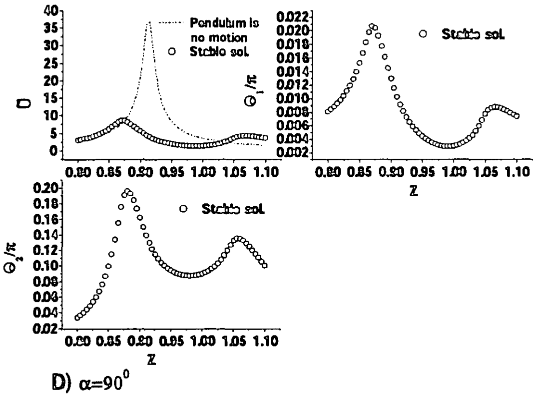


Fig.9 The response of main and two pendulum systems with different tilt angle α in the case of parameter $\mu_1 = 0.5, q_1 = 0.01, \lambda_1 = 0.1, \zeta_{p1} = 0.05$ and $\mu_2 = 0.5, \lambda_2 = 0.1, \zeta_{p2} = 0.05$

また，単振り子式動吸振器系と双振り子式動吸振器系では主系と振り子系の応答を全般的に考えると，小さい角度と小さい周波数の領域に$p = 0.5$である振り子 1 の影響が強く，大きい角度と大きい周波数の領域に$p = 1.0$である振り子 2 の影響が大きいことが言え，二つの振り子の共同振動で主系に対する制振効果がよくなることが言える.

4 結言

以上，本研究で得られた結果を要約すると，

(1) 傾斜した振動系に対して, パラメトリック励振と共振を利用した単振り子式および双振り子式動吸振器システムの制振特性を，数値解析により，明らかにした.

(2) パラメトリック励振と共振を共に利用した双振り子式動吸振器システムにより主系の制振特性が改善されることを示した.

文 献

(1).Haxton, R.S. and Barr, A.D.S, *The autoparametric vibration absorber*, Trans. ASME, *J. Eng. Ind.94 (1972), 119-125.*

(2).Bajaj, A,K, Chang, S.I. and Johnson, J.M., *Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree-of-freedom system*, *Nonlinear Dynamics. 5 (*1994), 433-457.

(3).Hatwal, H., Mallik, A.K. and Ghosh, A., *Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system- Part1: Periodic responses*, Trans. ASME, *J. Appl. Mech. 50 (*1983), 657-662.

(4).Hatwal, H., Mallik, A.K. and Ghosh, A., *Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system- Part2: Chaotic responses*, Trans. ASME, *J. Appl. Mech. 50 (*1983), 663-668.

(5).Yabuno, H., Endo, Y. and Aoshima, N., *Stabilization of 1/3-order subharmonic resonance using an autoparametric vibration absorber*, Trans. ASME, *J. Vib. Acoust. 121 (*1999), 309-315.

(6).宋・佐藤・ほか 2 名，機論(C 編)67-661(2001), 2763-2769.