

110 薄肉筒体の弾塑性圧潰特性

Study on Elastoplastic Compressive Behavior for Thin-Walled Tubes

○正 牛島 邦晴 (東理大), 正 陳 玳珩 (東理大), 正 春山 繁之 (福岡県工業技術センター)

Kuniharu USHIJIMA, Dai-heng CHEN, Tokyo University of Science, 1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, Japan
Shigeyuki HARUYAMA, Fukuoka Industrial Technology Center**Key Words:** Buckling, Axial Compression, Thin-walled Structures, Plasticity, Finite Element Method

1 緒 言

近年、自動車の車体構造において、燃費の向上のための軽量化と乗員の衝突安全性を確保するための高剛性化といった複数の要求を同時に満たすため、車体の前後部に筒状の形状（円筒、角筒等）をもつ薄肉の部材を配置させ、衝突時の車両の運動エネルギーを効率よく吸収させる構造が用いられており、その圧潰現象を正確に評価することが非常に重要となっている。図1はその一例として、上下にフランジを有するアルミ合金製の薄肉円筒を準静的に軸方向へ圧潰させたときの、圧潰荷重と軸方向変位との関係を示したものであり、図中には円筒の最終変形形状も示している。この図から分かるように、変形の初期段階において、荷重のピーク値 P_1 が生じ、その後荷重の周期的な変動が現れ、最終的に円筒に多数のしわを形成した全体の圧潰に到達する。

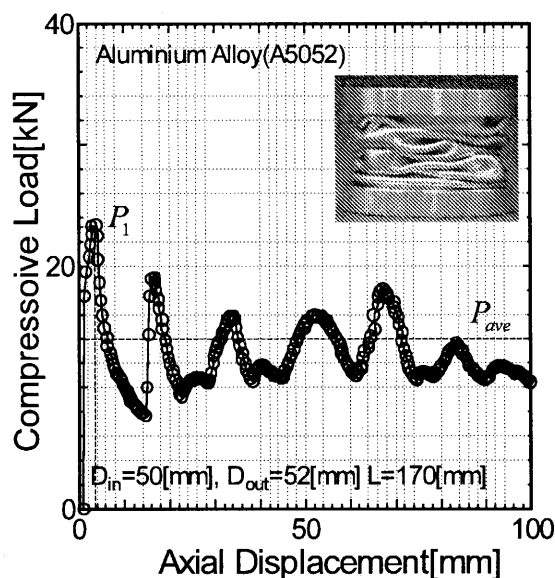


Fig.1 Compressive load and axial displacement curve for circular tube of aluminium alloy (A5052)

こうした薄肉の筒体に対する圧潰特性について、これまで国内外問わず数多くの研究が行われており、大別すると以下の2種類に整理できる。

- (1) 荷重のピークを座屈とみなし、ピーク荷重 P_1 を軸圧縮を受ける薄肉筒体の座屈荷重 P_{cr} を用いて評価する研究 [1]~[4]
- (2) ピーク後の大変形弾塑性挙動に対し、変形を仮定しエネルギーの釣り合い条件により平均荷重 P_{ave} を評価する研究 [5]~[6]

項目 (1) に関し、軸方向圧縮荷重を受ける薄肉円筒の弾性座屈問題について、Lorenz^[1]をはじめとする数多くの理論的、実験的研究が行われてきた。それによると、弾性座屈問題で取り扱う円筒は非常に薄く（通常肉厚と半径の比 $t/R < 1/100$ ）、初期不整の影響が大きいため、理論解析結果と実験結果との間に大きな差が生じることが一般に知られている^[7]。また、塑性変形を伴う円筒の座屈問題に関しても、理論座屈荷重を求める算定法が幾つか提案されている^{[2],[4]}が、座屈荷重を用いたピーク荷重の評価の有効性については、未だ統一された見解が得られていないのが現状である。

そこで本研究では、薄肉筒体の弾塑性圧潰特性として、軸方向に圧縮荷重を受ける薄肉円筒問題において、変形の初期段階に生じるピーク荷重 P_1 を円筒断面積で除したピーク応力 σ_1 に注目し、これまで提案された座屈問題としての評価法を整理する。また、有限要素法 (FEM) により得られたシミュレーション解析結果との比較を行い、評価法の問題点を明らかにする。本研究で用いた弾塑性 FEM 解析の有効性については、著者ら^[8]はアルミ合金製の薄肉円筒の軸圧潰実験結果と FEM 解析結果の比較検討を行い、すでに確認しているのでここでは紙面の関係上省略する。

