

228 時間遅れを含む非線形振動系における分岐集合 (平均法による基本調波振動の解析)

Bifurcation of Nonlinear System With Time Delay (Analysis of Fundamental Harmonic Response by Averaging Method)

○学 渡辺 信一 (宇都宮大院), 正 佐藤 啓仁 (宇都宮大), 正 吉田 勝俊 (宇都宮大)

Shinichi WATANABE, Utsunomiya University, 7-1-2, Yoto, Utsunomiya-shi, Tochigi,
Keijin SATO, Utsunomiya University and Katsutoshi YOSHIDA, Utsunomiya University

This paper studies bifurcation set of a nonlinear system with time delay. It is known that it is difficult to investigate this system by analytical methods, because this system is described by a difference-differential equation which is usually difficult to solve. To analyze this kind of a system, we have already introduced an averaging method for the functional differential equation. The previous work showed that this averaging method is effective for nonlinear system with time delay. Applying this averaging method, this paper studies bifurcation set of this kind of a system with a fundamental harmonic response. The result shows that this system have another bifurcation which a system with no time delay does not have. Furthermore, it is shown that the Hopf bifurcation point and another bifurcation point are derived from a saddle-node bifurcation point.

Key Words: Nonlinear Vibration, Time Delay, Averaging Method, Bifurcation

1. 結 言

時間遅れを含む振動系の運動方程式は微分差分方程式で記述され、その特性方程式には超越項が含まれるために特性根さえ求めることが困難である。このような問題に対して筆者らは関数微分方程式系に対する平均法を適用することを提案してきた⁽¹⁾⁽²⁾。この平均法は時間遅れ項に関して厳密な数学的定式化を含んでおり、その近似解は常微分方程式で記述されるという特徴がある。本研究では時間遅れを含む非線形振動系に関数微分方程式系に対する平均法を適用し基本調波振動に関する平均化方程式より分岐集合を求める。

2. 時間遅れを含む非線形振動系

本研究では、滑り軸受で支持された非対称軸剛性を有する1自由度のロータ系を取上げる。この系の運動方程式は次式のようにになる。 h は遅れ時間である。

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) - \gamma x(t) + (\gamma - \alpha)x(t - h) + \beta x^3(t - h) + P \cos \Omega t \cdot x(t) = P \cos \Omega t \quad (1)$$

3. 関数微分方程式系に対する平均法

関数微分方程式系に対する平均法について述べる。連続関数 $\mathbf{C}$ の空間上で定義される系を次式に示す。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{U}\mathbf{x}(t) + \mathbf{V}\mathbf{x}_h(t) + \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}_h(t)) \quad (2)$$

$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{x}(t - h)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_h \in \mathbf{C}$, $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ は $n \times n$ 定数行列, h は遅れ時間, $\varepsilon (\geq 0)$ は微小パラメータとする。非線形摂動項 $\mathbf{f}$ は n 次元ベクトル関数で, t に関して概周

期的であり, $x(t), x_h(t)$ に関して連続微分可能であるとする。このとき式 (2) の線形自律系は次式となる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{U}\mathbf{x}(t) + \mathbf{V}\mathbf{x}_h(t) \quad (3)$$

式 (3) の張る空間 $\mathbf{C}$ は特性根の実部が零以下である解の空間 $\mathbf{P}$ とその補空間 $\mathbf{Q}$ に直和分解 $\mathbf{C} = \mathbf{P} \oplus \mathbf{Q}$ ⁽³⁾ できる。その際に用いられる内積を次式で定義する。

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_0^{-h} \psi(\xi + h)\mathbf{V}\phi(\xi)d\xi \quad (4)$$

$\psi \in \mathbf{C}$, $\phi \in \mathbf{C}^*$, $\mathbf{C}^*$ は随伴系である。

部分空間 $\mathbf{P}$ の解は極座標変換後次式のような定数変化法より得られる。

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega(t) & -\sin \omega(t) \\ -\sin \omega(t) & -\cos \omega(t) \end{pmatrix} \Psi(0)\mathbf{f} \quad (5)$$

式 (5) を $\omega(t)$ について平均化することが関数微分方程式系に対する平均法である。ここで, $\omega(t) = \Omega t + \theta(t)$, $\Psi(0) = (\Psi^*, \Phi)^{-1}\Psi^*(0)$ であり, $\Phi(\theta)$, $\Psi^*(\theta^*)$ はそれぞれ部分空間 $\mathbf{P}$ とその随伴空間 $\mathbf{P}^*$ の基底である。 $\Psi(0)$ の行列式を Δ と表記する。以上の手法を式 (1) に適用すると平均化方程式は次式となる。

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{\Omega}{\Delta} \left[r \left\{ \varepsilon(\gamma - \alpha) + \frac{3}{4}\beta r^2 \right\} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} - \mu(\gamma - \alpha)r \begin{pmatrix} N \\ -M \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} -p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta \\ p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} f_1(r, \theta, \Omega) \\ f_2(r, \theta, \Omega) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{cases} p_1 = (\gamma - \alpha) \{ (1 - \varepsilon)(\sin \Omega h - \Omega h \cos \Omega h) \\ \quad + \mu \Omega h \sin \Omega h \} \\ p_2 = 2 + (\gamma - \alpha) \{ (1 - \varepsilon) \Omega h \sin \Omega h \\ \quad - \mu(\sin \Omega h - \Omega h \cos \Omega h) \} \\ M = -p_1 \cos \Omega h + p_2 \sin \Omega h \\ N = p_1 \sin \Omega h + p_2 \cos \Omega h \end{cases}$$

