307 パラメトリゼーションとモデルマッチング法を用いた複数のむだ時間をもつ最小位相むだ時間系に対するスミス予測器の設計法

A Design Method for Smith Predictor for Minimum Phase Time-Delay Plants with Multiple Time-delays Using The Parametrization And The Model Maching Method

○学 武長 拓志（群馬大学），正 山田 功（群馬大学）

Hiroshi Takenaga　Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma
Kou Yamada　Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma

Key words: Minimum-Phase System, Time-Delay System, Multiple Time-Delays, Smith Predictor, Parameterization, Model Matching Method

1 まえがき

本稿では，複数のむだ時間をもつ最小位相系に対するスミス予測器の設計法について検討する．Smith によって提案されたスミス予測器は，むだ時間経過後に現れる出力を予測して制御入力を修正する補償器である [1].

一方，制御系設計の重要な問題に，安定化補償器すべてを求める問題，いわゆるパラメトリゼーションの問題がある．安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションが得られると，過去に発表された修正スミス予測器を統一的に扱え，システマティックな制御系設計が可能となるという利点がある．これまでに Yamada and Matsushima[2] は最小位相むだ時間系に対する安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションを提案しているが，複数のむだ時間をもつ制御系に対する安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションについては，検討していない．

本稿の目的は，[2] の結果を拡張し，複数のむだ時間をもつ最小位相系に対する安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションを提案し，得られた安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションを用いたスミス予測器の設計法を提案することである．

2 問題の記述

次式で表される一入力一出力の制御系を考える．

$$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& \left(G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}\right)u+d \\ u &=& C(s)\,(r-y)\end{array}\right. \qquad (1)$$

ただし，$G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}$ は制御対象，$T_i>0(i=1,2)$ はむだ時間，$C(s)$ は補償器，$y\in R$ は観測出力，$u\in R$ は制御入力，$d\in R$ は外乱，$r\in R$ は目標入力とする．$G_i(s)(i=1,2)$ は相異なるものとし，$G_1(s)+G_2(s)e^{-s(T_2-T_1)}$ は最小位相，すなわち $G_1(s)+G_2(s)e^{-s(T_2-T_1)}$ は閉右半平面に零点をもたないと仮定する．一般性を失うことなく，$T_1\neq T_2$ を満足する．

制御対象 $G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}$ に対する修正スミス予測器 $C(s)$ は

$$C(s)=\frac{C_1(s)}{1+C_2(s)e^{-sT_1}+C_3(s)e^{-sT_2}} \qquad (2)$$

の形式で記述される．ただし，$C_i(s)\in R(s)(i=1,2,3)$ である．さらに過去の研究で提案された修正スミス予測器を用いると，(1) 式の制御系の r から y までの伝達関数は，

$$y=\frac{C(s)(G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2})}{1+C(s)(G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2})}r \qquad (3)$$

と記述され，有限個の極を持つ．すなわち (1) 式の制御系の r から y までの伝達関数は，

$$y=(\bar{G}_1(s)e^{-sT_1}+\bar{G}_2(s)e^{-sT_2})r \qquad (4)$$

と記述される．ただし，$\bar{G}_i(s)\in R(s)(i=1,2)$ である．したがって本稿では，補償器 $C(s)$ が (2) 式の形式で記述され，(1) 式の制御系の r から y までの伝達関数が有限個の極を持つならば，$C(s)$ を修正スミス予測器と呼ぶこととする．

本稿で検討する問題は，(1) 式の制御系を安定化する修正スミス予測器 $C(s)$ のパラメトリゼーションを与えることである．

3 安定な制御対象に対するパラメトリゼーション

ここでは，安定な制御対象に対する安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションを与える．

安定な制御対象 $G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}$ に対する安定化修正スミス予測器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは，つぎの定理にまとめられる．

定理 1 $G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}$ は安定であると仮定する．このとき，安定化修正スミス予測器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは，

$$C(s)=\frac{Q(s)}{1-Q(s)\left(G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}\right)} \qquad (5)$$

と表される．ただし，$Q(s)\in RH_\infty$ は任意の関数である．

（証明略）

4 不安定な制御対象に対するパラメトリゼーション

ここでは，3 の結果を拡張し，不安定で最小位相な制御対象に対する安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションを与える．

不安定な制御対象 $G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}$ に対する安定化修正スミス予測器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは，つぎの定理にまとめられる．