2 座屈応力によるピーク応力の評価

2.1 弾性座屈問題

軸方向圧縮荷重下での円筒の弾性座屈問題は、Lorenz^[1]をはじめ数多くの研究者により研究が行われている。Timoshenko らの著書^[2]によれば、図2に示すような薄肉の円筒（肉厚 t 、半径 R 、長さ L ）が軸方向に一樣な圧縮荷重 N_x （単位長さあたりの荷重）を受ける場合、軸対称応力状態での力、モーメントの釣り合い

条件は以下の式で表される.

$$\begin{cases} \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ \frac{dN_{xz}}{dx} - \frac{N_\theta}{R} + \frac{d}{dx} \left(N_x \frac{dw}{dx} \right) = 0 \\ \frac{dM_x}{dx} - N_{xz} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ここで, N_θ, N_{xz}, M_x はそれぞれ, 円筒殻の単位長さあたりにおける周方向の合力, せん断力およびモーメントである. 式(1)に円周方向のひずみ ε_θ の式

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{R} \quad (2)$$

と平面応力状態における応力-ひずみ関係

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_x) \end{cases} \quad (3)$$

(E は縦弾性係数, ν はポアソン比) および薄い板の Kirchhoff-Love の理論によるモーメントの式

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

を代入し, 半径方向 (z 方向) の変位 w が不安定になるための条件から, 弾性座屈応力 σ_{cr}^{el} は以下の式として算出される (引張りを正)^{[1],[2]}.

$$\sigma_{cr}^{el} = -\frac{Et}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (5)$$

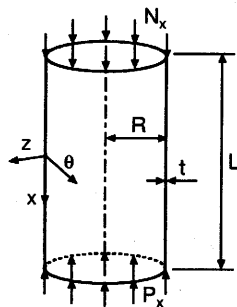


Fig.2 Tube geometries and coordinate for circular tube

弾性座屈問題に関し, Robertson^[3]をはじめとする多くの実験結果によれば, 実際の薄肉円筒は式(5)で求めた理論座屈応力よりも十分小さい値で座屈し, その値のばらつきも非常に大きい. その原因として円筒に存在する初期不整にあることが, 他の多くの研究により一般に知られている^[7].

式(5)の理論座屈応力値の意味を理解するため, 円筒の一端の半径 R が多端に比べ Δ だけ細い初期不整をもつ円筒 (肉厚 $t = 2[\text{mm}]$, 半径 $R = 25[\text{mm}]$) に対し, FEM による圧潰のシミュレーション解析を行い, 得ら

れたピーク荷重 P_1 と初期不整 Δ との関係を図3に示す. 本解析において, 弾性座屈が生じるよう材料の降伏応力 σ_y はピーク応力に比べ十分大きいものと設定した. 図3から分かるように, 有限要素法により得られたピーク荷重値 P_1 は初期不整 Δ の関数となり, Δ がある程度の範囲内 (ここでは $0.05 < \Delta/t < 0.1$) であれば, ピーク荷重は式(5)で求められる理論座屈荷重 P_{cr}^{el} に等しい. すなわち, 固有値問題として求めた弾性座屈応力の理論値は, 円筒に「ある程度」の微小な初期不整 Δ_{cr} を持つ場合のピーク応力である. 初期不整 Δ が $\Delta < \Delta_{cr}$ であれば, ピーク応力は式(5)の理論値を超えても座屈せず, 逆に $\Delta > \Delta_{cr}$ であれば, ピーク応力は式(5)の理論値よりも小さくなる. これまで行われた弾性座屈実験で用いられた円筒は非常に薄く, 内在する初期不整 Δ は円筒の肉厚 t に対し大きいため, 実験で求めた座屈荷重は, 理論解析結果 (式(5)) よりも十分小さな値となったと理解できる.

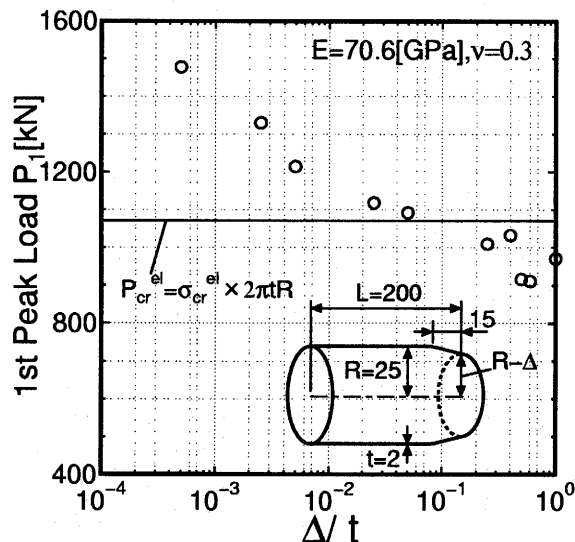


Fig.3 Effect of the amplitude of geometric imperfection Δ on the 1st peak load P_1

