

305 一次遅れ+むだ時間系の極配置と応答との関係 (第2報)

Relation between Pole Placements and Transient Responses
for First-order lag Plus Deadtime Systems

○岡田 洋平 (山梨大) 山川 雄司 (東京大院) 山崎 敬則 (小山高専) 黒須 茂 (クロテック)

Yohei OKADA, Yamanashi University, 37-4-4 Takeda, Kofu, Yamanashi

Yuji YAMAKAWA, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo

Takanori YAMAZAKI, Oyama National College of Technology, 771 Nakakuki, Oyama, Tochigi

Shigeru KUROSU, Crotech, 61-88 Ozakata, Chikusei, Ibaraki

Key Words: PI control, Ziegler-Nichols tuning method, Padé approximation, pole-zeros cancellation

1. 結 言

多くのプロセス制御系では、プラントを一次遅れ+むだ時間系で近似して、PIDコントローラの調整が行われている。PIDコントローラの代表的な調整法として、実験的見地から生まれたジューダ・ニコルスの限界感度法がよく知られている。しかし、この方法では応答の減衰比がおおよそ1/4 ($\zeta \approx 0.22$)となるように、コントローラの値を設定するため振動的な応答しか得られない。

現在、プロセス制御の分野では応答が非振動的になるような要求があるために、任意の減衰係数を指定できるPIDコントローラの調整法が求められる。そこで本研究では、PI制御系を対象とし、むだ時間に二次のPadé近似を適用した際の閉ループ系の振動極に着目して、減衰係数を指定したPIパラメータの調整法を検討する。

2. 制御対象と対象とするPI制御系

2.1 制御対象と閉ループ伝達関数 プラントは一次遅れ+むだ時間系の式(1)とする。

$$G_{PN}(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-Ls} \quad (1)$$

ここで、 K :ゲイン、 T :時定数、 L :むだ時間である。

純粋なむだ時間要素は超越関数の一つで有限次元では取り扱えないため、二次のPadé近似を適用すると、プラントの伝達関数は式(2)となる。

$$G_p(s) \approx \frac{K}{Ts+1} \frac{L^2 s^2 - 6Ls + 12}{L^2 s^2 + 6Ls + 12} \quad (2)$$

図1は解析に用いたPI制御系で、 r :目標値、 e :偏差、 u :操作量、 x :制御量、 k_p :比例ゲイン、 T_i :積分時間である。

PI制御後の閉ループ伝達関数 G_{CL} はとなる。

$$G_{CLN} = \frac{\frac{k_p}{T_i} \left(\frac{T_i s + 1}{s} \right) \frac{K}{Ts+1} \frac{L^2 s^2 - 6Ls + 12}{L^2 s^2 + 6Ls + 12}}{1 + \frac{k_p}{T_i} \left(\frac{T_i s + 1}{s} \right) \frac{K}{Ts+1} \frac{L^2 s^2 - 6Ls + 12}{L^2 s^2 + 6Ls + 12}}$$

本研究では、閉ループ系の振動極が代表極となるように極配置をした上で、代表極の減衰係数とPIパラメータとの関係を見出すことが基本的な着想であるので、伝達関数の分母が三次となる形が検討しやすい。

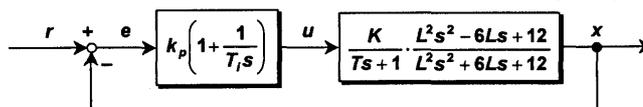


Fig. 1 PI control system

2.2 積分時間 T_i を固定した閉ループ伝達関数 前述の着想を基に式(2)について考えると、 $T_i = T$ とすれば極ゼロ相殺して閉ループ伝達関数の分母次数を下げられることが容易に分かる。 $T_i = T$ としたときの閉ループ伝達関数 G_{CL} は次のようになる。

$$G_{CL} = \frac{\frac{k_p K}{Ts} \frac{L^2 s^2 - 6Ls + 12}{L^2 s^2 + 6Ls + 12}}{1 + \frac{k_p K}{Ts} \frac{L^2 s^2 - 6Ls + 12}{L^2 s^2 + 6Ls + 12}} \quad (3)$$

$$G_{CL} = \frac{k_p K/A \{(Ls)^2 - 6(Ls) + 12\}}{(Ls)^3 + \{6 + k_p K/A\}(Ls)^2 + \{12 - 6k_p K/A\}(Ls) + 12k_p K/A}$$

