

自励振動と同期振動

Self-excited vibrations and phase-locking phenomena

佐藤 勇一 (埼玉大学)

Yuichi SATO (Saitama University)

1. はじめに

Fig.1に示すようなばねで吊られた半円柱を軽く打撃するか、あるいは、少し変位させてから放すと振動します。今簡単のために半円柱は、平行に上下振動をしますとします。その振動の様子はFig.2(a)のようになります。系の状態は一つの変数(変位)で表すことが出来るので運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

と書くことができます。ここで、 m 、 k は質量、ばね剛さです。 c は減衰係数と呼ばれる量で、まわりの空気を動かし、ばねが伸び縮みするときエネルギーが失われるのをまとめて近似した量です。この減衰のために、振動は時間とともに減少してやがて半円柱は静止します。

ところが、Fig.1の半円柱に横から風を与えたときにはどうなるでしょうか。半円柱の振動はFig.2(b)に示すように次第に増大します。誰も半円柱を揺すっているのではないのですが、振動は次第に成長します。しかし、風を止めると振動も止まります。これから、風が振動の原因であることがわかります。これはギャロッピングと呼ばれる自励振動なのです。

このように外から振動的な力が作用しているわけではないのに起こる振動は、自励振動であることが多いのです。自励振動とはその名前が示すように、振動が自らを励まして大きく成長する振動です。現在の振幅が、振動によってますます振動エネルギーを系に取り入れ振動が増大するのです。

振動系には固有振動数があることはよく知られています。そして、外からこの振動数と同じ、あるいは、近い振動数で系を揺ると共振と呼ばれる大きな振動が発生します。しかし、自励振動はそういった振動的な力が作用していないときに発生します。共振と比べてなじみが少ない振動と感

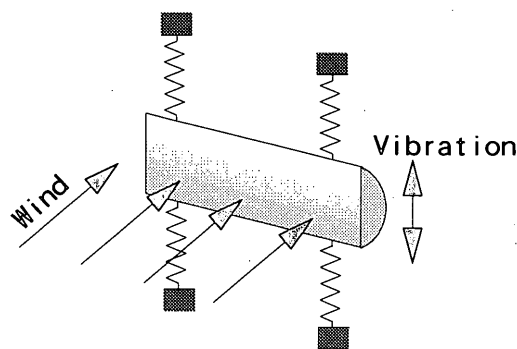
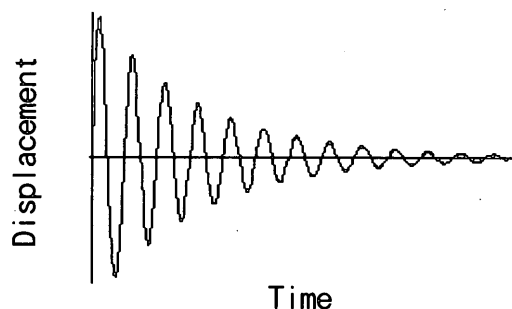
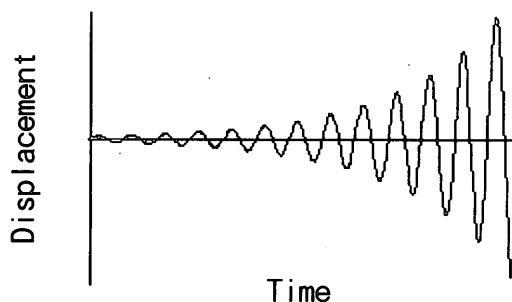


Fig.1 自励振動の発生する系



(a) 正減衰 ($c > 0$)



(b) 負減衰 ($c < 0$)

Fig.2 減衰のある系の振動

じますが、結構身近で経験していることが多いです^(1,2)。

例えば、チョークで線を引いている時にカタカタという音とともに点線が引けてしまうことがあります。これは、チョーク先端の摩擦によって腕が自励振動している例で、チョークの振動は黒板

