

## 329 面内弾性拘束を受ける薄肉板のカオス曲げ振動実験

Experiments on Chaotic Bending Vibrations of a Thin Plate  
Constrained by an In-plane Spring

正 永井健一 (群馬大) ○学 黒澤正樹 (群馬大院)

正 丸山真一 (群馬大) 正 山口誉夫 (群馬大)

Ken-ichi NAGAI, Gunma University, 1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma, 376-8515

Masaki KUROSAWA, Gunma University

Shinichi MARUYAMA, Gunma University

Takao YAMAGUCHI, Gunma University

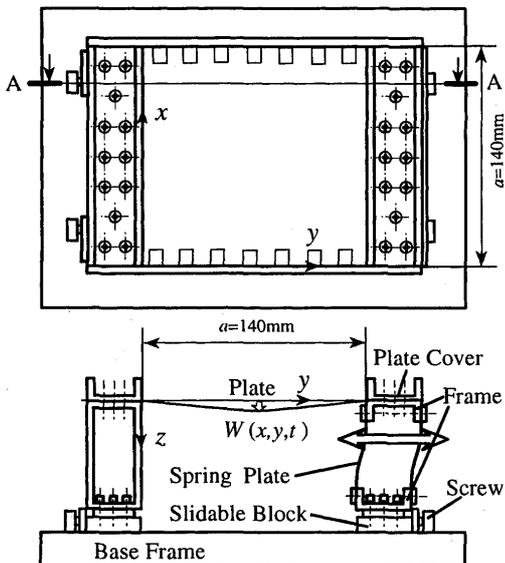
**Key Words:** Nonlinear vibration, Vibration of continuous system, Chaos, Shell

## 1. 緒言

はり, 板などの薄肉構造要素の振動応答は面内の拘束条件の影響を強く受ける<sup>(1)-(3)</sup>. 本研究では, 境界で面内弾性拘束を受ける正方形薄肉板のカオス振動について, 対向二辺が固定と単純支持の境界条件の下に実験を行った. まず薄肉板の基本特性として, 線形固有振動数, 復元力特性を調べた. 続いて薄肉板に周期横方向加速度を与え, 周波数応答曲線を得た. 特徴的なカオス振動応答について, 時間波形を記録し, 周波数分析を行うと共に, 最大リアプノフ指数を計算した.

## 2. 薄肉板及び支持装置

薄肉板とその支持装置を図1に示す. 燐青銅板を切り出し正方形に加工した後, 白色塗装を施したものを薄肉板として用いた. 実測により板厚  $h=0.24\text{mm}$ , 各辺長  $a=140\text{mm}$ , 質量  $m=8.6\times 10^{-3}\text{kg}$ , ヤング率  $E=64.5\text{GPa}$ , ポアソン比  $\nu=0.33$ , 密度  $\rho=7.47\times 10^3\text{kg/m}^3$  を得た. 図1に示すように, 板の面内方向に  $x, y$  軸, それに垂直に  $z$  軸を設定する. 薄肉板の境界は,  $y$  軸と直交する二辺がたわみについて固定支持される. 固定支持される二辺のうちの一端は, 面内変位について固定した. 他端は二枚の板ばねを用いた二重片持ちはり構造を用いることで,  $y$  軸方向に弾性拘束とした. 面内力は弾性拘束部のスライダの変位により調節し, ひずみゲージにより測定した.  $x$  軸と直交する二辺は, たわみに関して単純支持とした. 板の境界と支持枠に薄い粘着テープを表裏交互に貼り付けることで単純支持条件を得た.



Cross Section of A-A

Fig.1 Plate and fixture

## 3. 実験方法

実験では, 電磁式加振装置により試験片に周期横方向加速度を与え, レーザ変位計により板の振動応答を検出し, 記録分析した. 次の諸量を導入し実験結果を整理する.

$$[\xi, \eta] = [x, y]/a, \quad w = W/h, \quad n_y = N_c/N_{cr}, \quad \tau = \Omega_0 t,$$

$$\omega = 2\pi f/\Omega_0, \quad p_d = a_d \rho a^4/D, \quad q_s = Q_s a^2/Dh$$

$$\text{ここで } \Omega_0 = (1/a^2)\sqrt{DT/\rho h}, \quad D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

上式で  $x, y$  は座標で,  $\xi, \eta$  はその無次元量である.  $w$  は無次元たわみであり,  $n_y$  は  $y$  方向の面内圧縮力  $N_c$  を座屈荷重  $N_{cr}$  で除した量で圧縮荷重比とする.  $t$  は時間であり,  $\tau$  は無次元時間,  $\Omega_0$  は振動数に関する定数である.  $f$  は加振振動数であり,  $\omega$  は無次元の加振角振動数である.  $a_d$  は板に与える周期加速度の振幅であり,  $p_d$  は無次元加振振幅である.  $Q_s$  は静的な集中荷重で  $q_s$  はその無次元量である.  $D$  は薄肉板の曲げ剛性であり,  $\nu$  はポアソン比である.

