308 多入出力むだ時間系に対する安定化繰返し補償器のパラメトリゼーション

The parametrization of all stabilizing repetitive controllers for multiple-input/multiple-output time-delay systems

○非 梅 業挙 (群馬大学), 正 佐藤 桂司 (群馬大学)
正 山田 功 (群馬大学)

Yeju mei Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma
Keiji Satoh Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma
Kou Yamada Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma

Key words: repetitive controllers, time-delay, parametrization, free parameter, low pass filter

1 まえがき

本稿では，多入出力むだ時間系に対する安定化繰返し補償器のパラメトリゼーションについて検討する．安定化繰返し補償器のパラメトリゼーションとは周期外乱や不確かさの存在のもと，制御系を安定化し，周期目標入力に小さな定常偏差で追従する補償期のすべてを求める問題である．

これまで，一入力一出力むだ時間系に対する繰返し補償器のパラメトリゼーションは，山田、佐藤によって検討されている[5]．しかしながら，山田、佐藤の方法は一入力一出力の制御特性にもとづいて，むだ時間系に対する安定化繰返し補償器のパラメトリゼーションを求めているため，そのままでは多入力出力むだ時間系に拡張できないという問題がある．

本稿では，これまで検討されていない多入出力むだ時間系に対する安定化繰返し補償器のパラメトリゼーションを求める問題を検討する．

2 問題の記述

次式で表される制御系を考える．

$$\begin{cases} y &= G(s)e^{-sL}u \\ u &= C(s)(r-y) \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$G(s)e^{-sL}$ はむだ時間 $L>0$ を有する制御対象，$C(s)$ は補償器，$y\in R^p$ は出力，$r\in R^p$ は周期 $T>0\in R$ の周期目標入力で

$$r(t+T)=r(t)\ \ (\forall t\geq 0) \tag{2}$$

を満足するものとする．また，$G(s)\in R^{p\times p}(s)$ は既約で原点に零点を持たないものとする．

参考文献 [6] によると，出力 y が周期 T の周期目標入力 r に小さな定常偏差で追従するためには，補償器 $C(s)$ は

$$C(s)=C_1(s)+C_2(s)C_r(s) \tag{3}$$

と記述されなければならない．ここで，$C_1(s)$ と $C_2(s)\neq 0$ はプロパーな実有理行列，$C_r(s)$ は内部モデルであり，

$$C_r(s)=q(s)e^{-sT}(1-q(s)e^{-sT})^{-1} \tag{4}$$

と記述される．ここで，$q(s)\in R^{p\times p}$ はローパスフィルタで，$q(0)=I$ 満足する正則行列とする．周期 T の周期目標入力 r の周波数成分 ω_i に対し

$$1-q(j\omega_i)\simeq 0 \tag{5}$$

を満足する，出力 y が周期目標入力 r の周波数成分 ω_i に対し，小さな定常偏差が達成できる．

本稿で検討する問題は (1) 式の制御系を内部安定化する (3) 式で表される繰返し補償器のすべてを求めことである．

3 安定化繰返し補償器のパラメトリゼーション

ここでは，(1) 式の制御系を安定化する (3) 式で表される繰返し補償器 $C(s)$ のすべてを求める問題を検討する．(3) 式で表される繰返し補償器 $C(s)$ を用いたとき，(1) 式の制御系が内部安定となる補償器に関して次の定理が成り立つ．

定理 1 *(1)* 式の多入出力むだ時間制御系を内部安定化する繰返し補償器のパラメトリゼーションは

$$\begin{aligned} &C(s)\\ &= \left(\tilde{X}(s)+D(s)Q(s)\right)\left(\tilde{Y}(s)-N(s)Q(s)\right)^{-1}e^{sL}\\ &= \left(Y(s)-Q(s)\tilde{N}(s)\right)^{-1}\left(X(s)+Q(s)\tilde{D}(s)\right)e^{sL} \end{aligned} \tag{6}$$

で表される．ただし，$N(s)\in RH_\infty$, $D(s)\in RH_\infty$, $\tilde{D}(s)\in RH_\infty$, $\tilde{N}(s)\in RH_\infty$ は $G(s)$ を RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子であり

$$\begin{aligned} G(s) &= N(s)D^{-1}(s)\\ &= \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \end{aligned} \tag{7}$$

を満足する．$\tilde{X}(s)\in RH_\infty$, $\tilde{Y}(s)\in RH_\infty$, $X(s)\in RH_\infty$, $Y(s)\in RH_\infty$ は