4. 局所分岐

本節では定常解が分岐点となる条件を述べる。

4・1 1 対の純虚数の固有値 平均化方程式 (6) の特性方程式から得られる固有値が 1 対の純虚数となる定常解は Hopf 分岐点である⁽⁴⁾。

4・2 単一零固有値 固有値が単一零となる定常解は分岐点となる⁽⁴⁾。5 節で示すように、平均化方程式 (6) の解によく知られた saddle-node 分岐と位相的には saddle-node 分岐と同じで、安定性が逆となる新たな saddle-source 分岐が生じる。その条件を次に示す。

4・2・1 他の固有値の実部が負 次式を満たす単一零固有値の定常解は saddle-node 分岐点である⁽⁴⁾。

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Omega}(r_0, \theta_0, \Omega_0) \neq 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \Omega}(r_0, \theta_0, \Omega_0) \neq 0 \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \theta)}(r_0, \theta_0, \Omega_0) \neq 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \theta)}(r_0, \theta_0, \Omega_0) \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

本研究では saddle-node 分岐点の条件として条件 (7), (8) の他に分岐点の零以外の固有値の実部が負である条件を追加し、次式に示す。

$$\lambda_1 = 0, \quad \text{Re} \lambda_2 < 0 \quad (9)$$

4・2・2 他の固有値の実部が正

$$\lambda_1 = 0, \quad \text{Re} \lambda_2 > 0 \quad (10)$$

となる場合、本研究では saddle-source 分岐と呼ぶこととする。saddle-source 分岐は位相的には saddle-node 分岐と同じであり、時間が逆に発展すると saddle-node 分岐となる分岐である。

5. 数値シミュレーション

4 節の条件を平均化方程式 (6) に適用し、得られた分岐集合を図 1 に示す。saddle-source 分岐点の枝は Ω が大きくなるにつれて $h = 0$ に漸近し、また $(\Omega, h) = (1.2, 0.71)$ 付近で cusp 点となっている。saddle-node 分岐点の枝と saddle-source 分岐点の枝は $(\Omega, h) = (1.7, 0.10), (1.2, 0.42)$ 付近でなめらかにつながっており、この点からは Hopf 分岐点の枝も延びている。

この分岐集合の構造を調べるために図 2 に $h = 0.14$ の時の周波数応答曲線を示す。これより、上側の枝の分岐点が saddle-source 分岐点であることがわかる。また、不安定な領域が上側の枝の周波数の大きい側に存在しており上

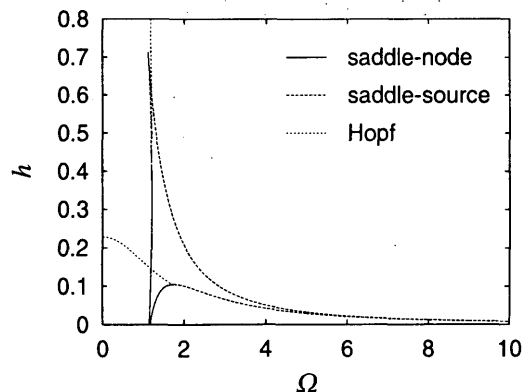


Fig. 1 Bifurcation set

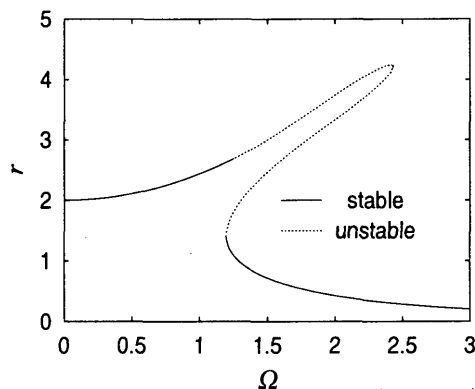


Fig. 2 Frequency response curve ($h = 0.14$)

側の枝の $\Omega = 1.2$ 付近で Hopf 分岐が発生していることがわかる。

6. 結 言

本研究では時間遅れを含む非線形振動系に対して関数微分方程式系に対する平均法を適用し、基本調波振動に関する平均化方程式を求めた。この平均化方程式より分岐集合を求めた結果、時間遅れ系においても saddle-node 分岐や saddle-source 分岐、さらに Hopf 分岐の発生が見られた。saddle-source 分岐点は saddle-node 分岐点から派生する特徴があり、この派生点ではさらに Hopf 分岐の枝も延びている構造が見られた。このように複数の分岐曲線が交差するような分岐点の解析には余次元 2 の分岐のような、より複雑な分岐に対する解析が必要となると思われるがこれについては今後の課題とする。

文 献

- (1) 佐藤啓仁・他 3 名, 時間遅れを含む非線形振動系の動的挙動 (平均法による自励振動の解析), 機論, 61-585, C(1995), 1855-1860
- (2) 佐藤啓仁・他 3 名, 時間遅れを含む非線形振動系の動的挙動 (平均法による強制振動の解析—基本調波振動—), 機論, 61-585, C(1995), 1861-1866
- (3) Jack Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, (1977)
- (4) S. Wiggins, 丹羽敏雄: 非線形の力学系とカオス 下, Springer-Verlag Tokyo, (1992).