

236 音響・構造連成系の非定常応答解析手法に関する研究

Analysis Method of the Nonstationary Response of
Acoustical-Structural Coupling Systems

○正 遠藤満 (東工大), 正 西垣勉 (東工大), 時崎智行 (東工大 [院])

Mitsuru ENDO, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo

Tsutomu NISHIGAKI, Tokyo Institute of Technology

Tomoyuki TOKIZAKI, Tokyo Institute of Technology (Graduate student)

This paper proposes the numerical analysis method of the nonstationary response of acoustical-structural coupling systems. The acoustical analysis is formulated by the Boundary Element Method based on the hyper-singular boundary integral equation. The structural analysis is formulated by the Finite Element Method using the triangular thin plate element. Those fundamental equations are coupled by using the force equilibrium and the flux continuity conditions in the Laplace transformed domain, and the time history of nonstationary responses is obtained by the numerical inverse Laplace transform. The validity of the proposed method is examined in comparison with an analytical result and besides by conducting the experiments of nonstationary excitation of thin plates installed in the rectangular acoustic tube which is excited by a sinusoidal sound pressure from the planewave-driving type speaker. Finally, a few numerical calculation examples are shown. Those analyses deal with the flexible straight and L-shaped acoustic tubes which are excited by the sinusoidal pressure generated at the one end of acoustic tubes.

Key Words: Acoustical-Structural Coupling System, Nonstationary response, BEM, FEM, Numerical Laplace Transform

1. 緒言

種々の機械・構造物から発生する騒音や振動を低減するためには、それらを定量的に評価することが必要であるが、構造物が柔軟で薄い場合には構造振動と放射音は一般に相互作用を及ぼし合い、この相互作用の影響が顕著である系は音響・構造連成系と呼ばれる。これまで音響・構造連成系についてはいろいろと研究されているが、そのほとんどが定常振動応答解析であり、非定常応答に関する一般的解析手法についての研究はほとんどない⁽¹⁾。しかし、ロケット打上げ時のフェアリング内の人工衛星などは激しい非定常音響環境下にさらされ、また航空機によるソニックブーム問題など、非定常応答解析が必要な音響・構造連成系は多々存在する。そこで本研究では任意の非定常入力を受ける薄肉柔軟構造物と音場の連成系の時刻歴応答を定量的に評価するための一般的かつ汎用的な数値解析手法の開発を目的とする。

本解析手法は、音場解析には非常に薄い構造物を扱えるように超特異積分方程式を基礎にした境界要素法を、また構造物解析には有限要素法を適用して、それぞれの方程式系を連成条件を考慮した上でラプラス変換領域において解き、これを数値的に逆ラプラス変換することにより時刻歴応答を求めるものである。本研究では、正弦の入力がステップ状に加わる単純な音響・構造連成系の解析解並びに音響管内の弾性薄板を正弦的に非定常音響加振する実験結果と比較することにより本解析手法の妥当性を検証し、さらに比較的複雑な音響・構造連成系モデルに本数値解析手法を適用した結果を示す。

2. 解析手法

はじめに境界要素法による音響解析について述べる。図1に示すように、3次元音場の占める領域を V 、その外部領域を $\bar{V}$ とし、その境界を S_f とする。また領域 V 中の非常に薄い構造からなる境界を S_c とする。位置ベクトルを $\mathbf{x}$ として、境界 S_f では、境界外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 、音圧を $p(\mathbf{x}, t)$ (t は時間)とすると、流速ベクトル $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ の法線方向成分 $q(\mathbf{x}, t)$ は次式で表される。

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \quad (1)$$

一方、境界 S_c ではその両面で V に接しているが、図2のように、それぞれの二面に対応する量に $(+)$ および $(-)$ の記号を付すと、 S_c が非常に薄いという仮定より

$$q^+(\mathbf{x}, t) = -q^-(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

の条件が成り立つので、以後 S_c における流速変数として $q^+(\mathbf{x}, t)$ で代表させる。一方、 S_c の両面における音圧は一般に等しくないで、音圧のジャンプ量 $[p(\mathbf{x}, t)]$ を次式で定義する。

$$[p(\mathbf{x}, t)] = p^+(\mathbf{x}, t) - p^-(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

