

## 207 片持はりの近接場における音圧分布の解析と測定

## Sound Pressure Distribution in the Near Field of a Cantilever in Resonance

○正 村上 新 (島根大) 正 池田 隆 (島根大)

Shin MURAKAMI, Shimane University, Nishikawatsu-cho 1060, Matsue, Shimane  
Takashi IKEDA, ibid.

The sound pressure distribution in the near field of a baffled cantilever in resonance is numerically analyzed and experimentally measured. As a result, it is shown that the distribution has a different pattern depending on the order of the vibration mode and the ratio of sound wave length to the cantilever length. The radiation efficiency increases with the order of mode in the case of the identical cantilever. On the contrary, it decreases lower with the order of mode when the ratio of wave length to the cantilever length is constant. In experiments, the numerical results of sound pressure distribution were in good agreement with the experimental results.

**Keywords:** Sound pressure distribution, Near field, Cantilever, Vibration mode, Cancellation, Sound abatement

## 1. 緒 言

我々の身のまわりには家電製品をはじめとして多くの機械が存在している。近年、技術の向上や環境問題に対する意識が向上するにつれ、機械の多くに静粛性が求められるようになってきた。

この問題に関して筆者らはこれまで、ファクシミリの紙切り装置を構成するフレームの振動モードと低騒音化に関する研究<sup>(1)</sup>、およびファクシミリのフレームをモデル化した両端固定支持はりの音圧分布の研究<sup>(2)</sup>を行った。前者<sup>(1)</sup>では、フレームに短形穴を開けることによって、フレーム表面のモード形状が、表面全体が同位相で振動する形状から、波打つ形状に変化したことから、振動モードの形状が騒音低減に寄与していると予測した。後者<sup>(2)</sup>では、対称性のある両端固定支持はりの高次モードの振動状態では、振動モードの腹が交互に現れるため、逆位相の腹部から放射される音圧が打ち消し合い、はり周辺の音圧が低減されることを明らかにした。

本研究では、既報<sup>(2)</sup>の両端固定支持はりとは異なり、対称性のない片持はりを対象とする。このはりの近接場における音圧分布とモード形状の関係を数値計算と実験により求めるとともに、音の波長を代表長さとする無次元化を行い、モード形状のみに依存する無次元音圧を導入して、無次元表示の音圧分布を求めた。さらに、はりの長さとの比を一定にした場合の音響放射効率を求めることにより、音響放射に対するモード形状の影響を調べた。

## 2. 理論解析

図1に、片持はりの理論解析モデルを示す。はりの寸法は長さ  $l$  [m]、幅  $b$  [m]、厚さ  $h$  [m] とし、このはりの上面の固定端側の一角を原点  $O$  とし、長手方向を  $x$  軸、幅方向を  $y$  軸、厚さ方向を  $z$  軸とする  $O$ - $xyz$  座標系を考える。はりはねじれることなく  $z$  方向に振動するとし、はり表面上の各点の  $z$  方向の振幅は、 $x$  座標にのみ依存すると仮定する。はりは無限の大きさをもつバフル板によって囲まれているとし、 $n$  次の固有振動数  $\omega_n$  [rad/s] と等しい振動数を持つ正弦外力が加えられ、ある一つの固有モードの振動が大

きく発生する共振状態にあるとする。このとき、空間中の任意の点  $P(x, y, z)$  の音圧  $p$  [Pa] は次式となる<sup>(3)</sup>。

$$p = \rho_a \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\rho_a$  は空気密度である。また、 $\phi$  は速度ポテンシャルであり、次式で表される。