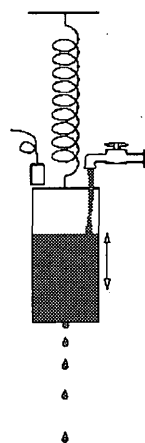


Fig.3 振動系

とくっ付いたり、滑ったりする振動なので、スティック・スリップ振動と呼ばれます。また、ホワイトボードにマーカーで線を引いているときに、不快な音とともに鱗が重なったような線がひける時も、マーカー先端とホワイトボードとの間の摩擦が原因した自励振動です。細かくいうと、動摩擦係数が相対すべり速度に依存しているために起こる振動と考えられます。

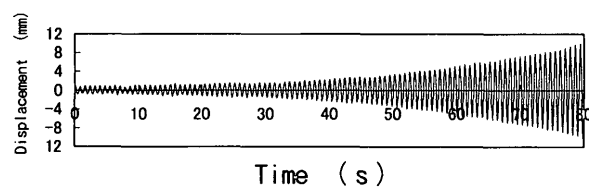
これらの自励振動の最も簡単な数学モデルは式(1)で表せます。式中の減衰係数 c が正の値ではなく負の値になっているために振動は減衰せず、増大するのです。先ほどの空気流の中の半円柱の場合は、空気の流れから振動エネルギーを得て、振動が成長しているのです。

シミーと呼ばれる床と車輪の摩擦による自励振動、流れの中に置かれた物体の後ろに出来る渦によって発生する自励振動など数多くの自励振動が知られています。

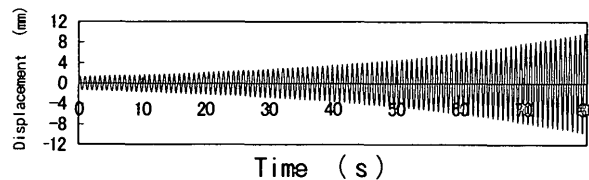
2. 自励系の振動

2.1 自励振動 次に振動発生メカニズムが、わかりやすい例について考えます⁽³⁾。Fig. 3に示すような系を考えます。ばねで吊られた容器に一定の流量の水が供給されています。容器の底は透過性のシートで、底にかかる圧力に比例して水が下へ透過する特性をもっています。厳密にはより複雑なのですが、実験した範囲ではこのようにいえます。また、図では水が蛇口から流れ込んでいますが、実際はごくわずかな水滴が糸をつたって供給されています。

このときの容器の振動を調べると、Fig. 4(a)の



(a) Experimental result



(b) Calculated result

Fig.4 容器の過渡振動

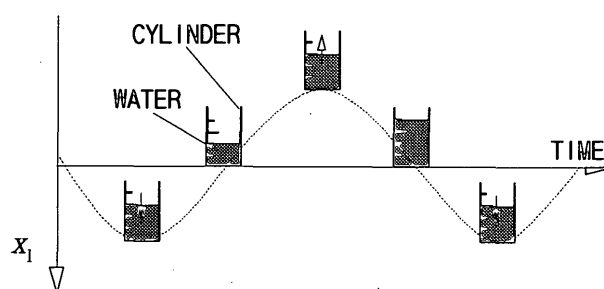


Fig.5 容器と水の挙動

ように、次第に発散振動をしています。そのメカニズムを模式的に示したのが、Fig. 5です。振動しているため容器の底に加わる水の圧力が容器の速度に比例するので、ちょうど、負の減衰が作用することになって振動は増大します。上で述べた考えに従って作ったモデルについて解析した結果がFig. 4 (b)で、定性的によくあっていることがわかります。もっとも、いつもこのような振動を起こすわけではなく、容器を吊っているばねが剛いばあいには振動は収束して、系は安定です。