ここで、 $A = T/L$ である。またゼロ点はコントローラに対して不変となる。 T_i を固定することのもう一つの利点は、PIコントローラのパラメータは比例ゲイン k_p だけを調整すればよいことである。従って、 k_p, K, T, L の四つの変数について極の特徴を考察する。

2.3 極と減衰係数との関係 極と減衰係数との関係を導出するために、 $a = 6 + k_p K/A$, $b = 12 - 6k_p K/A$, $c = 12k_p K/A$ とおき式(3)の分母を簡略化した特性方程式について検討する。

$$L^3 s^3 + aL^2 s^2 + bLs + c = 0 \quad (4)$$

式(4)にカルダノの解法を適用すると、解を求めるための中間係数 M, N, P, Q, R はつぎのように与えられる。

$$M = \frac{3b - a^2}{9}, \quad N = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54}, \quad P = \sqrt{M^3 + N^2}$$

$$Q = \sqrt[3]{P - N}, \quad R = \sqrt[3]{-(P + N)}$$

$P^2 \geq 0$ の場合、三根は実根+共役複素根、すなわち実数極+振動極となり次式で求められる。

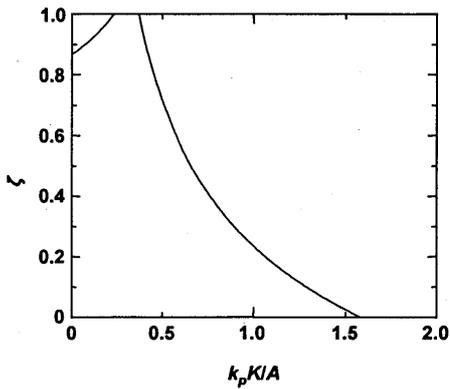


Fig. 2 Relation between $k_p K/A$ and ζ

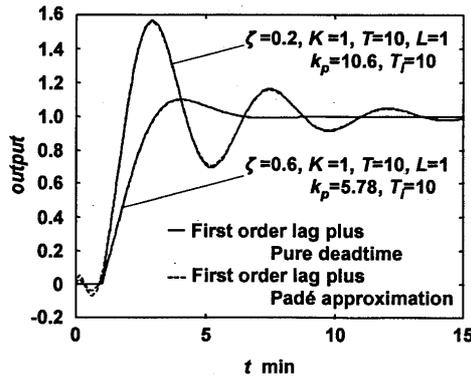


Fig. 3 Step responses in case that ζ is specified

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{L} \left\{ Q + R - \frac{a}{3} \right\} = p \\ s_{2,3} &= \frac{1}{L} \left\{ \left(-\frac{Q+R}{2} - \frac{a}{3} \right) \pm j \left(\frac{\sqrt{3}(Q-R)}{2} \right) \right\} = \alpha \pm j\beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)より、実数極、振動極ともに $1/L$ の関数であることが分かる。振動極の実部を α 、虚部を β として振動極の減衰係数 ζ を求めると、

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\left(\frac{Q+R}{2} + \frac{a}{3} \right)}{\sqrt{\left(\frac{Q+R}{2} + \frac{a}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}(Q-R)}{2} \right)^2}} \quad (6)$$

となり、 ζ は $1/L$ に依存せず Q, R, a の関数となる。また Q, R は a, b, c の関数で、 a, b, c は全て $k_p K/A$ の関数であるから、結局 ζ は $k_p K/A$ の関数となる。