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\xi(x)}{r_s} e^{-j(\omega_n t - k_n r_s)} dS \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $dS$  は図1に示すはり表面上の微小面積、 $\xi(x)$  はその  $z$  方向の速度の振幅、 $r_s$  は微小面積  $dS$  と点  $P$  間の距離、 $k_n$  は波数 ( $k_n = \omega_n/c$ , ただし、 $c$  は音速を表す) である。また、2重積分は、片持はりの全表面に関する積分を表す。片持はりの場合、 $n$  次モードで振動するはりの振幅  $\xi_n(x)$  は、

$$\xi_n(x) = C_n D_n [\delta_n (\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)) - \psi (\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x))] \dots \dots \dots (3)$$

となる。ここに、 $C_n$  は片持はりの最大振幅で、 $D_n$  は式(3)の  $[\ ]$  内の最大値の逆数であり、はりの最大振幅の値が  $C_n$  になるようにするための係数である。また  $\delta_n = \sin(\beta_n l) + \sinh(\beta_n l)$ 、 $\psi_n = \cos(\beta_n l) + \cosh(\beta_n l)$  であり、 $\beta_n$  ははりの振動数方程式から求まる定数で、片持はりの場合、 $\beta_n l \approx 1.875, 4.694, 7.855, 10.996, 14.137, \dots$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) となる。はりが振動数  $\omega_n$  で共振状態にあるため、 $\xi_n(x) = j\omega_n \xi_n(x)$  となり、

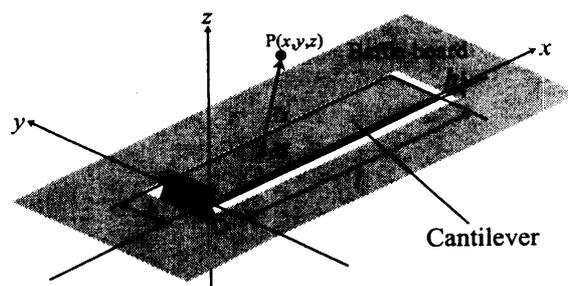


Fig. 1 Model for analysis

点 P における音圧  $p$  は式 (1)~(3) より次式となる.

$$p = \frac{-\omega_n^2 \rho_a C_n}{2\pi} \iint_S [D_n \{\delta_n \{\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)\} - \psi \{\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x)\}\} / r_s] e^{j(\omega_n t - k_n r_s)} dS \dots (4)$$

後述するように、高次のモード振動における逆位相で振動する腹からの音波の打ち消し合いは、はりの長さ  $l$  と音の波長の比に大きく依存する. そこで、音の波長  $\lambda$  を代表長さとして、点 P の座標  $(x, y, z)$ 、はりの長さ  $l$  など、音圧分布の形状に關与する量を次式のように無次元化する.

$$\left. \begin{aligned} x' &= x/\lambda, & y' &= y/\lambda, & z' &= z/\lambda, & l' &= l/\lambda, \\ r'_s &= r_s/\lambda, & \beta'_n &= \beta_n \lambda, & k'_n &= k_n \lambda \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

これらを導入して音圧  $p$  を求め、 $\lambda = c/f_n = c \cdot 2\pi/\omega_n$  の関係を用いて整理すると次式を得る.

$$p = -\omega_n \rho_a C_n c \iint_S [D_n \{\delta_n \{\cos(\beta'_n x') - \cosh(\beta'_n x')\} - \psi \{\sin(\beta'_n x') - \sinh(\beta'_n x')\}\} / r'_s] e^{j(\omega_n t - k'_n r'_s)} dS' \dots (6)$$

式 (6) のうち、2重積分の外に掛かっている係数は振動数や振幅に依存する項であり、2重積分で表される部分はモード形状のみに依存する項である. モード形状による音圧分布の影響を調べるため、本研究ではこのうち2重積分の部分を無次元音圧と呼び、それを  $p'$  で表して以下のように定義する.

$$p' = \frac{p}{\omega_n \rho_a C_n c} \dots (7)$$

一方、はりの振動に伴って振動する空気のエネギーが音響放射パワーに変換される効率、すなわち音響放射効率  $\sigma$  は次式で与えられる<sup>(4)</sup>.