## 4. 実験結果および考察

**4.1 面内力と固有振動数** 薄肉板の  $y$  方向に面内圧縮力を加え, 固有振動数を調べた. 結果を図2に示す. 縦軸は圧縮荷重比  $n_y$ , 横軸は  $(m, n)$  モードの固有角振動数  $\omega_{mn}$  である. ここで,  $m, n$  はそれぞれ  $x, y$  方向の半波数である. 面内圧縮力を逐次増加させると, 固有振動数は逐次低下し, 座屈荷重に対応する極小値となる. 座屈荷重よりも面内圧縮力が大きくなると, 固有振動数は上昇する. これは, 座屈後変形により薄肉板が曲率を持ち, 剛性が高くなるためである. 本研究では, 座屈後の  $n_y = 1.5$  の下で主に実験を行った. この時の薄肉板の固有振動数は次のとおりである.

$$\omega_{11} = 32.8, \quad \omega_{12} = 49.3, \quad \omega_{21} = 66.9, \quad \omega_{22} = 102$$

$\omega_{21} \approx 2\omega_{11}$  の関係を持ち, 内部共振現象が生じる可能性がある.

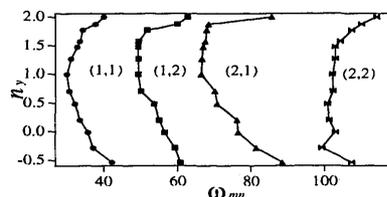


Fig.2 Natural frequencies of the plate under axial compression

**4.2 座屈後板の復元力特性** 図3に,  $n_y = 1.5$  において座屈後板の中央に集中荷重  $Q_s$  を与えた際の復元力特性を示す. 計測位置は  $\xi = 0.5, \eta = 0.6$  である. 縦軸は無次元集中荷重  $q_s$ , 横軸は無次元たわみ  $w$  である. なお, 自重ならびに面内圧縮力が作用した状態の静的平衡点を原点とした. 座屈後の薄肉板は, わずかに負の勾配を有する漸軟-漸硬型の復元力特性を有する.

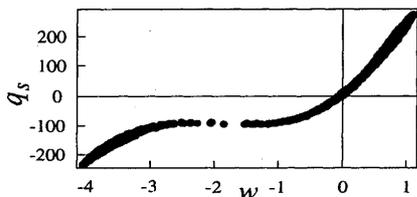


Fig.3 Static deflection of the plate under constrained load

4.3 座屈後板の周波数応答曲線

座屈後板に周期横方向加速度を与え、周波数掃引実験を行った。  $p_d=688$  における、周波数応答曲線の実験結果を図4に示す。計測点は  $\xi=0.6$ 、 $\eta=0.6$  とした。縦軸はたわみの実効値  $w_{rms}$ 、横軸は加振角振動数  $\omega$  である。周波数掃引方向を図中に矢印で示した。後述の分析に基づき、図中の記号  $C(m, n; j)$  は主要なカオス振動の種類を示している。  $m, n$  は対応する振動モードの次数、  $j$  は共振応答の種類を表している。

4.4 カオス領域の時間波形, 周波数分析

特徴的なカオス応答の実験結果を図5~7に示す。図中 (a) は時間波形, (b) は周波数分析結果である。時間波形の横軸は加振周期  $\tau_e$  を基準とした周期数  $\tau/\tau_e$  である。周波数分析結果の縦軸は振幅スペクトラム  $A$  [dB], 横軸は無次元分析周波数  $\omega_{sp}$  を対数表示したものである。図5に示した  $\omega=42.8$  における  $C(1,1;2/3)$  のカオス応答では、  $z$  方向の負の振幅が大きい不規則な応答を示している。また、動的飛び移りに起因するカオス応答の特徴を示している。周波数分析結果は加振振動数  $\omega$  と、その  $2/3$  倍に顕著なピークが見られる。このことから、(1,1)モードの  $2/3$  次亜分数次調波共振応答に起因するカオス振動であると考えられる。図6に示した  $\omega=51.4$  における  $C(1,1;1/2)$  の時間波形も動的飛び移りを伴うカオス振動の特徴を示している。周波数分析結果には加振振動数と、その  $1/2$  倍に顕著なピークが見られる。これより、(1,1)モードの  $1/2$  次分数次調波共振応答に起因するカオス振動であると考えられる。図7に示す  $\omega=66.4$  における  $C(1,1;1/2)$  の時間波形では、包絡線にうなりを有する不規則な変化が見られた。周波数分析結果では加振振動数  $\omega$  と、その  $1/2$  についてピークがとくに顕著である。この応答も(1,1)モードの  $1/2$  次分数次調波共振応答に起因している。また、加振振動数  $\omega$  と(2,1)モードの固有振動数が近接するため、  $\omega_{21}=2\omega_{11}$  の関係を満たす内部共振が誘起されている可能性がある。