2.2 同期振動 このような特性をもつほとんど同じ系をふたつ、Fig. 6に示すようにばねで繋ぎ合わせるとどのようなことが起こるでしょうか。単独のときは、各々の系はお互いに無関係に、自励振動を起こします。しかし、図のようにばね k_0 でつながれたときには互いに影響しあうことになります。この場合、ふたつの系はほとんど同じなので、相手に与える影響あるいは相手から受ける影響もほとんど同じになります。

連結しているばね剛さ k_0 が弱い場合と、強い場合についての計算結果を示すとFig. 7のようになります。Fig. 7 (a)は初めに両方の容器を平行位

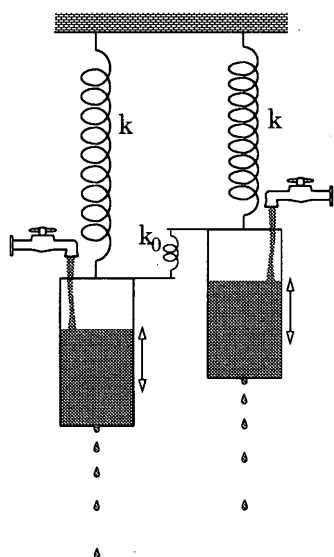
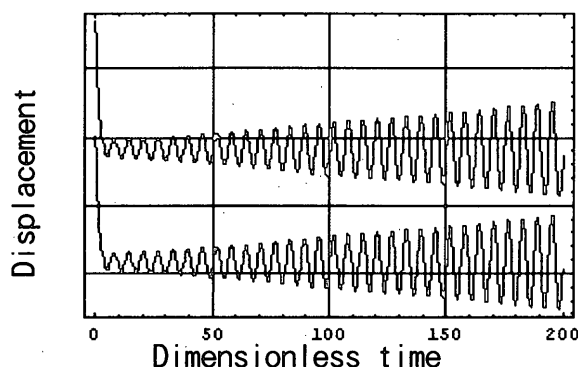
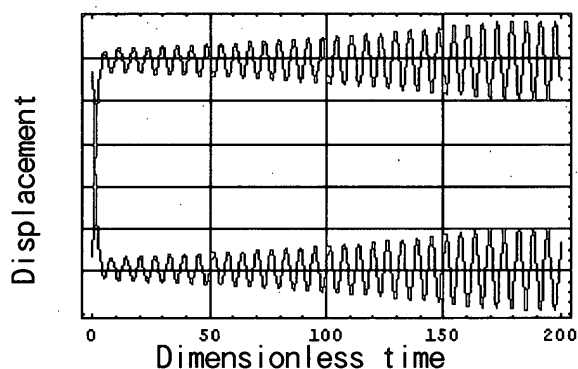


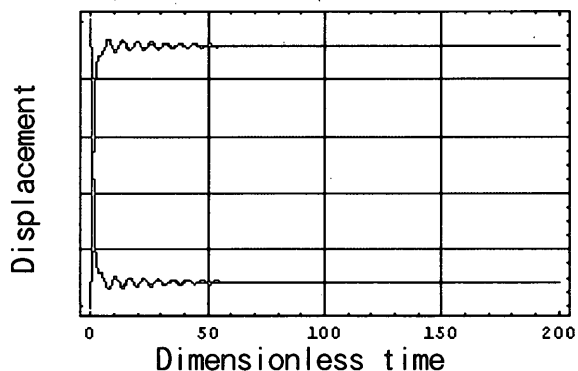
Fig.6 結合された振動系



(a) In-phase vibration



(b) Out-of-phase vibration



(c) Extinction

Fig. 7 振動系の挙動

置より少し下に同じだけずらしておいてから同時に放したときの時刻歴応答です。ふたつの系の違いは、容器底面の水の透過率が1/1000だけ異なるとしています。初期状態が同位相のときは連結ばねの剛さによらず、その後の時刻歴応答は必ず同位相となります。これは、ばね k_0 を変位させるために必要なエネルギーが最小であるということから容易に理解できます。