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} Y(s) & X(s)\\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D(s) & -\tilde{X}(s)\\ N(s) & \tilde{Y}(s)\end{bmatrix}\\ &= I\\ &= \begin{bmatrix} D(s) & -\tilde{X}(s)\\ N(s) & \tilde{Y}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(s) & X(s)\\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s)\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

を満足する関数とする，$Q(s)\in H_\infty$ は自由パラメータであり

$$\begin{aligned} Q(s) = &\{-X(s)(Q_1(s)-Q_3(s)e^{-sT})\\ &+Y(s)(Q_2(s)+Q_4(s)e^{-sT})e^{-sL}\}\\ &\{\tilde{D}(s)(Q_1(s)-Q_3(s))e^{-sT}\\ &+\tilde{N}(s)(Q_2(s)+Q_4(s)e^{-sT})e^{-sL}\}^{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

で記述される．ただし，$Q_1(s)\in RH_\infty$, $Q_3(s)\in RH_\infty$ は正則行列で，

$$Q_3(0)Q_1^{-1}(0)=I \tag{10}$$

を満足する，$Q_2(s)Q_1^{-1}(s)$, $Q_4(s)Q_3^{-1}(s)$ と $Q_3(s)Q_1^{-1}(s)$ はプロパーとする，$Q_2(s)\in RH_\infty$, $Q_4(s)\in RH_\infty$ は任意の行列である．また $Q_1(s), Q_2(s), Q_3(s), Q_4(s)$ は

$$Q_2(s)Q_1^{-1}(s)+Q_4(s)Q_3^{-1}(s)\neq 0 \tag{11}$$

を満足する．
定理1の証明には，次の補題を用いる．

補題 1 次式で表される制御系

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & G(s)u \\ u & = & -C(s)y \end{array}\right. \tag{12}$$

が内部安定化であるための必要十分条件は，補償器 $C(s)$ が

$$\begin{aligned} & C(s) \\ = & \left(\tilde{X}(s)+D(s)Q(s)\right)\left(\tilde{Y}(s)-N(s)Q(s)\right)^{-1} \\ = & \left(Y(s)-Q(s)\tilde{N}(s)\right)^{-1}\left(X(s)+Q(s)\tilde{D}(s)\right) \end{aligned} \tag{13}$$

と記述されることである， ただし，$N(s)\in RH_\infty$, $D(s)\in RH_\infty$, $\tilde{D}(s)\in RH_\infty$，$\tilde{N}(s)\in RH_\infty$ は $G(s)$ が RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子であり，*(7)* 式を満足する関数である．$\tilde{X}(s)\in RH_\infty$, $\tilde{Y}(s)\in RH_\infty$, $X(s)\in RH_\infty$，$Y(s)\in RH_\infty$ は *(8)* 式を満足する関数である．$Q(s)$ は漸近安定な関数である *[1]*.

補題 2 *(1)* 式の修正繰返し補償器 $C(s)$ が $G(s)e^{-sL}$ を安定化するならば，$\hat{C}(s)=C(s)e^{-sL}$ は *causal* な $G(s)$ を安定化する．逆に，$\hat{C}(s)$ が $G(s)$ を安定化し，$C(s)=\hat{C}(s)e^{sL}$ が *(3)* 式で記述されるならば，$C(s)=\hat{C}(s)e^{sL}$ は $G(s)e^{-sL}$ に対する安定化修正繰返し補償器となる． □

定理1の証明は紙面の都合上省略する．

4 繰返し補償器の設計手順

ここでは，定理1を用いて，多入出力むだ時間系に対する安定化繰返し補償器の設計手順をまとめる．

Step 1) (7) 式から $G(s)$ を RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子 $N(s), D(s), \tilde{N}(s), \tilde{D}(s)$ を求める．

Step 2) (8) 式から $\tilde{X}(s)$, $\tilde{Y}(s)$, $X(s)$，$Y(s)$ を求める．

Step 3) 定理1から，自由パラメータ $Q(s)$ は $Q(s)\in H_\infty$ を満足しなければならない．つぎに，(9) 式の $Q_i(s)(i=1,\ldots,4)$ の設計手順を与える．