定理 2 $G_1(s)e^{-sT_1}+G_2(s)e^{-sT_2}$ は不安定であり，$G_1(s)+G_2(s)e^{-s(T_2-T_1)}$ は最小位相であると仮定する．簡単のため，$G_1(s)$ と $G_2(s)$ の不安定極は相異なるものと仮定する．すなわ

ち，$G_1(s)$ の不安定極を $s_{1i}(i=1,\ldots,n_1)$ としたとき，$s_{1i} \neq s_{1j}(i \neq j; i=1,\cdots,n_1; j=1,\cdots,n_1)$ が成り立ち，$G_2(s)$ の不安定極を $s_{2i}(i=1,\ldots,n_2)$ としたとき，$s_{2i} \neq s_{2j}(i \neq j; i=1,\cdots,n_2; j=1,\cdots,n_2)$，$s_{1i} \neq s_{2j}(i=1,\cdots,n_1; j=1,\cdots,n_2)$ が成り立つ．これらの条件のもとで，

$$\bar{G}_u(s_{1i}) = \frac{G_{u2}(s_{1i})}{G_{s1}(s_{1i})\, e^{-s_{1i}T_1}} \tag{6}$$

$$\bar{G}_u(s_{2i}) = \frac{G_{u1}(s_{2i})}{G_{s2}(s_{2i})\, e^{-s_{2i}T_2}} \tag{7}$$

を満足する $\bar{G}_u(s) \in \mathcal{U}$ が存在する．ここで，$G_{si}(s)$ は $G_i(s)$ を

$$G_i(s) = G_{ui}(s) G_{si}(s) \quad (i=1,2) \tag{8}$$

のように，不安定でバイプロパーな最小位相関数 $G_{ui}(s)$ と安定関数 $G_{si}(s)$ に分解したときの安定関数である．

これらの関数を用いると，安定化修正スミス予測器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは

$$C(s) = \frac{C_f(s)}{1 - C_f(s)(G_1(s)e^{-sT_1} + G_2(s)e^{-sT_2})} \tag{9}$$

$$C_f(s) = \frac{\bar{G}_u(s)}{G_{u1}(s)G_{u2}(s)}\left(1 + \frac{Q(s)}{G_{u1}(s)G_{u2}(s)}\right) \tag{10}$$

と記述される．ただし，$Q(s) \in RH_\infty$ は任意の関数である．

（証明略）

5 修正スミス予測器の設計法

ここでは，得られたパラメトリゼーションとモデルマッチング法を用いて，入出力特性を指定した修正スミス予測器の設計法を与える．

ここで検討する問題は，(1) 式の制御系の r から y までの伝達関数を

$$\begin{aligned} y &= \frac{\bar{G}_u(s)}{G_{u1}(s)G_{u2}(s)}\left(1 + \frac{Q(s)}{G_{u1}(s)G_{u2}(s)}\right) \\ &\quad \left(G_1(s)e^{-sT_1} + G_2(s)e^{-sT_2}\right) r \\ &= \left(G_{m1}(s)e^{-sT_1} + G_{m2}(s)e^{-sT_2}\right) r \end{aligned} \tag{11}$$

とする (10) 式の $Q(s) \in RH_\infty$ の設計法を与えることである．ここで，$G_{m1}(s) \in RH_\infty$，$G_{m2}(s) \in RH_\infty$ は希望する入出力特性を実現する伝達関数である．(11) 式から，

$$Q(s) = \left(\frac{G_{m1}(s)G_{u2}(s)}{\bar{G}_u(s)G_{s1}(s)} - 1\right) G_{u1}(s)G_{u2}(s) \tag{12}$$

$$Q(s) = \left(\frac{G_{m2}(s)G_{u1}(s)}{\bar{G}_u(s)G_{s2}(s)} - 1\right) G_{u1}(s)G_{u2}(s) \tag{13}$$