本研究で基礎とする超特異境界積分方程式に関しては、音圧 p と式(1)の q を境界 S_f における境界変数と考え、式(2)の q^+ (以

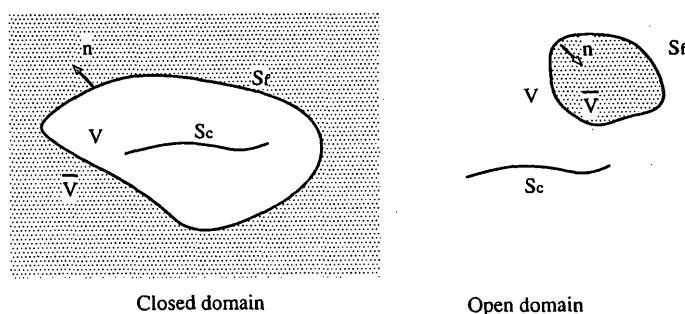
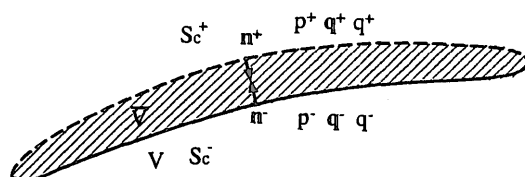


Fig. 1: Model of coupling systems

Fig. 2: Thin boundary S_c

後 q と記す) と式 (3) の $[p]$ を境界 S_c における境界変数と考える。

さて、音場の支配方程式をラプラス変換形で表すと

$$\nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}, s) - \frac{s^2}{C^2} \hat{p}(\mathbf{x}, s) = 0 \quad (4)$$

となる。ここで ∇^2 はラプラシアン、 C は音速、 s はラプラス変換のパラメータ、また $\hat{\cdot}$ はラプラス変換を施した量であることを表す。境界積分方程式を導出するために重み付き残差法を適用して Green の公式を用い、基本解 $\hat{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ($\mathbf{x}'$ はソース点) を重み関数として用いると次式が求まる。ただし S_c は S_c^+ を表す。

$$c(\mathbf{x}') \hat{p}(\mathbf{x}') = \int_{S_f} [\hat{q}(\mathbf{x}) \hat{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \hat{p}(\mathbf{x}) \hat{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] dS(\mathbf{x}) - \int_{S_c} [\hat{p}(\mathbf{x})] \hat{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dS(\mathbf{x}) \quad (5)$$

ここで $c(\mathbf{x}') = 0 (\mathbf{x}' \in \bar{V}), 1 (\mathbf{x}' \in V)$

また、 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', r = |\mathbf{r}|$ として

$$\hat{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^{-\frac{s}{C}r}}{4\pi r}, \quad \hat{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{e^{-\frac{s}{C}r}}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{sr}{C}\right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}$$

である。いま式 (5) において、 $\mathbf{x}' \in V$ なる $\mathbf{x}'$ を境界 S 上に移行し、境界外向きの単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x}')$ で微分すると最終的に次のような超特異境界積分方程式が求まる。

$$c(\mathbf{x}') \hat{q}(\mathbf{x}') = \text{p.f.} \int_{S_f} \left(\hat{q}(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}')} - \hat{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}')} \right) dS(\mathbf{x}) - \text{p.f.} \int_{S_c} [\hat{p}(\mathbf{x})] \frac{\partial \hat{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}')} dS(\mathbf{x}) \quad (6)$$

ここで $c(\mathbf{x}') = 1/2 (\mathbf{x}' \in S_f), 1 (\mathbf{x}' \in S_c)$ であり、式 (6) 中の $\mathbf{n}(\mathbf{x}')$ に関する微分項を具体的に示すと次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}')} &= \frac{e^{-\frac{s}{C}r}}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{sr}{C}\right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}')} \\ \frac{\partial \hat{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}')} &= \frac{e^{-\frac{s}{C}r}}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{r^3} + \frac{s}{Cr^2} \right) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3}{r^3} + \frac{3s}{Cr^2} + \frac{s^2}{C^2 r} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}')} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここでいま、式 (6) を図心に節点を持つ三角形一定要素を用いて離散化する。境界 S_c を N_c 個の、境界 S_f を N_f 個の境界要素に要素分割すると、式 (6) の境界積分方程式は次のように、 $(N_c + N_f)$ 元のマトリックス表示された連立方程式に帰着できる。

$$\left. \begin{aligned} [\hat{H}_{cc}]\{\hat{p}\} + [\hat{H}_{cf}]\{\hat{p}\} &= -[\hat{I}_{N_c}]\{\hat{q}_c\} + [\hat{G}_{cf}]\{\hat{q}_f\} \\ [\hat{H}_{fc}]\{\hat{p}\} + [\hat{H}_{ff}]\{\hat{p}\} &= [\hat{G}_{ff}]\{\hat{q}_f\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