つぎに、初期変位を逆位相にしたときの結果を示します。ばね k_0 がやわらかいときにはFig.7(b)に示すように、逆位相のまま振動が増加します。しかし、 k_0 を剛くするとFig.7(c)に示すように、振動は次第に小さくなってしまいます。各々の振動系は、不安定で振動を増加させようとするエネルギーが供給されているのですが、ばね k_0 で連結されているためにそのエネルギーが相手の振動を抑えるのに使われて振動が止まってしまうのです。もう少し細かく見ていくと、中間のばね剛さのときには初めの逆位相の振動が同位相に変わってしまう範囲もあります。

3. 振り子の同期振動

系の特性が良く似た振動系を結合させると同位相あるいは逆位相で振動したりする現象を同期現象と呼びます。この現象の研究は17世紀にオランダのクリスチャン・ホイヘンス(1629-1695)が、ふたつの振り子の運動を観察したことに端を発するといわれています。

その振り子時計と良く似たメトロノームを用いた研究から⁽⁴⁾、2台のメトロノームとこれら載せた支持台の特性との関係をまとめてみると、次のようになります。まず、系の概略図をFig.8に示します。メトロノームはぜんまいから非振動的なエネルギーを供給されて振動しており、自励系と考えることができます。振り子(メトロノーム)の振動数は約1 Hzに設定してあります。しかし、製品の固体差からメトロノームAがBより1/100程周期が短くなっています。これら載せた台は、丁度ブランコのように4本のワイヤで吊られています。このワイヤ長さを調節する事で系全体の固有振動数 f_p を変えることができます。