$$\sigma = \frac{W}{\rho_a c A \langle \bar{v}^2 \rangle} \dots (8)$$

ここに、 $W$  は音響放射パワーであり、図 2 に示すはりを囲む半径  $r_c$  の半球面上の音響パワーを半球の表面積に関して積分したものであり、

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|p|^2}{2\rho_a c} r_c^2 \sin \theta d\theta d\varphi \dots (9)$$

で表される. また、式 (8) 中の  $A$  ははりの面積であり、 $\langle \bar{v}^2 \rangle$  ははりの表面速度  $v (\equiv \xi(x)e^{j\omega t})$  の 2 乗空間平均を表し、次式で与えられる.

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{1}{2l} \int_0^l \xi^2(x) dx \dots (10)$$

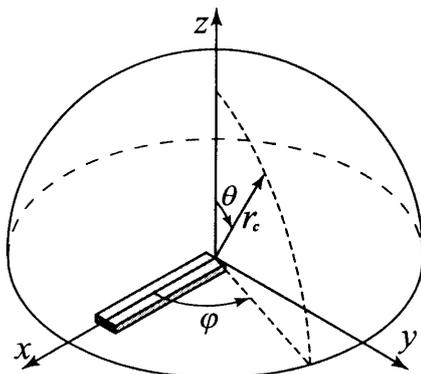


Fig. 2 Hemisphere surrounding a cantilever

### 3. 数値計算例

図 3 (a)~(d) に 1 次, 3 次, 4 次, 5 次モードに対する  $xz$  平面上の音圧分布の計算例を示す. 後述の実験装置にあわせ、はりの長さ  $l = 300$  [mm], 幅  $b = 50$  [mm], 厚さ  $h = 4.5$  [mm], 密度  $\rho_b = 7860$  [kg/m<sup>3</sup>], ヤング率  $E = 206$  [GPa] とした. 式 (4) では  $c = 343.59$  [m/s],  $\rho_a = 1.20$  [kg/m<sup>3</sup>] を用いた. また、はりの振幅は最大振幅  $C_n = 0.1$  [mm] とした. 計算は B-spline 2 次補完式による数値積分によって行い、SPL 値を等高線で示した. 図 3 中の  $x$  軸において  $0 \leq x \leq 0.3$  の範囲が太く描かれているのは、はりの存在する範囲を示している. これまでの研究により、モード次数が高い場合、逆位相の振動の腹が交互に現れるため、音の打ち消し合いが生じて音響放射が低減されると考えられてきた. しかし、図 3 (a)~(d) を観察すると、振動の節の近傍に関しては音圧低減効果が現れているが、腹の近傍に関しては、次数が上がるにつれて音圧の高い領域が遠くまで広がっていることがわかる.

この原因を明らかにするため、表 1 に各モードの固有振動数  $f_n$  [Hz] とその振動数における音の波長  $\lambda_n$  [m], およびはりの長さに対する音の波長の比  $\lambda_n/l$  を示す. ここで、5 次モードに注目すると、波長比  $\lambda_5/l = 0.48$  であることから、音の波長ははりの長さのほぼ半分である. 一方、5 次モードでは振動の腹が 5 つ存在するため、その間隔はほぼ  $l/5 = 0.2l$  となる. この距離は音の波長  $\lambda_5 = 0.48l$  の半波長に近いから、隣り合う逆位相の腹から放射される音圧は、それぞれの腹の近傍で互いに強めあうことになる. このことにより、図 3 (d) に示すように、他のモードに比べて広い範囲にわたって音圧が高くなるのがわかる.

以上より、はりの長さ  $l$  と音の波長の比  $\lambda_n/l$  は高次モードの音の打ち消し合いの効果に大きく影響することがわかる. したがって、この影響を取り除き、振動モード形状のみの影響を調べるためには、式 (7) で定義した無次元音圧  $p'$  の分布を考える必要がある.

