

208 非最小位相系に対する安定な非干渉化補償器の一設計法

A design method of stabilizing decoupling controllers for non-minimum phase systems

○学 遠藤 弘樹 (群馬大学), 学 菊地 聡子 (群馬大学), 正 山田 功 (群馬大学)

Hiroki Endo Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma

Satoko Kikuchi Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma

Kou Yamada Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma

Key words: filtered inverse systems, decoupling, state space description

1 まえがき

本稿では, 多入力多出力非最小位相系に対する安定な非干渉制御系の設計法について検討する. 非干渉制御系は, 入力と出力間に一対一対応を確立する制御系である [1]. 非干渉制御系を設計できると, たとえ多入力多出力系であったとしても, 入出力間の相互干渉がなくなり, あたかも一入力一出力の制御問題に帰着され, 制御性能の指定が容易になるという利点がある. そのため, 多入力多出力系に対する非干渉制御問題に対し, 多くの研究が発表されてきた. しかしながら, 非最小位相系に対し, 全状態フィードバック制御と動的フィードフォワード補償器を用いた安定な非干渉制御系の設計法は提案されていない.

本稿では, 全状態フィードバック制御と動的フィードフォワード補償器を用いた安定な非干渉制御系の設計法を提案する.

2 問題の記述

次式で表される m 入力 p 出力の制御対象を考える.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

ただし, $x(t) \in R^n$ は状態変数, $u(t) \in R^m$ は制御入力, $y(t) \in R^p$ は出力, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ である. また, (A, B) 可制御, (C, A) 可観測, $p \leq m$, (1) 式の制御対象の伝達関数を

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

とおいたとき

$$\text{rank } G(s) = p \quad (3)$$

が成り立つと仮定する. また, (1) 式の制御対象は虚軸上に不変零点を持たない, すなわち

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \forall \omega \in R \quad (4)$$

が成り立つものと仮定する.

参考文献 [1] によると,

$$\Phi = \begin{bmatrix} C_1 A^{\alpha_1 - 1} B \\ \vdots \\ C_p A^{\alpha_p - 1} B \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C \equiv \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix}, \quad (C_i \in R^{1 \times n}, i = 1, \dots, p) \quad (6)$$

$$\alpha_i = \min(j | C_i A^{j-1} B \neq 0; j = 1, \dots, n). \quad (7)$$

$$(i = 1, \dots, p)$$

とおいたとき,

$$\text{rank } \Phi = p \quad (8)$$

ならば

$$u(t) = -\hat{\Phi}\Psi x(t) + \hat{\Phi}v \quad (9)$$

なる制御入力を用いると, v から y までの伝達関数が

$$\begin{aligned} y &= \text{diag} \{ h_1(s) \ \cdots \ h_p(s) \} v \\ &= H(s)v \end{aligned} \quad (10)$$

となり, 非干渉制御系が設計できる. ここで, $h_i(s) (i = 1, \dots, p)$, $H(s)$ は, それぞれ

$$g_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i} + \beta_{i1}s^{\alpha_i-1} + \cdots + \beta_{\alpha_i, \alpha_i}} \quad (11)$$

$$H(s) = \text{diag} \{ h_1(s) \ \cdots \ h_p(s) \} \quad (12)$$

である. $\hat{\Phi}$ は

$$\Phi \hat{\Phi} = I \quad (13)$$

を満足する実行列, Ψ は

$$\Psi = \begin{bmatrix} C_1 A^{\alpha_1} + \beta_{11} C_1 A^{\alpha_1-1} \cdots + \beta_{1\alpha_1} C_1 \\ \vdots \\ C_p A^{\alpha_p} + \beta_{p1} C_p A^{\alpha_p-1} \cdots + \beta_{p\alpha_p} C_p \end{bmatrix} \quad (14)$$

であり, $\beta_{ij} (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, \alpha_i)$ は

$$s^{\alpha_i} + \beta_{i1}s^{\alpha_i-1} + \cdots + \beta_{\alpha_i, \alpha_i} = 0 \quad (15)$$

の根が複素平面上の開左半平面に存在するように定めるものとする. なお, $p = m$ のときには, 非干渉化可能であるための必要十分条件が, (8) 式が成り立つことであることに注意する [1].

さて, (1) 式の制御対象に (9) 式の制御入力を与えたとき, 制御系の安定性に関して, つぎのことが成り立つ. (1) 式の制御対象が閉右半平面に不変零点を持たない, すなわち

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \Re\{s\} \geq 0 \quad (16)$$

が成り立つならば, (1) 式の制御対象に (9) 式の制御入力を与えた制御系は, 安定である. 一方, (1) 式の制御対象が閉右半平面に不変零点を持つ場合, すなわち

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & 0 \end{bmatrix} < n + p \quad \exists \Re\{s\} \geq 0 \quad (17)$$

が成り立つ場合には、(1) 式の制御対象に (9) 式の制御入力を与えた制御系は、不安定である。このことは、内部安定であるためには v から y までの伝達関数の零点として制御対象の閉右半平面の零点を全て含まなければならないこと、 v から y までの伝達関数が (10) 式で表されることから明らかである。したがって、制御対象が非最小位相系の場合には、参考文献 [1] の方法では、制御系の安定性を保証した非干渉化ができない。

本稿で検討する問題は、上記の仮定のもと、(1) 式の制御対象が非最小位相系の場合であったとしても、

$$u(t) = Fx(t) + K(s)v \quad (18)$$

なる制御入力で、(1) 式の制御対象を安定に非干渉化する方法を検討することである。ただし、 $K(s) \in RH_\infty^{m \times p}$ とする。