2.2 塑性座屈問題

式(5)が適用できる円筒は, ピーク応力 σ_1 が材料の降伏応力 σ_y よりも十分小さい場合であり, 通常自動車車体の衝撃エネルギー吸収部材として用いられる円筒はある程度の肉厚を持ち, ピーク応力 σ_1 は降伏応力 σ_y より大きいのが一般的である. 材料の塑性変形を考慮した円筒の座屈問題に関しても, これまで多くの理論的・実験的研究が行われている. Timoshenko らの著書^[2]によれば, 材料の塑性変形における加工硬化特性を二直線硬化則

$$\sigma = \sigma_y + E_h \left(\varepsilon - \frac{\sigma_y}{E} \right) \quad (6)$$

で近似した場合、座屈応力 σ_{cr}^{pl} の最も簡単な評価法として、降伏後の機械的性質が軸方向と周方向で同じであると仮定して、式(5)中の縦弾性係数 E を塑性降伏後の応力-ひずみ関係における接線係数 E_h で置き換えた以下の式(引張りを正)

$$\sigma_{cr,1}^{pl} = -\frac{tE_h}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (7)$$

を提案している[2]。また、式(5)中の縦弾性係数 E を $\sqrt{E_h E}$ で置き換える以下の式(引張りを正)

$$\sigma_{cr,2}^{pl} = -\frac{t\sqrt{E_h E}}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (8)$$

も同時に提案している[2]。図4は、塑性変形を考慮した円筒のピーク応力 σ_1 に対し、弾塑性FEM解析で求めた数値結果(図中の各印)と、式(7)と(8)で得られた座屈応力結果(図中の実線)とを比較したものである。ここで、FEMによる数値シミュレーション解析において、降伏応力は十分小さい($\sigma_y/E = 3/1000$)とし、円筒の形状に初期不整 Δ を導入する代わりに、円筒片側の端面の変位を完全拘束し、軸圧潰により端部から局所的な曲げ変形が生じさせることでピーク応力 σ_1 を求めた。図4の結果から分かるように、式(7),(8)ともFEMによる数値解析結果とは大きく異なる結果となる。

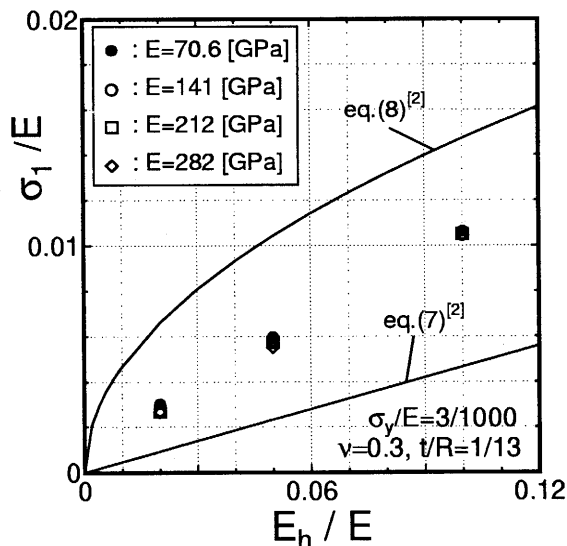


Fig.4 Comparison of 1st peak stresses obtained from FEM and buckling stresses obtained by eqs.(7),(8)

一方Oreら[4]は、材料の塑性変形による座屈応力への影響をより正確に評価するため、塑性降伏後の応力-ひずみ関係に対し、以下の増分形

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_x &= E_{xx}\dot{\epsilon}_x + E_{x\theta}\dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\sigma}_\theta &= E_{\theta x}\dot{\epsilon}_x + E_{\theta\theta}\dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\tau}_{xz} &= G_{xz}\dot{\gamma}_{xz} \end{cases} \quad (9)$$

を用い、式(1)に代入することで以下の式で表される塑性座屈応力の理論解を求めた(引張りを正)。

$$\sigma_{p,2}^p = -\frac{t}{\sqrt{3}R} \cdot \sqrt{E_{xx}E_{\theta\theta} - E_{x\theta}^2} \quad (10)$$