図 4 (a)~(c) に、それぞれ 3 次, 4 次, 5 次モードに対する無次元音圧分布を示す. 図 4 (a) は図 3 (b) を無次元表示した

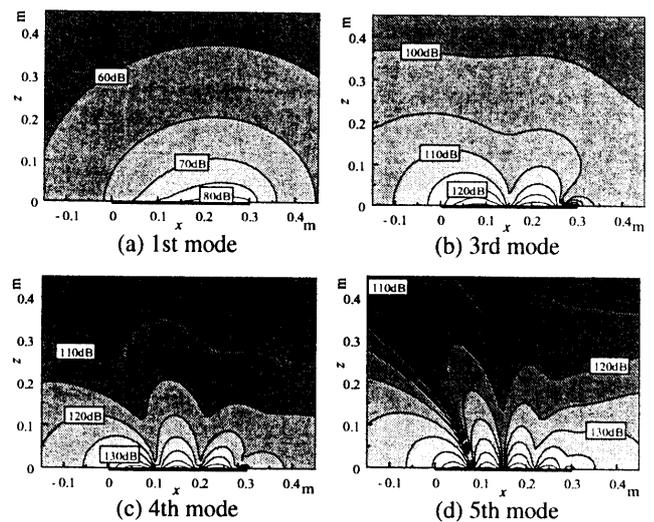


Fig. 3 Sound distribution (numerical)

Table 1 The natural frequencies and the sound wave length of the air

Order of mode	1st	2nd	3rd	4th	5th
Frequency $f_n$ [Hz]	41.35	259.1	725.6	1422	2350
Wave length $\lambda_n$ [m]	8.31	1.33	0.474	0.242	0.146
$\lambda_n/l$	27.7	4.42	1.58	0.807	0.48

ものであり、図4(b),(c)は $\lambda_n/l = \lambda_3/l$ を満たし、後述の実験装置によって実験可能な条件での無次元音圧分布を示す。図の右側に各モードにおけるはりの寸法、および固有振動数などの条件が示してある。図の等高線は、式(7)によって得られた値をdB表示したものである。これらの図において、例えば-40dBを表す曲線に注目すると、モード次数が上がるにつれその範囲がはりに近づくように狭まっている。したがって、音の波長とはりの長さの比が一定の場合、モード次数の増加が音響放射の低減につながる事がわかる。

図5に、図3と同じ条件、すなわちはりの寸法が一定の場合の式(8)から数値的に求めた音響放射効率 $\sigma$ を示す。横軸に図2で示した半球面の半径 $r_c$ 、縦軸に音響放射効率 $\sigma$ が示してある。この計算例では、 $r_c$ によらず $\sigma$ はほぼ一定である事がわかる。次数による $\sigma$ の変化を見ると、次数が高いほど音響放射効率 $\sigma$ が高いという結果となり、図3