この系に現れた同位相の振動と逆位相の振動の波形を示したものがFig.9です。ワイヤの長さが

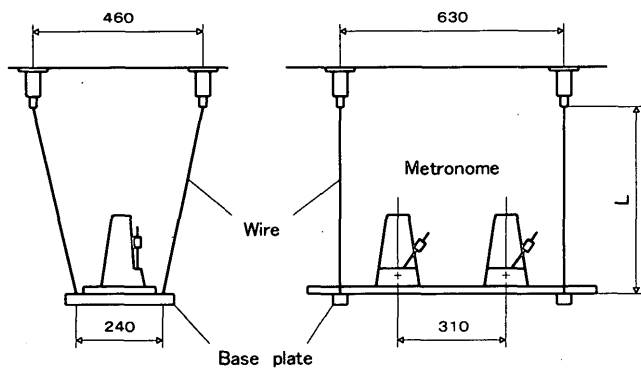


Fig.8 実験装置

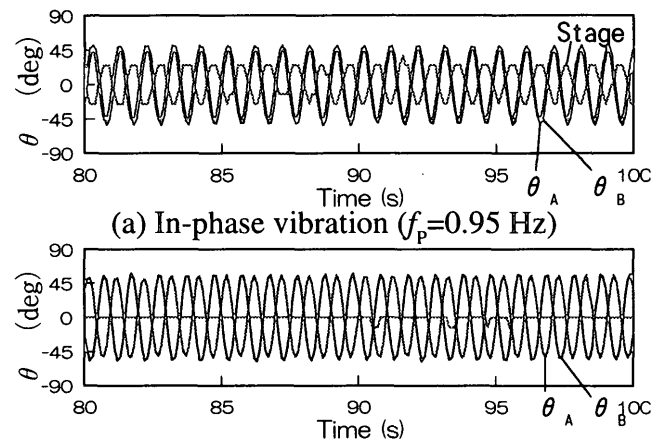
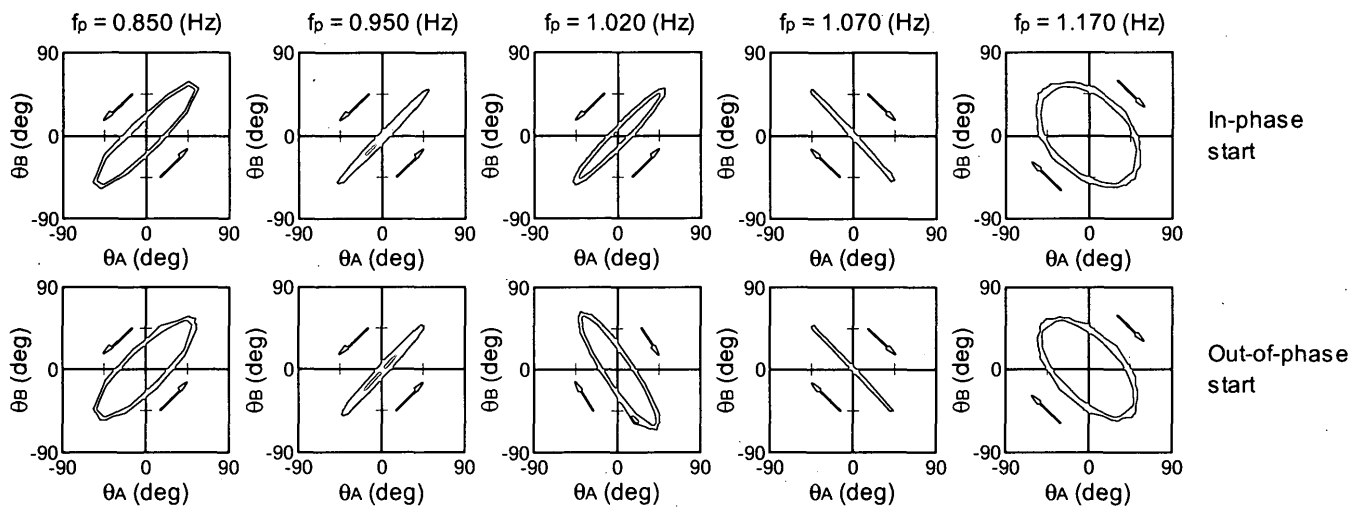

(b) Out-of-phase vibration ($f_p=1.1\text{Hz}$)

Fig.9 振動系の挙動


Fig.10 振り子の角変位 θ_A と θ_B の関係

長く、固有振動数 f_p が 0.95Hz のとき、同位相同期が現れます。反対にワイヤの長さを短くし、固有振動数 f_p を 1.1Hz にすると逆位相同期が現れます。このように二つの自励振動系を結合している台の振動特性を変えることによって、同位相の振動が発生するときと逆位相の振動が発生するときがあることがわかります。

この支持台の固有振動数 f_p を変えたとき実験結果を示したのが Fig.10 です。ワイヤを短くしていき、 f_p を次第に高くしていくと、初めにメトロノームの振り子は同位相で同期振動していますが次第に位相差が無くなり、振り子の振動数である 1Hz 近くで、逆位相同期に移行します。ふたつの振り子が同位相で同期するか、逆位相で同期するかは極特定の範囲を除けば、初期条件に依存しません。このように特性のほぼ等しい振動系を比較的弱く結合したとき、結合状態によって、同期の形態が変わります。

4. 回転機械の同期現象

振動系にあらわれる同期現象は、回転機械においても現れます^(5,6)。回転機械をメトロノームと同じように、支持台の上に載せます。この系の概略図を Fig.11 に示します。モータに円盤が取り付けられおり、また、不釣り合い重りをそれぞれ1つずつ円盤に取り付けてあります。ロータを載せて