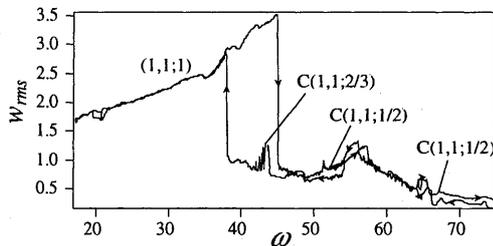


Fig.4 Frequency response curves of the plate ( $n_y = 1.5$ )

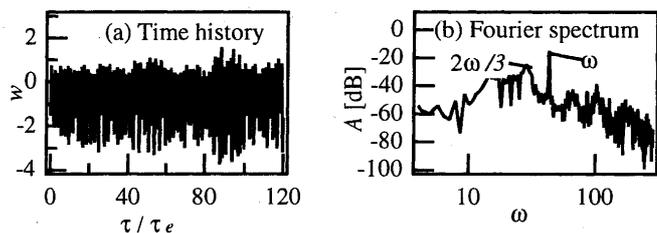


Fig.5 Chaotic response  $\omega=42.8, C(1,1;2/3)$

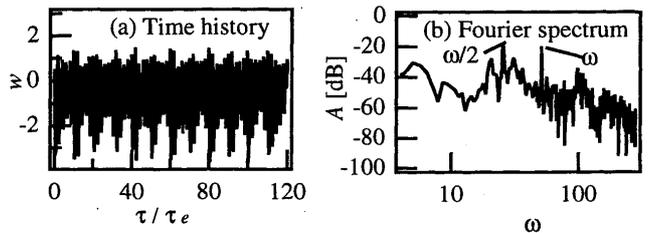


Fig.6 Chaotic response  $\omega=51.4, C(1,1;1/2)$

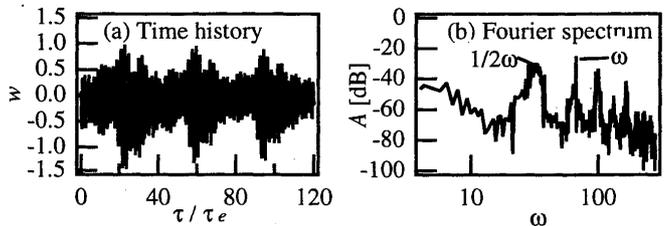


Fig.7 Chaotic response  $\omega=66.4, C(1,1;1/2)$

4.5 最大リアプノフ指数

Wolf<sup>4)</sup>の方法により時系列波形に対する最大リアプノフ指数  $\lambda_{max}$  を計算した。結果を図8に示す。図の縦軸は最大リアプノフ指数  $\lambda_{max}$ 、横軸は疑似位相空間を構成する際に仮定した埋め込み次元  $e$  である。  $\omega=42.8$  におけるカオス応答  $C(1,1;2/3)$  では  $\lambda_{max}$  が 1.3 であり、  $\omega=51.4$  でのカオス応答  $C(1,1;1/2)$  では  $\lambda_{max}$  が 0.74、  $\omega=66.4$  におけるカオス応答  $C(1,1;1/2)$  では  $\lambda_{max}$  が 0.52 という値を示した。  $\lambda_{max}$  が正値であるため、いずれの応答もカオス振動であることが確定できる。加振振動数が上昇するほど最大リアプノフ指数の値が小さくなるのがわかる。また、埋め込み次元  $e$  は 8 で収束することから、これらのカオス振動応答において支配的な自由度が 4 程度であると考えられる。

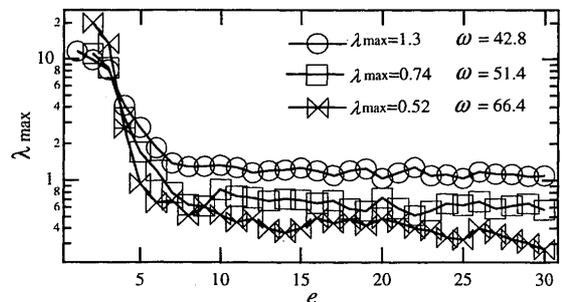


Fig.8 Maximum Lyapunov exponent of the plate

5. 結言

- (1) 座屈後板のカオス振動では、  $2/3$  次亜分数次調波共振応答および  $1/2$  次分数次調波共振応答が支配的である。
- (2) 座屈後板のカオス振動では、加振周波数が高いほどリアプノフ指数が低い値を示す。
- (3) 座屈後板のカオス振動において、支配的な振動モードの数は 4 程度である。

文献

- (1) Yamaguchi, T. and Nagai, K., Nonlinear Dynamics, 13 (1993) 250-277.
- (2) Nagai, K., Maruyama, S., Oya, M. and Yamaguchi, T., Computers and Structures, 82 (2004) 2607-2619.
- (3) 永井健一, 山口蒼夫, 鈴木央, 丸山真一, 機論, 69-679, C(2002), 565-572.
- (4) Wolf, A., et al., Physica, 16D(1985), 285-317.