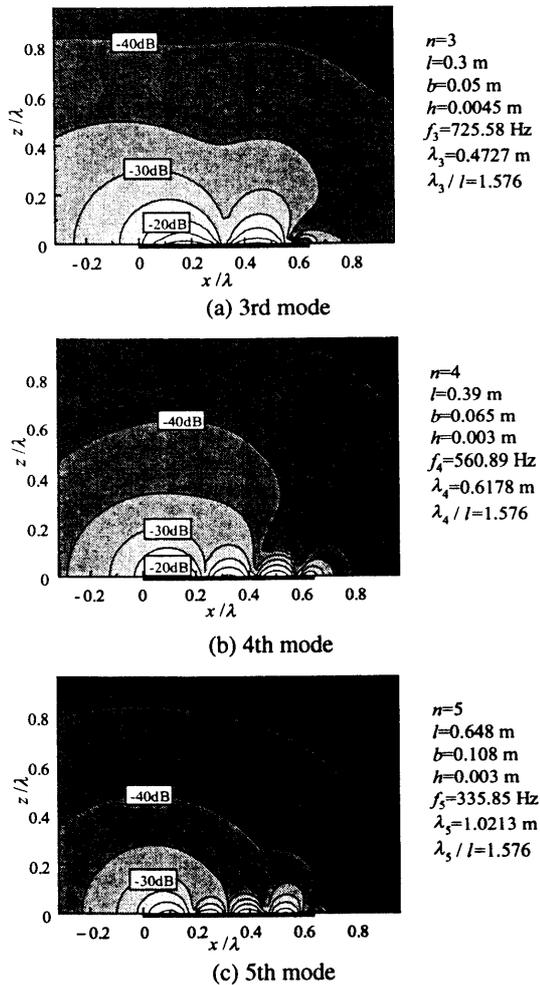


Fig. 4 Non-dimensional sound distribution (numerical)

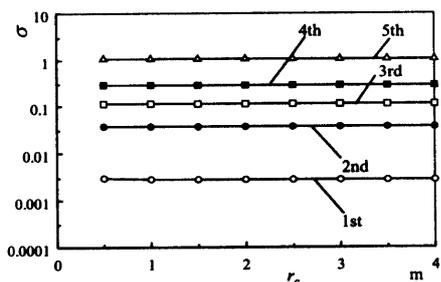


Fig. 5 Radiation efficiency of a cantilever

で示した実次元における音圧分布の結果と一致するが、これまでの予測とは異なる。この理由は、前述したモードによる音波の波長の違いが原因であると考えられる。

図6(a),(b)に、 $\lambda/l = 0.1, 10$ に固定した場合の音響放射効率 $\sigma$ を示す。横軸に半球面の半径の無次元量 $r_c/\lambda$ 、縦軸に $\sigma$ を示した。図6(a)に示した $\lambda/l = 0.1$ の場合では、 $r_c/\lambda$ が小さいところで多少値が変化するが、 $r_c/\lambda \geq 5$ の範囲では $\sigma$ はほぼ一定になる事がわかる。モードによる音響放射効率の違いはほとんど無いが、詳しく見ると、次数が上がるほど音響放射効率 $\sigma$ が大きくなっている。一方、図6(b)の $\lambda/l = 10$ の場合では、音響放射効率 $\sigma$ はほぼ一定であり、モード次数が高いほど $\sigma$ の値は小さくなる事がわかる。

図7(a),(b)に、図6(a),(b)のいずれの場合も音響放射効率 $\sigma$ がほぼ一定の値となる半径 $r_c/\lambda = 10$ において、音の波長とはりの長さの比 $\lambda/l$ を横軸にして描いた音響放射効率 $\sigma$ の変化を示す。図7(a)より、 $\lambda/l$ が大きければ、モード次

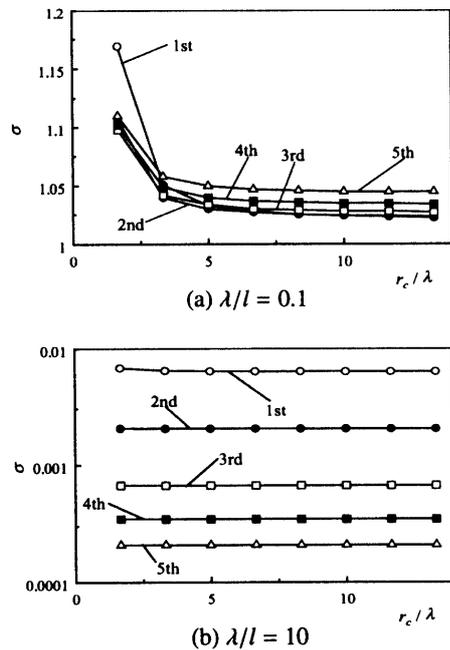


Fig. 6 Radiation efficiency vs  $r_c/\lambda$  ( $\lambda/l = \text{const.}$ )