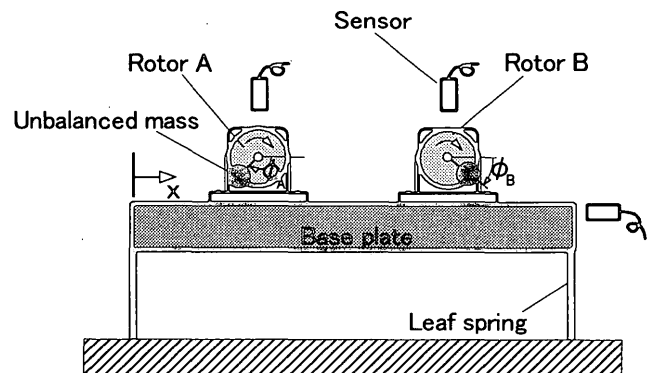


Fig.11 実験装置

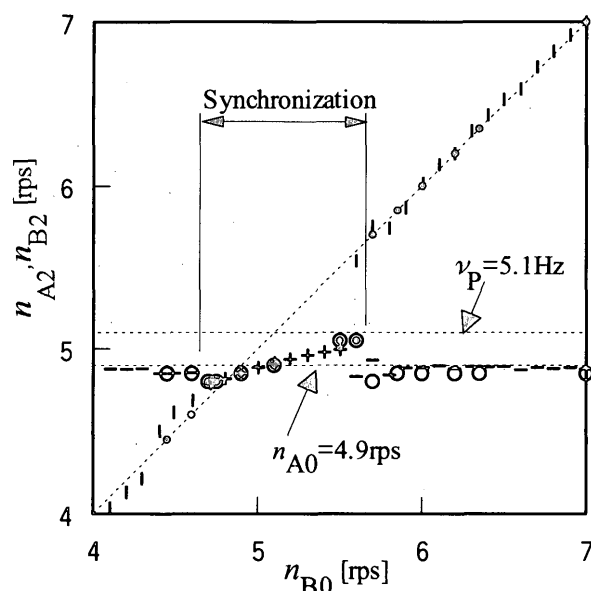


Fig.12 設定回転数 n_{B0} と実際の回転数 n_{A2} , n_{B2} の関係 ($n_{A0}=4.9\text{rps}$, $f_p=5.1\text{Hz}$, experimental; $\bigcirc$: rotor A, $\bullet$: rotor B, calculated; —: rotor A | : rotor B)

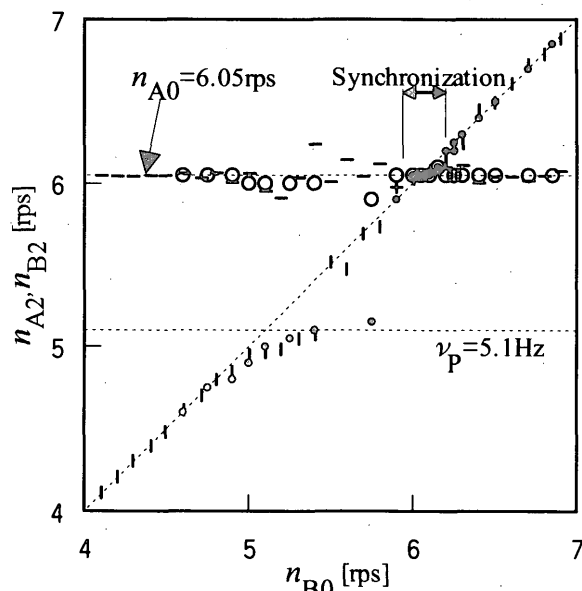


Fig.14 設定回転数 n_{B0} と実際の回転数 n_{A2} , n_{B2} の関係 ($n_{A0}=6.05\text{rps}$, $f_p=5.1\text{Hz}$, experimental; $\bigcirc$: rotor A, $\bullet$: rotor B, calculated; —: rotor A | : rotor B)