なお、上式中のマトリックスの詳細については省略する。以上の式 (8) を解いて境界値が求まれば、内点の音圧 $\hat{p}(\mathbf{x}')$ は式 (5) より、また流束ベクトル $\hat{q}(\mathbf{x}')$ の各成分は式 (5) を任意の方向の単位ベクトルで微分した式より求められる。

次に有限要素法による薄板構造解析について述べる。まず平板の面外振動については面積座標による三角形板曲げ要素⁽²⁾を用い、また面内振動については三角形膜要素を用いて、これらを合成することによって板厚の薄い一般的な薄板構造物をモデル化する。なお有限要素法に基づくこれらの手法は広く用いられているので、これ以上の記述は割愛する。

ついで、音響・構造連成系を解析するためには、連成条件として両者の境界において力の平衡条件と流束の適合条件を考慮する必要がある。まず平衡条件は

$$\{\hat{\mathbf{F}}\} = [\mathbf{R}]\{\hat{\mathbf{p}}\} + \{\hat{\mathbf{F}}'\} \quad (9)$$

と表される。ここで $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ は全体座標系の節点力、 $[\mathbf{R}]$ は単位分布荷重に対する節点力を導出するマトリックス、 $\{\hat{\mathbf{F}}'\}$ は音圧以外の加振力による節点力を表す。なお節点は三角形有限要素の各頂点に位置する。ついで適合条件は ρ_a を空気密度として次式で表されるものとする。

$$\{\hat{q}_c\} = -\rho_a s^2 [\mathbf{S}]\{\hat{\delta}\} \quad (10)$$

ここで $\{\hat{\delta}\}$ は構造物の節点変位、 $\{\hat{q}_c\}$ は境界 S_c における一定境界要素の流束の法線方向成分であり、 $[\mathbf{S}]$ は節点変位より各境界要素の面外方向成分を導出するマトリックスであって、この導出にあたっては音響解析では一定要素を用いていることから、三角形要素内の変位 w の平均値をもって図心の変位とみなす近似を行うことにより得られるものである。

以上の諸関係式を用いてラプラス変換領域での解を求め、これを数値ラプラス変換することにより時刻歴応答を求める。数値的に逆ラプラス変換を行う手法はいくつか存在するが、数値的にラプラス変換を行うことができるのは Wilcox が示した手法⁽³⁾のみであり、本研究でもこの手法を用いる。これらの変換対は次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(n\Delta\omega) &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-\gamma k \Delta t} e^{-2\pi i k n / N} \\ f(k\Delta t) &= \frac{e^{\gamma k \Delta t}}{2\pi} \cdot \Delta\omega \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}(n\Delta\omega) e^{2\pi i k n / N} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで Δt は時間刻み、 $T = N \Delta t$ は考慮する時間長さであり、また $s = \gamma + i\omega$ ($i = \sqrt{-1}$) とおける。正の定数 γ は任意にとることができるが、数値逆ラプラス変換の解の安定性に大きく影響するパラメータであり、本研究では Wilcox に従い $\gamma = 2\pi/T$ とおいた。なお式 (11) は離散フーリエ変換対と同様な形であるので、FFT の手法を利用することが可能であり、時間分割数 N を 2 のべき乗にとれば計算を効率よく行うことができる。