(a) 参考文献 [6] から，ローパスフィルタ $q(s)$ が

$$I-q(j\omega)\simeq 0(0<\omega<\omega_{max}) \tag{14}$$

を満足するならば，周期目標入力の周波数成分 ω に対し，出力 y が 周期目標入力 r に対し小さな定常偏差で追従するできる．$q(s)$ が広い周波数領域で (14) 式を満足するためには，$q(s)$ は安定で最小位相でなければならない．$q(0)=I$ を満足する $q(s)$ は (14) で記述されるので，$Q_3(s)$, $Q_1(s)$ は (10) 式を満足し，$q(s)$ は安定で最小位相となるように選ぶ．

(b) $Q_i(s)\in RH_\infty(i=1,\ldots,4)$ は $Q_i(s)\in RH_\infty$ を満足するので，$Q(s)$ の分母式 $det\{\tilde{D}(s)\ (Q_1(s)-Q_3(s)e^{-sT})+\tilde{N}(s)(Q_2(s)+Q_4(s)e^{-sT})e^{-sL}\}$ が閉右半平面に零点を持たないならば，$Q(s)$ は $Q(s)\in H_\infty$ を満足する．ナイキストの定理から，$det\{\tilde{D}(s)\ (Q_1(s)-Q_3(s)e^{-sT})+\tilde{N}(s)(Q_2(s)+Q_4(s)e^{-sT})e^{-sL}\}$ のナイキスト軌跡は原点を囲まなければ，自由パラメータ $Q(s)$ は閉右半平面に零点を持たない．すなわち，$Q_2(s)\in RH_\infty, Q_4(s)\in RH_\infty$ は $det\{\tilde{D}(s)(Q_1(s)-Q_3(s)e^{-sT})+\tilde{N}(s)(Q_2(s)+Q_4(s)e^{-sT})e^{-sL}\}$ のナイキスト軌跡が原点を囲まないように選ぶ．

(c) 周期目標入力の周波数成分 ω と異なる周波数成分 $\bar{\omega}$ の外乱が存在するとき，周波数成分 $\bar{\omega}$ の外乱を抑制するように．$Q_i(s)\in RH_\infty(i=1,\ldots,4)$ の設計法を与える．外乱 d から出力 y までの伝達関数は

$$\begin{aligned} S(s) \quad = \quad & (I-Q_3(s)Q_1^{-1}(s)e^{-sT})Q_1(s) \\ & \{\tilde{D}(s)(Q_1(s)-Q_3(s)e^{-sT})+\tilde{N}(s)(Q_2(s) \\ & +Q_4(s)e^{-sT})e^{-sT}\}^{-1}\tilde{D}(s) \end{aligned} \tag{15}$$

と記述される，(15) から $S(s)$ が $S(j\bar{\omega})\simeq 0$ を満足するならば，周波数成分 $\bar{\omega}$ の外乱 d は抑制される．(15) から周波数成分 $\bar{\omega}$ の外乱 d を抑制するために $Q_1(s)$ は $Q_1(j\bar{\omega})\simeq 0$ を満足する．

$$Q_1(s) \quad = \quad 1-\frac{1}{1+\tau s} \tag{16}$$

によって，ただし，τ は十分小さな正の実数である，$Q_1(j\bar{\omega})\simeq 0$ を満足するように選ぶ．

5 あとがき

本稿では，これまで検討されていない多入出力むだ時間系に対する安定化繰返し補償器のパラメトリゼーションを与えた．得られた安定化繰返し補償器のパラメトリゼーションから，繰返し補償器の設計手順を与えた．

参考文献

[1] 原，山本，多変数繰返し制御系の安定化-安定条件と安定化補償器のクラス，計測自動制御学会論文集，22-12, (1986), pp.1256-1261.

[2] H. Katoh and Y. Funahashi: A Design Method of Repetitive Controllers, Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers, Vol.32, No.12, pp.1601-1605, (1996)

[3] M. Vidyasagar: Control System Synthesis - A factorization approach -, MIT Press, (1985)

[4] K. Yamada, and T. Okuyama: A parameterization of all stabilizing repetitive controllers for linear minimum phase systems, Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers, Vol.36, No.4, pp.328-334, (1999)

[5] K. Yamada, K. Satoh, N. Iida and T. Okuyama: Control structure of all stabilizing repetitive controllers for non-minimum phase systems, Proceedings of the 4th Asian Control Conference, pp.753-758, (2002)

[6] 山本，原，繰返し制御系の内部モデル原理と安定化可能性，計測自動制御学会論文集, 22-8, (1987), pp.830-834.

[7] D.C. Youla, H. Jabr and J.J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part I, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-21, pp.3-13, (1976)