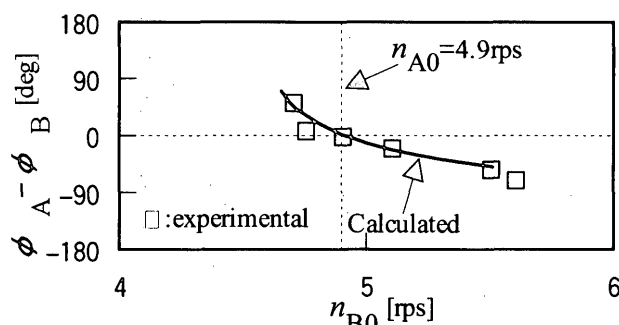


Fig.13 ロータの位相差

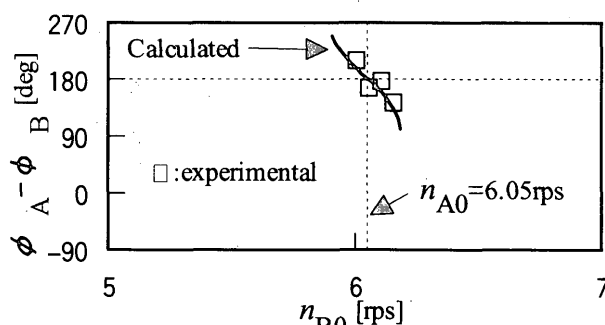


Fig.15 ロータの位相差

いる台は、この不釣り合い力により水平方向に振動する構造となっています。

この装置では、台の固有振動数は5.1Hzに固定し、モータの回転数を変化させたとき、どのような同期振動が現れるかを検討します。

4.1 同位相同期 Fig.12はロータAの回転数を台の固有振動数より低い4.9rpsに設定した状態で、ロータBの回転数を4rps～7rpsの範囲で変化させるときのロータの回転数を、ロータBの設定回転数に対して示したものです。ロータBの設定回転数が、4.7rps～5.6rpsの範囲で回転数が一致し、位相が一定の関係を保持しています。このときのロータAとBの位相差をFig.13に示します。ロータAとロータBの位相差は $\pm 90^\circ$ 以内の同位相の回転が起こっています。このため、

ロータの不釣り合い力により、台は大きく振動します。

4.2 逆位相同期 ロータAの回転数を台の固有振動数よりも高い6.05rpsに設定して、ロータBの回転数を変える場合の結果をFig.14に示します。このとき、ロータBの回転数が6rps～6.15rpsの範囲で同期し、位相差が保持されています。このときの位相差をFig.15に示します。ロータ間の位相差は 90° 以上となり逆位相で回転していることがわかります。このとき、ロータの不釣り合い力がお互いに打ち消し合うため、台の振動は比較的小さいものとなります。

このように、回転機械においても、お互いの影響を受けるように結合すると同期振動が起こります。この場合は、ロータの同期回転数が台の固有

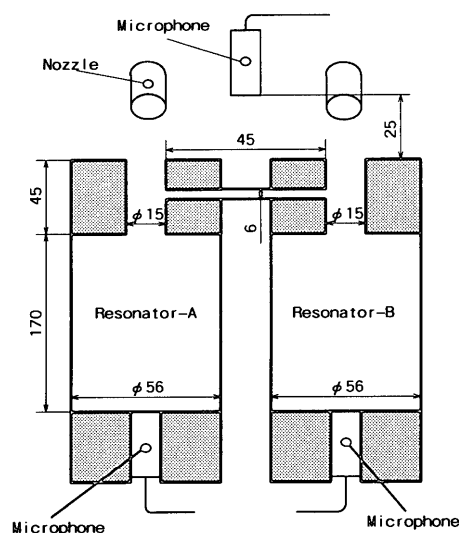


Fig.16 実験装置

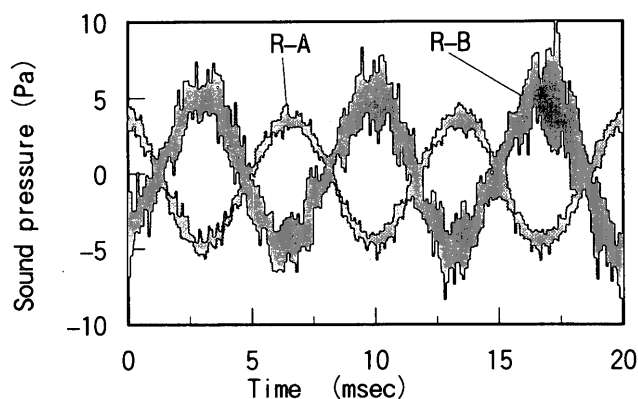
振動数よりも低い場合，同位相同期が起こり，ロータの同期回転数が台の固有振動数より高い場合，逆位相が起こることがわかります．