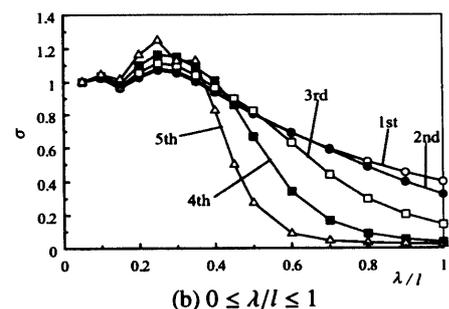
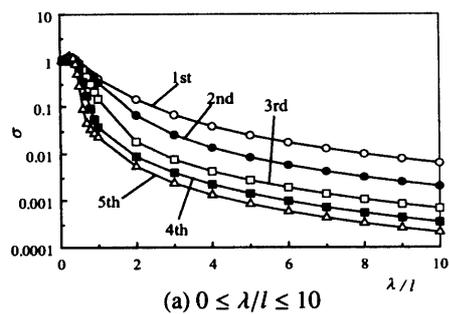


Fig. 7 Radiation efficiency vs  $\lambda/l$  ( $r_c/l = 10$ )

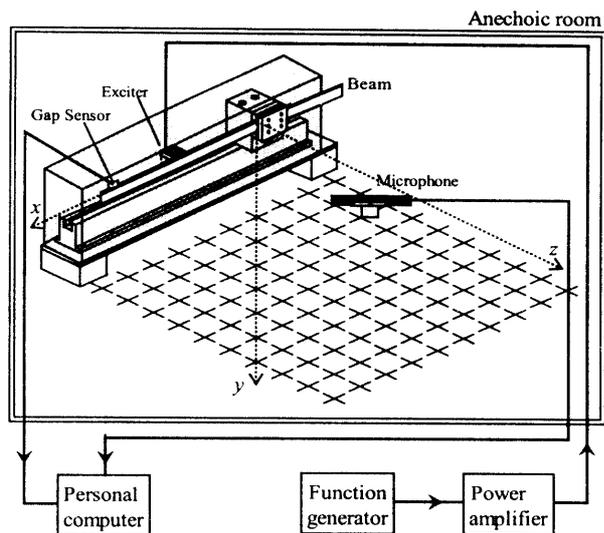


Fig. 8 Experimental rig

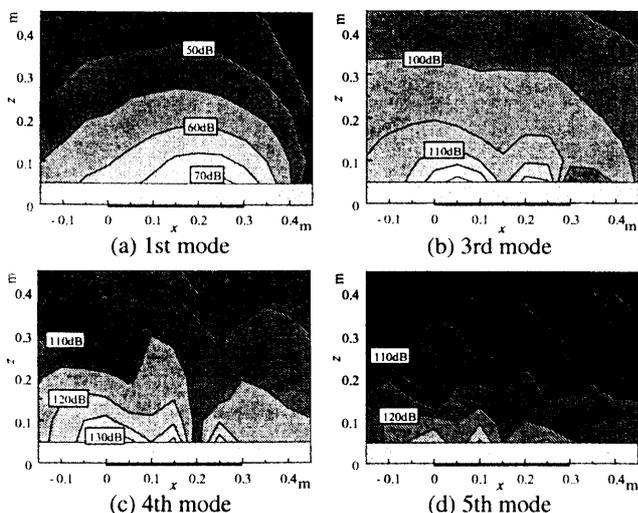


Fig. 9 Sound Distribution (experimental)

数が高いほど音響放射効率が小さく、モードの高次化が音響放射低減に寄与することがわかる。さらに、 $\lambda/l < 1$  の範囲を拡大した図 7(b) より、 $\lambda/l > 0.7$  の範囲では音響放射効率はモード次数の順に小さくなる。したがって、 $\lambda/l > 0.7$  となるように機械等を設計することにより、高次モードの隣り合う振動の腹から放射される音の打ち消し合いを利用して騒音が低減できることがわかる。