ここで、式(9)中の各係数 $E_{xx}, E_{x\theta}, E_{\theta\theta}, G_{xz}$ は、応力状態および適用する塑性変形理論によって異なる。塑性座屈応力を求める各種算定法では、座屈が生じるまでの円筒内の応力を、軸方向(x 方向)の応力のみが存在するような1軸応力状態と仮定する。また、塑性変形理論としてひずみ増分理論を適用する場合、塑性座屈応力は次式

$$\sigma_{cr,f}^{pl} = -\frac{2Et}{\sqrt{3}R} \cdot \frac{1}{\sqrt{(5-4\nu)E/E_t - (1-2\nu)^2}} \quad (11)$$

で表され、全ひずみ理論を適用する場合、塑性座屈応力は次式

$$\sigma_{cr,d}^{pl} = -\frac{2Et}{\sqrt{3}R} \cdot \frac{1}{\sqrt{(3\eta_s + 2 - 4\nu)E/E_s - (1-2\nu)^2}} \quad (12)$$

で表される[4]。ここで、式(11)中の E_t は応力増分と塑性ひずみ増分を結ぶ剛性係数($1/E_t = 1/E_h - 1/E$)であり、式(12)中の E_s は全ひずみ理論における応力とひずみの比($E_s = \sigma/\epsilon$)である。

図5と6は加工硬化係数 $E_h/E = 0.01, 0.1$ と 0.2 の材料について、弾塑性FEM解析により得られたピーク応力 σ_1 、各種理論算定法で求めた塑性座屈応力 σ_{cr}^{pl} と、円筒の肉厚と半径の比 t/R との関係を示したものである。ここで、塑性座屈応力の理論値として、図5(a)には式(3),(4)とひずみ増分理論を用いた場合の式(7)の結果を、図5(b)には式(3),(4)と全ひずみ理論を用いた場合の式(8)の結果をそれぞれ示している。これらの図から、以下の2点がわかる。

- (1) 各種算定法による理論座屈応力値を比較すると、式(3)の結果(図5(a)と(b)中の実線)と塑性変形理論として全ひずみ理論を用いた式(12)の結果(図5(b)中の破線)、式(4)の結果(図5(a)と(b)中の点線)とひずみ増分理論を用いた式(11)の結果(図5(a)中の一点鎖線)が、それぞれほぼ一致する。
- (2) 図5(a)と(b)を比較すると、全体として全ひずみ理論を用いる場合よりは、ひずみ増分理論を用いる場合の方が、弾塑性FEM解析による円筒の軸圧潰時のピーク応力 σ_1 の数値解析結果(図中の○, ▲, ●印)にある程度近い値となっている。ただしその精度はまだ悪く、特に E_h/E が小さいとき、その誤差が相当大きい。

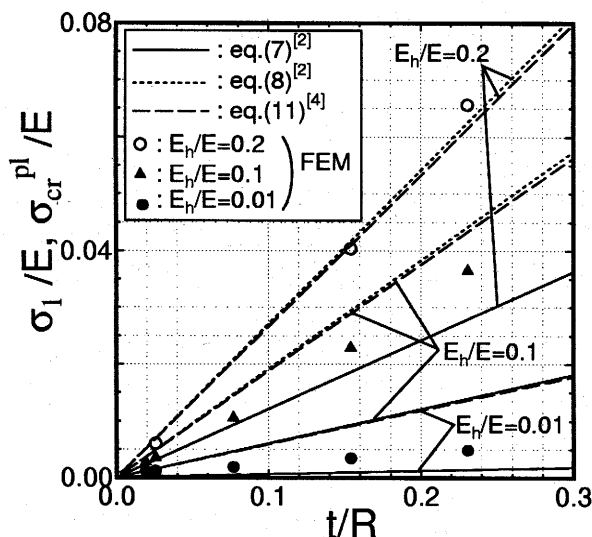
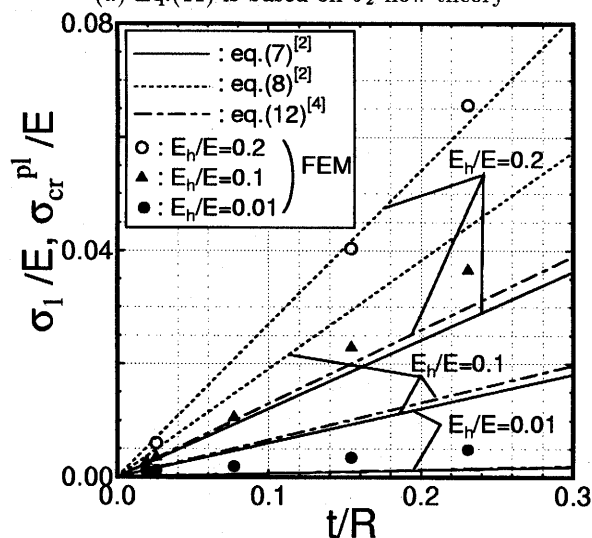
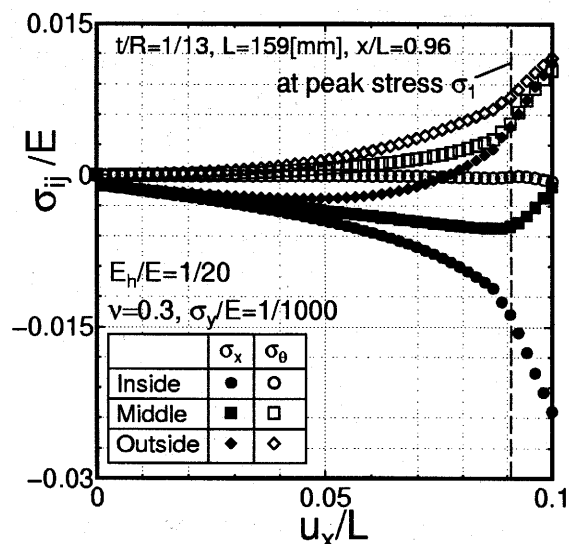
(a) Eq.(11) is based on J_2 flow theory(b) Eq.(12) is based on J_2 deformation theory