5. 共鳴器の同期振動

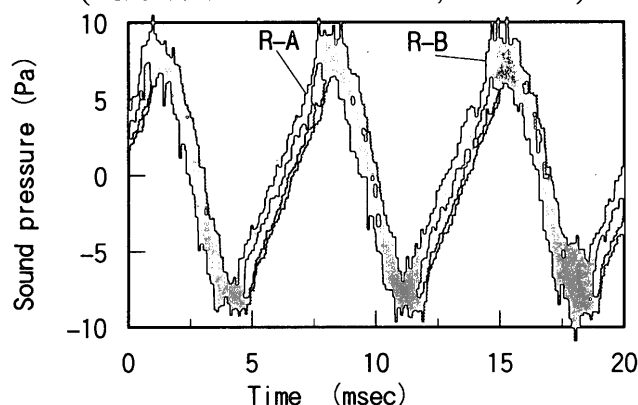
ヘルムホルツレゾネータに風をあてると音が発生します．この音は自励音と考えられています．このヘルムホルツレゾネータ2つを細い管で結合して，お互いに影響を与えるように結合した場合においても，同期振動は起こります⁽⁷⁾．実験装置の概略図をFig.16に示します．この系にノズルから風を送ると共鳴します．レゾネータBの風速を8 m/sに保持し，レゾネータAの風速を7 m/sと8 m/sとしたときのレゾネータ内部の音圧の波形を示したものがFig.17です．レゾネータAの風速が7 m/sのときは逆位相の共鳴が起こっており，風速が8 m/sのときは同位相の共鳴が起こっていることがわかります．

6. まとめ

自励振動する系を弱結合したときに生じる同期振動について簡単に紹介しました．皆様がこれらの問題について関心を，お持ちいただくようになれば幸いです．自励振動，同期振動について末尾の参考文献を参照いただきたいと思います．



(a) Out-of-phase locking
(wind velocities : RA=7m/s, RB=8m/s)



(b) In-phase locking
(wind velocities : RA=8m/s, RB=8m/s)

Fig.17 観察された音圧

最後に本文をまとめるにあたり，筆者の個人的事情のために埼玉大学工学部 長嶺拓夫氏に多大なる支援を賜りましたことを付記し，感謝いたします．

参考文献

- (1) 田中他，振動の考え方・捉え方，オーム社 (1998, 8)
- (2) 末岡，佐藤：自励的現象に迫る，丸善 (1998, 10)．
- (3) 佐藤，丸山，片山，抄紙プロセスで発生する長網の振動，日本機械学会論文集 64 巻 628 号 C 編，pp. 4592-4598. (1998, 12)．
- (4) 佐藤，中野，長嶺，布施，振動系の同期現象，日本機械学会論文集 66 巻 642 号 C 編，pp. 363-369, (2000, 2)
- (5) 長嶺，小貫，中野，佐藤，回転子の同期現象，日本機械学会, D&D' 99 Conference, 機械力学・計測制御講演論文集, Vol. B, pp. 662-665 (1999, 3)．
- (6) NAGAMINE, NAKANO, SATO, On Synchronization of Two Unbalanced Rotors, Proceedings of the Asia-Pacific Vibration Conference, Vol.2, pp. 836-841, (1999, 12)．
- (7) 長嶺，佐藤，中尾，引き込み現象を利用した自励音の消音，日本機械学会講演会 振動・音響新技術シンポジウム VSTech2001 (2001, 6)．