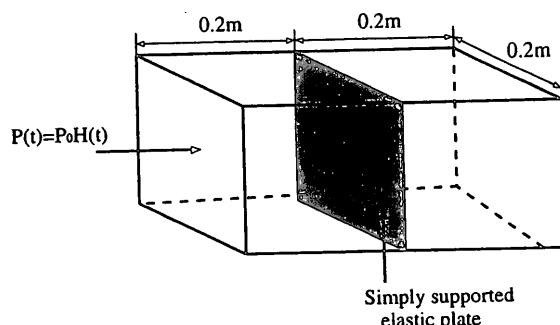


Fig. 3: Analytical model

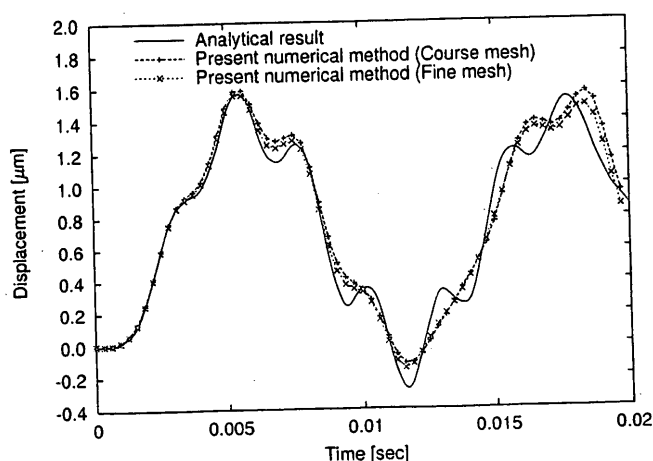


Fig. 4: Comparisons of results

3. 解析手法の妥当性の検証

3.1 解析解との比較 図3に示すような剛体板で囲まれた音場の中央に四辺単純支持弾性板がおかれた系の一端面に、 $p_0 = 1.0\text{Pa}$ の音圧が一様にステップ状に加わる場合の弾性板の中心におけるたわみ変位の解析解と本解析手法による時刻歴応答を比較したのが図4である。弾性板の厚さは0.91mmで、材料は黄銅を想定している。なお、本数値解析においては、系の対称性を利用して1/4部分のみをメッシュ分割し、鏡像原理を用いて解を求めた。解析解と本数値解析結果の傾向はよく一致しており、本解析手法の妥当性が確かめられた。

3.2 実験との比較 図5に示すように、平面波平面駆動型スピーカで正方形断面開放音響管の内部に一边を固定して取付けた板厚0.4mm、幅40mmのりん青銅平板をステップ状に加わる正弦波で音響加振する実験系を考える。なお、加振周波数としては片持ち弾性板単体としての1次および2次の固有モードについて、実験では自由振動実験により同定された、また解析では有限要素法解析から求める固有振動数で加振する。図6(a)に示す1次モードでは、板長さ50mmで実験では $f = 95.97\text{Hz}$ 、解析では99.83Hzであり、図(b)に示す2次モードでは板長さ105mmで実験では $f = 139.4\text{Hz}$ 、解析では138.9Hzである。解析においてスピーカ面の境界条件は流れ束 q で与え、 $q = 80.55 \sin(2\pi ft)H(t) [\text{kg}/(\text{m}^2\text{s}^2)]$ ($H(t)$ はステップ関数)とおいた。なお実験においてはスピーカアンプへの入力電圧とスピーカ面の加速度振幅の関係を微小加速度計をスピーカ面のバルサ材に取付けることによりあらかじめ較正した。板固定部から42mmの位置の板中央の変位応答を比較したのが図7(1次モード)と図8(2次モード)である。振幅が線形的に増大していく定性的傾向が解析結果と実験結果でよく一致しており、定量的にもほぼ一致していることがわかる。これより本解析手法の妥当性が実験により確かめられた。

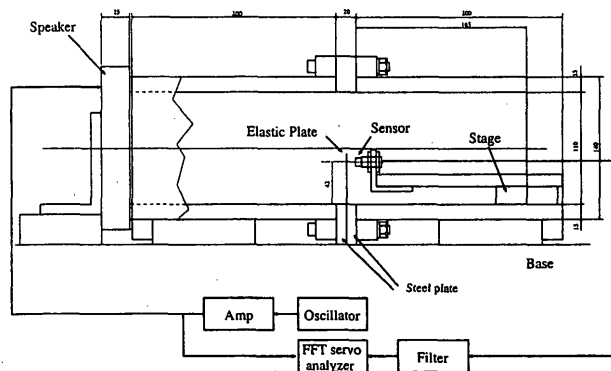


Fig. 5: Experimental set-up

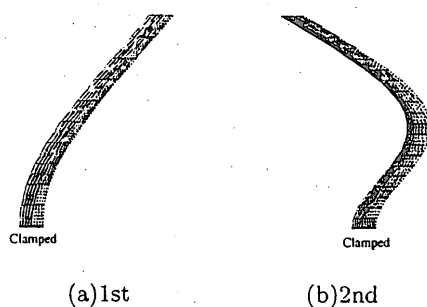
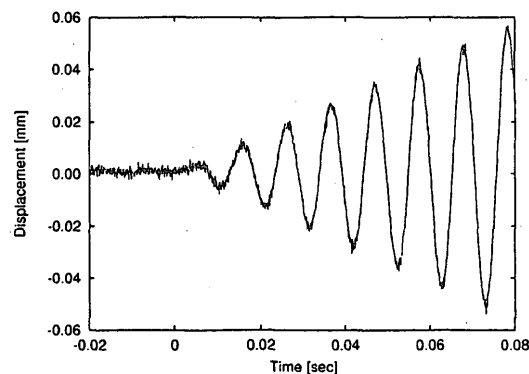