3 安定な非干渉制御系の設計

ここでは、(1) 式の制御対象が非最小位相系のとき、すなわち (17) 式が成り立つとき、(18) 式を用いた安定な非干渉制御系の設計法を提案する。(18) 式を用いて安定な非干渉制御系の設計を行う基本的なアイデアは、以下のとおりである。(1) 式の制御対象に (18) 式の制御入力を加えたとき、 v から y までの伝達関数は、

$$y = C(sI - A - BF)^{-1}BK(s)v \quad (19)$$

となる。上式の制御系が内部安定であるためには、 $A + BF$ の固有値がすべて複素開左半平面に存在し、 $C(sI - A - BF)^{-1}BK(s)$ が複素開左半平面の極零相殺をしないことである。もし、(12) 式の $H(s)$ 、(1) 式の制御対象 $G(s)$ の不安定な不変零点を全て含む対角関数 $\hat{K}(s)$ を用いて、 $C(sI - A - BF)^{-1}BK(s)$ が

$$C(sI - A - BF)^{-1}BK(s) = H(s)\hat{K}(s) \quad (20)$$

と記述できれば、安定な非干渉制御系が設計できる。残された問題は、(20) 式を満足する F 、 $K(s)$ を設計することである。

F 、 $K(s)$ の設計は、参考文献 [1] の非干渉化法を援用し求めることにする。(1) 式の制御対象 $G(s)$ に (9) 式の制御入力を適用したとき、 v から y までの伝達関数は、

$$\begin{aligned} H(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A - B\hat{\Phi}\Psi & B\hat{\Phi} \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \hat{\Phi}\Psi & I \end{array} \right]^{-1} \hat{\Phi} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A - B\hat{\Phi}\Psi & B\hat{\Phi} \\ \hline -\hat{\Phi}\Psi & \hat{\Phi} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A - B\hat{\Phi}\Psi & B\hat{\Phi} \\ \hline -F - \hat{\Phi}\Psi & \hat{\Phi} \end{array} \right] \\ &= G_f(s)G_0(s) \end{aligned} \quad (21)$$

と変形できる。ただし、

$$G_f(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (22)$$

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A - B\hat{\Phi}\Psi & B\hat{\Phi} \\ \hline -F - \hat{\Phi}\Psi & \hat{\Phi} \end{array} \right] \\ &= [G_{01}(s) \cdots G_{0p}(s)] \end{aligned} \quad (23)$$

である。ここで、 $G_{0i}(s) (i = 1, \dots, p)$ の最小実現を

$$G_{0i}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{0i} & B_{0i} \\ \hline C_{0i} & D_{0i} \end{array} \right] \quad (24)$$

とおく。ただし、 $A_{0i} \in R^{n_i \times n_i}$ 、 $B_{0i} \in R^{n_i}$ 、 $C_{0i} \in R^{m \times n_i}$ 、 $D_{0i} \in R^m$ である。 $A_{0i} - B_{0i}K_i (i = 1, \dots, p)$ の全ての固有値が複素平面上の開左半平面に存在するような $K_i \in R^{1 \times n_i} (i = 1, \dots, p)$ を用いると

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{c|c} A_{0i} - B_{0i}K_i & B_{0i} \\ \hline C_{0i} - D_{0i}K_i & D_{0i} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A_{0i} & B_{0i} \\ \hline C_{0i} & D_{0i} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{0i} - B_{0i}K_i & B_{0i} \\ \hline -K_i & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

が成り立つ。 $\hat{K}(s)$ を

$$\hat{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \hline \hat{C}_k & \hat{D}_k \end{array} \right] \quad (26)$$

$$\hat{A}_k = \text{diag} \{ A_{01} - B_{01}K_1 \quad \cdots \quad A_{0p} - B_{0p}K_p \} \quad (27)$$

$$\hat{B}_k = \text{diag} \{ B_{01} \quad \cdots \quad B_{0p} \} \quad (28)$$

$$\hat{C}_k = \text{diag} \{ -K_1 \quad \cdots \quad -K_p \} \quad (29)$$

$$\hat{D}_k = I \quad (30)$$

とおくと、(25) 式から、 $G_0(s)\hat{K}(s) \in RH_\infty$ である。すなわち、(21) 式と上記のことから、

$$\begin{aligned} &H(s)\hat{K}(s) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A - B\hat{\Phi}\Psi & B\hat{\Phi} \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \hat{K}(s) \\ &= G_f(s)G_0(s)\hat{K}(s) \end{aligned} \quad (31)$$

は安定である。 $G_f(s) \in RH_\infty$ 、 $G_0(s)\hat{K}(s) \in RH_\infty$ であることから、 $G_f(s)$ と $G_0(s)\hat{K}(s)$ は、不安定な極零相殺がない。また、 $H(s)$ 、 $\hat{K}(s)$ は、ともに対角な実有理関数であるので、 $G_f(s)G_0(s)\hat{K}(s)$ は非干渉化されている。(31) 式は、(1) 式のシステムの制御入力を (18) 式とし、

$$K(s) = G_0(s)\hat{K}(s) \quad (32)$$

とすることと等価である。

以上のことから、非最小位相系に対する安定な非干渉制御系が設計できた。

4 あとがき

本稿では、全状態フィードバック制御と動的フィードフォワード補償器を用いた安定な非干渉制御系の設計法を提案した。

参考文献

- [1] P.L. Falb and W.A. Wolovich, *Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems*, "IEEE Transactions on Automatic Control", 12-6, (1992), pp.651-659