が得られる．(12)，(13) 式から，$G_{m1}(s)$，$G_{m2}(s)$ は

$$G_{m1}(s)G_2(s) = G_{m2}(s)G_1(s) \tag{14}$$

を満足しなければならない．(14) 式の条件のもとで，(11) 式を満足する (10) 式の $Q(s)$ が，(12) 式で与えられる．

つぎに (12) 式の $Q(s)$ が安定でプロパーであるための条件を検討する．まず，(12) 式の $Q(s)$ が安定となるためには，$G_{m1}(s)G_{u2}(s)/(\bar{G}_u(s)G_{s1}(s))$ が安定でなければならない．$G_{m1}(s) \in RH_\infty$，$\bar{G}_u(s) \in \mathcal{U}$ であるので，$G_{m1}(s)G_{u2}(s)/(\bar{G}_u(s)G_{s1}(s))$ の不安定極となりうるのは，$G_{u2}(s)$ の不安定極もしくは $G_{s1}(s)$ の不安定零点である．したがって，$G_{m1}(s)$ が $G_{u2}(s)$ の不安定極と $G_{s1}(s)$ の不安定零点をその零点にもつならば，$G_{m1}(s)G_{u2}(s)/(\bar{G}_u(s)G_{s1}(s))$ は安定である．簡単のため，$G_{s1}(s)$ と $G_{s2}(s)$ の不安定零点は相異なると仮定する．すなわち，$G_{s1}(s)$ の不安定零点を $z_{1i}(i=1,\ldots,m_1)$ としたとき，$z_{1i} \neq z_{1j}(i \neq j; i=1,\cdots,m_1; j=1,\cdots,m_1)$ が成り立ち，$G_{s2}(s)$ の不安定零点を $z_{2i}(i=1,\ldots,m_2)$ としたとき，$z_{2i} \neq z_{2j}(i \neq j; i=1,\cdots,m_2; j=1,\cdots,m_2)$ が成り立つ．$G_{m1}(s)G_{u2}(s)/(\bar{G}_u(s)G_{s1}(s))$ が安定であるという条件は

$$G_{m1}(s_{2i}) = 0 \quad (i=1,\cdots,n_2) \tag{15}$$

$$G_{m1}(z_{1i}) = 0 \quad (i=1,\cdots,m_1) \tag{16}$$

で与えられる．ただし，$G_{m1}(s)$ が (15)，(16) 式を満足しても，必ずしも (12) 式の $Q(s)$ は安定にはならない．もし，$G_{m1}(s)G_{u2}(s)/(\bar{G}_u(s)G_{s1}(s)) - 1$ が $G_{u1}(s)$ と $G_{u2}(s)$ の不安定極をその零点にもつならば，(12) 式の $Q(s)$ は安定である．これは (6)，(15) 式から，

$$G_{m1}(s_{1i}) = e^{s_{1i}T_1} \quad (i=1,\cdots,n_1) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{s \to s_{2i}} \frac{G_{m1}(s)}{s - s_{2i}} \\ &= \frac{G_{u1}(s_{2i})G_{s1}(s_{2i})}{G_{s2}(s_{2i})e^{-s_{2i}T_2} \lim_{s \to s_{2i}} \{(s - s_{2i})\, G_{u2}(s)\}} \\ &\quad (i=1,\cdots,n_2) \end{aligned} \tag{18}$$

と等価である．以上のことから，$G_{m1}(s)$ が (15)，(16)，(17)，(18) 式を満足するならば，(12) 式の $Q(s)$ は安定である．つぎに，(12) 式の $Q(s)$ がプロパーとなるための条件を検討する．$G_{u2}(s)$，$\bar{G}_u(s)$ がともにバイプロパーであり，$G_{s1}(s)$ の相対次数が $G_1(s)$ のそれと等しいことから，(12) 式の $Q(s)$ がプロパーとなるための必要十分条件は，$G_{m1}(s)$ の相対次数が $G_1(s)$ のそれ以上であることである．以上のことから，$G_{m1}(s)$ と $G_{m2}(s)$ が (14)，(15)，(16)，(17)，(18) 式を満足し，$G_{m1}(s)$ の相対次数が $G_1(s)$ のそれ以上であるならば，(12) 式の $Q(s)$ は安定でプロパーとなり，(11) 式を満足する．

6 あとがき

本稿では，複数のむだ時間をもつ最小位相系に対する安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションを与え，得られた安定化修正スミス予測器のパラメトリゼーションを用いたスミス予測器の設計法を提案した．スペースに限りがあるため，2つのむだ時間をもつ最小位相むだ時間系に対するパラメトリゼーションについてのみ記述したが，発表では一般的な複数のむだ時間をもつ最小位相むだ時間系に対するパラメトリゼーションを示す．

参考文献

[1] O.J.M. Smith, "A controller to overcome dead-time", *ISA Journal*, Vol. 6, pp. 28-33, 1959.

[2] K. Yamada, N. Matsushima, "A design method for Smith predictor for minimum phase time-delay plants", *Proceedings of The 2005 Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunication, and Information Technology (ECTI) International Conference*, Volume I of II, Pattaya, Thailand, 2005, pp.347-350.