Fig.5 Comparison of 1st peak stresses and buckling stresses in plastic deformation

以上のように、各種理論算定法で求めた塑性座屈応力の理論値 σ_{cr}^{pl} を用いて、弾塑性FEM数値シミュレーション解析で求めたピーク応力 σ_1 を、精度よく予測できない原因として、各種算定法において、円筒の軸圧潰後における降伏後の応力とひずみの関係を正確に表現していないことにあると思われる。周知のように、塑性降伏後の応力増分とひずみ増分の関係式は、応力状態によって異なる。塑性座屈応力を求める各種理論算定法では、前述のように座屈が生じるまでの全過程において、円筒内の応力を σ_x のみが存在するような1軸応力状態と仮定している。この仮定の矛盾を明らかにするため、肉厚と半径の比 $t/R = 1/13$ 、全長 $L = 159[\text{mm}]$ 、加工硬化係数 $E_h/E = 1/20$ の円筒に対し、FEMによる軸圧潰シミュレーション解析を行い、ピーク応力 σ_1

Fig.6 Stresses σ_x and σ_θ at section of $x = 152.5[\text{mm}]$ in axially compressed circular tube

において、円筒端部の拘束によりしわが生じる所(自由端から $152.5[\text{mm}]$ 離れた所)の断面における、軸方向と周方向の応力成分 σ_x, σ_θ を図6に示す。この図から分かるように、変形の相当早い段階から応力状態はすでに1軸応力でなくなっており、図中の印 $\square, \diamond$ などが示すように、その応力状態は、円筒の内側表面、外側表面および円筒の中心部においてそれぞれ異なっている。

3 結 言

本研究では軸圧潰を受ける薄肉円筒に生じるピーク応力 σ_1 について、有限要素法による弾塑性数値解析を行い、これまで多くの研究者により報告された座屈応力 σ_{cr} による σ_1 の評価を整理しながら、これまで提案された各種算定法と数値解析結果との違いの原因を明らかにした。

参考文献

- [1] Z. Lorenz, *Z Ver deut Ingr.*, **52**(1908), pp.1766-1793.
- [2] S.P.Timoshenko and J.M.Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd Ed., McGraw-Hill(1961), pp.457-460.
- [3] A. Robertson, *ARC Report and Memorandum*, No.1185(1929).
- [4] E.Ore and D.Durban, *Int. J. Mech. Sci.*, **34**(1992), pp.727-742.
- [5] J.M. Alexander, *J. Mechs. and Appl. Maths.*, **13**(1960), pp.1-9.
- [6] T. Wierzwicki, T. Bhat, W. Abramowicz and D. Bradikin, *Int. J. Solids Structures*, **29**(24)(1992), pp.3269-3288.
- [7] J.G.Teng, *Appl. Mech. Rev.*, **49**-4(1996), pp.263-274.
- [8] 春山, 牛島, 陳, 日本実験力学学会講演論文集, **3** (2003), 343-344.