#### 4. 実験

図 8 に実験装置を示す。実験は無響室内で行った。はり は剛な台に取り付けられ、はりの周りを箱で囲ってパル とした。電磁石によってはりを振動させ、ギャップセンサ によってはりの振幅を計測した。周辺に放射される音の音 圧は、マイクフォンを図 8 で示した  $xz$  平面内の格子状で 移動させ測定した。それらの測定結果を、マルチアナライ ザで FFT 解析し、そのデータよりモード形状の音圧分布に 対する影響を調べた。

図 9 (a)~(d) に、理論解析の図 3 (a)~(d) に対応する測定 結果を示す。図中のはり近傍の斜線部は、実験装置の構造

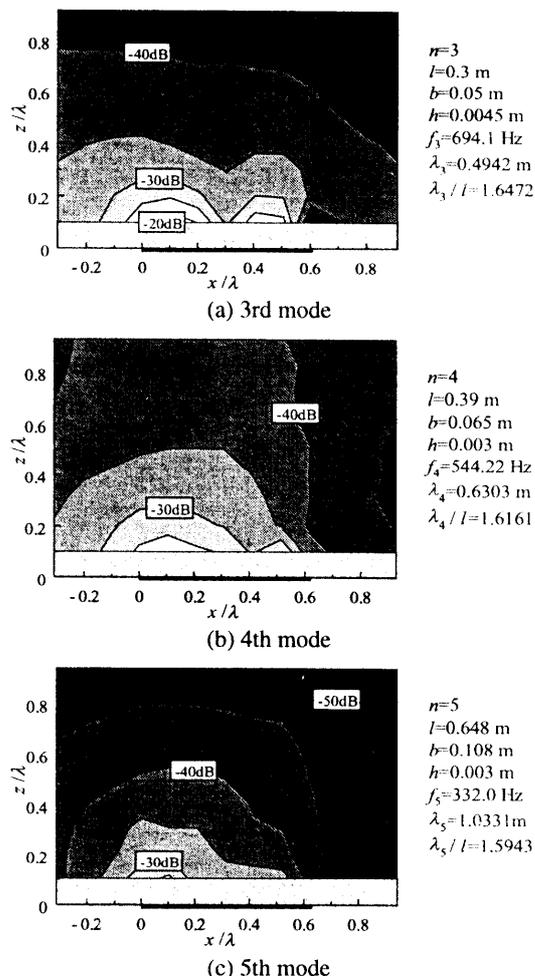


Fig. 10 Non-dimensional sound distribution (experimental)

上測定が不可能だった領域である。音圧分布は理論解析結果と比較的によく一致していることがわかる。

図 10 (a)~(c) に、理論解析の図 4 (a)~(c) に対応する測定 結果を示す。こちらも、理論解析結果とほぼ一致している。

以上のことから、理論解析によって得られた結論は実験 により妥当であることが確認された。

#### 5. 結 言

振動する片持はりの近接場における音圧分布を数値計算 と実験により求めた結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 音の波長  $\lambda$  とはりの長さ  $l$  の比  $\lambda/l$  が 0.7 より大きい 場合、モード次数が高いほど、逆位相の腹から放射される 音の打ち消し合いの度合いが大きくなり、音響放射が低減 される。
- (2) 実験によって測定された音圧分布は数値計算結果と 定量的にほぼ一致し、理論解析結果の妥当性が確認された。

#### 文 献

- (1) 村上・池田・加藤・仲佐・中尾・佐藤, 日本音響学会騒音振 動研究会資料, N - 2000-45 (2000), pp.1-6.
- (2) 池田・村上・堀, 機構論 01-7 (2001), pp.235-238.
- (3) 鈴木・丸山・西田・渡辺, 「音響・振動学」, pp152-175, サイ エンス社.
- (4) 久保田, 機論, 56-528, C(1990), pp.2172-2177.