2.4 $k_p K/A$ と ζ との関係 ζ を指定したときの k_p を導出するために、式(6)の右辺について $k_p K/A$ を変数とし、数値計算で ζ を求めた。図2はこの関係を示した結果で、 $k_p K/A$ を上げていくと $\zeta=1$ となり、解が存在しない領域を経て再び $\zeta=1$ が出現し、その後 $\zeta=0$ に向けて単調減少することが分かる。ここでは極配置は示していないが、 $k_p K/A$ を上げて $\zeta=1$ になる部分は実数極が代表極となる極配置から振動極が実軸に近づく合流点、 $\zeta > 1$ の部分は三つの極が全て実数極になる領域、再び $\zeta=1$ になる部分は振動極が代表極となる分離点、 $\zeta=0$ になる部分は虚軸と振動極とが交わる安定限界を表している。

式(4)にフルビッツの安定判別法を適用して安定限界を求めると $k_p K/A=1.58$ となる。本研究では、 ζ の指定に代表極となる振動極を用いるので、求める k_p は分離点から安定限界までの領域 ($0.368 \leq k_p K/A < 1.58$) と ζ との関係から算出することになる。例として、 $\zeta=0.2$ と指定したときの k_p を求めてみる。図2から $\zeta=0.2$ に対して $k_p K/A$ の値を 1.1 と読むと $k_p = 1.1A/K$ となる。ここでプラントの特性値が $K=1, T=10, L=1$ のように分かっているならば、 k_p は直ちに 11.0 と算出できる。図3は提案した手法で調整したPIコントローラを用いたステップ応答で、一次遅れ+むだ時間のプラントに対して $\zeta=0.2, 0.6$ と指定している。

Table 1 ζ calculated from amplitude ratio

(a) $\zeta=0.2$		
	Amplitude ratio	ζ
—	0.5662/0.1623	0.195
---	0.5583/0.1544	0.200
(b) $\zeta=0.6$		
	Amplitude ratio	ζ
—	0.0984/0.0008	0.608
---	0.0969/0.0009	0.597

今回提案したPIパラメータ調整法は、振動極の減衰係数を指定しているに過ぎず、応答の減衰が指定した値と一致しているとは限らない。そこで、応答の振幅比から算出した減衰係数と振動極の減衰係数とを比較し、提案した調整法の検証を行った。

Table 1は図3のステップ応答の振幅比から ζ を算出した結果である。Table 1によると、実線で示した純粋むだ時間を適用した応答、破線で示したむだ時間に二次のPadé近似を適用した応答のいずれも応答の減衰係数は振動極の減衰係数とほぼ一致している。この結果から、提案したパラメータ調整法は、純粋むだ時間に対しても有効であると考えられる。

図3に示した例では、応答の減衰係数と振動極の減衰係数とはほぼ一致しているが、応答の減衰係数は実数極と振動極との組み合わせによって決まるため、実数極の影響を無視できる極配置を考慮しなければならない。すでにP制御系については実数極の影響を無視できる極配置の条件を示している³⁾ので、今後、PI制御系についても検討する必要がある。

3. 結 言

本研究では、むだ時間に二次のPadé近似を適用した一次遅れ+むだ時間系のプラントに対して、積分時間 T_i を時定数 T で固定して閉ループ伝達関数の次数を下げたPI制御系を構成し、減衰係数を指定したPIパラメータ調整法を検討した結果、次のような知見を得た。

- 1) 減衰係数 ζ を指定した比例ゲイン k_p は、 A/K ($A=T/L$) に比例した一次関数となる。
- 2) 振動極の ζ を指定したときの応答は、実数極の影響をほとんど受けない場合、等価的な二次系の応答に近似することができる。

文 献

- 1) J.G. Ziegler and N.B. Nichols, Optimum Settings for Automatic Controllers, Trans. ASME, 64 (1942), pp. 759-768.
- 2) 桑田龍一, 改良型限界感度法とPID; I-PD制御の特性: 計測自動制御学会論文集, 23-3 (1987), pp. 232-239.
- 3) 山崎敬則, 岡田洋平, 山川雄司, 黒須茂, 一次遅れ+むだ時間系の限界感度と減衰度との関係: 第48回自動制御連合講演会, (2005), pp. 705-708.