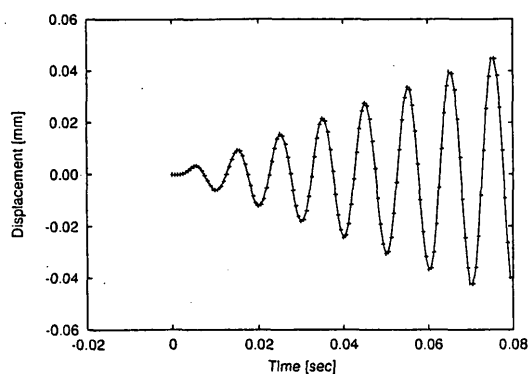
Fig. 6: Mode shapes

4. 数値解析例

図9のようにダクトを模擬した弾性平板からなる開放音響管の一端面に、 $p(t) = p_0 \sin(\omega t)H(t)$ ($p_0 = 1.0\text{Pa}$, $\omega = 2669\text{rad/s}$)

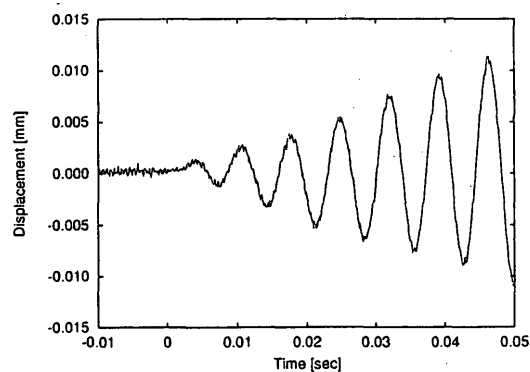


(a)Experiment

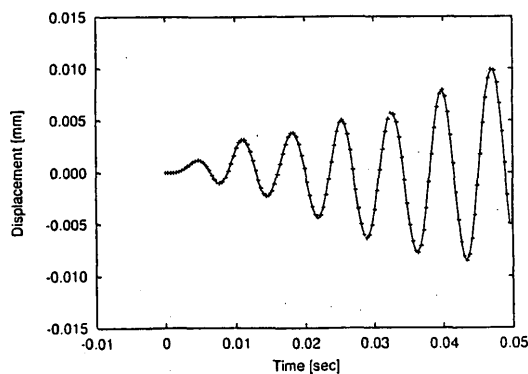


(b)Theory

Fig. 7: Comparisons of results(1st)



(a)Experiment



(b)Theory

Fig. 8: Comparisons of results(2nd)

の非定常音圧を加えたときの音響管の中央横断面 (1/2 部分) における管内音圧と管の外への透過音圧変動を視覚的に示したのが図 10 である。なお弾性板の板厚は 0.1mm とし、材料はステンレスを想定している。時間の経過と共に音が管外に透過して行く様子がよくわかる。次に図 11 に示すように、三方を剛体壁で仕切られた L 型ダクト (板厚と材質は前の例と同じ) が前の例と同様なステップ状に立上がる正弦波音圧で非定常励振されるとき $z = 0.2\text{m}$ の面における音圧変動を視覚的に示したのが図 12 である。音場と構造系が連成し、透過音等の挙動も数値解析でよく追えていることがわかる。

5. 結言

音響解析には超特異積分方程式に基づく境界要素法を、構造物解析には有限要素法を適用して、これらの方程式系を連成条件を考慮した上でラプラス変換領域において解き、これを数値的に逆ラプラス変換を行うことにより任意の非定常入力に対する全体系の時刻歴応答を求める解析手法を提示し、解析解および実験結果と比較することにより本数値解析手法の妥当性を確かめた。

最後に、本研究を行うにあたり、有益な御助言を頂いた現京都大学大学院博士課程の高橋徹氏に謝意を表します。

文献

- (1) 高橋徹, 境界要素法による音響・構造連成系の非定常解析, 東京工業大学修士論文 (1997).
- (2) O.C. ツィエンキーヴツ (吉識・山田監訳), マトリックス有限要素法 (1984), p171, 培風館.
- (3) Wilcox, D.J., Int. J. Elect. Engng. Educ., Vol.15 (1978), 247-265.

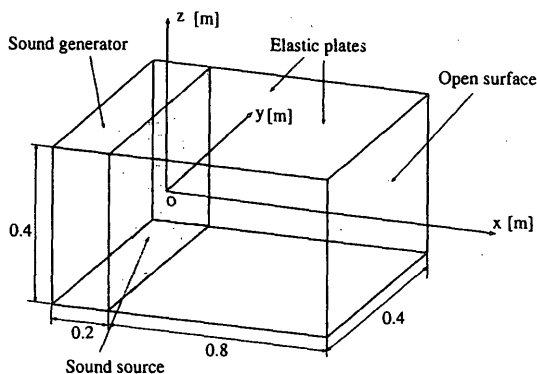


Fig. 9: Model of straight duct

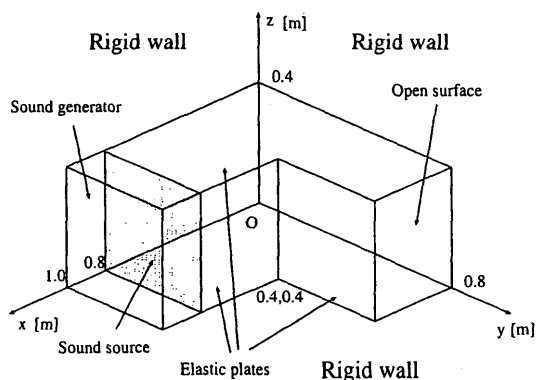


Fig. 11: Model of L-shaped duct

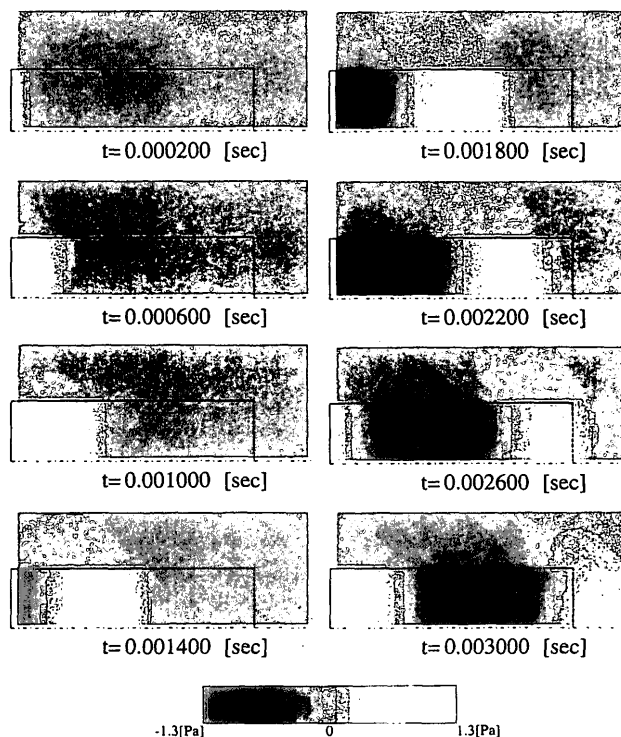


Fig. 10: Transition of sound pressures (Straight duct)

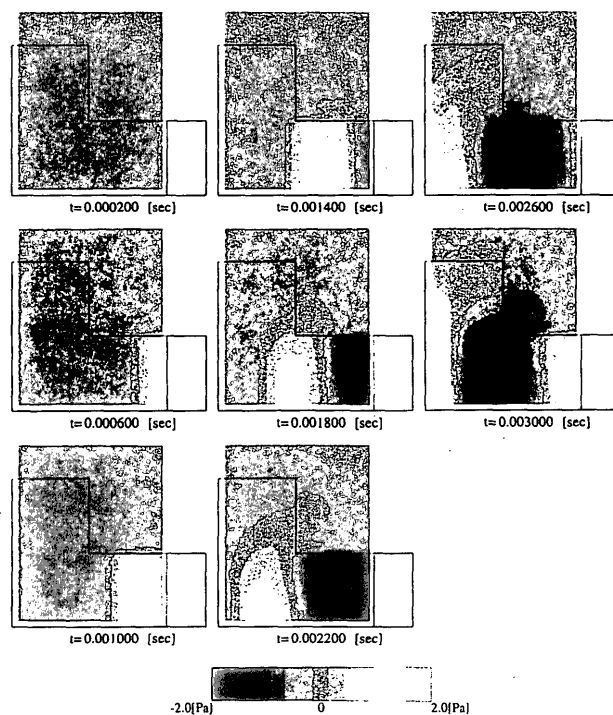


Fig. 12: Transition of sound pressures (L-shaped duct)