4212 復元力にヒステリシス履歴特性を持つばね - 質量系の定常衝突振動解析

Analysis of Steady Impact Vibration in Spring-Mass System Having Hysteresis Collision Characteristics

○学　清水栄佑（首都大院）　正　熊野博之（首都大）　正　天摩勝洋（木更津高専）
Eisuke SHIMIZU and Hiroyuki KUMANO
Tokyo Metropolitan University,　1-1, Minami-Osawa, Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan
Katsuhiro TEMMA, Kisarazu National College of Technology

Key Words: Theory of Vibration, Nonlinear Vibration, Method of Vibration Analysis, Impact Vibration, Spring-Mass System, Hysteresis Collision, Resonance Curve

1. 緒言　質量体の弾性床面へ衝突に伴う反発力がヒステリシス履歴特性を持つ１自由度のばね－質量系に，任意周期関数励振が作用する定常衝突振動を解析する．解析は系にフーリエ級数解法を適用し，応答振動の厳密解を導出する．このとき衝突に伴う反発力は三角形の履歴特性をもつ断片線形系で近似した．ついで解析結果に基づいて数値計算を行い，主共振域において生起する応答振動を求め，ヒステリシス・ループの非線形性，励振振幅比をパラメータにとった共振曲線を作成し，これらに及ぼす諸因子の影響を数値的に明らかにした．さらに，運動方程式を直接解くシミュレータを用いたアナログ解析を行い，数値解とアナログ解の両結果はかなりよく一致することを示し，本解析法の有効性を検証した．

2. 理論解析

2.1 系の特性と運動方程式　取扱う系は Fig.1 に示すように質量 m, 粘性減衰係数 c を持ち，間げき e_1 により被衝突面へ弾性衝突する衝突振動系に変位による任意周期励振 $q(t)$ が作用するものである．このとき，衝突に伴う反発力 $f(z)$ は Fig.2 に示す三角形の断片線形で表されるヒステリシス履歴を有するものとする．相対変位を z, 時間を t, ばね定数を k とすれば，この系の運動方程式は次式で表される．

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+c\frac{dz}{dt}+kz+f(z)=-m\frac{d^2q(t)}{dt^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

2.2 フーリエ級数解法　系に作用する変位 $q(t)$ は任意周期関数であり，これをフーリエ級数に展開して次式で表す．

$$q(t)=\frac{f_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\cos n\omega t+g_n\sin n\omega t\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

いま本解析は定常振動を考え，Fig.2 に示す領域Ⅰは系が線形領域に滞留する区間，領域Ⅱ，Ⅲは系が非線形領域に滞留する区間であり，これを区間Ⅰ，Ⅱ，Ⅲにそれぞれ分割する．このとき位相角 θ の原点を励振の第１ピークにとり，α を後に決定する位相遅れ角とし，その原点を区間Ⅰの中央にとり，独立変数を時間 t から θ 変換し，位相角を次式のように選ぶ．

$$\theta=\omega t-\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

いま系がひとたび定常状態に達したとき，この反発力 $g(\theta)$ は θ に関する周期関数となり，これをフーリエ級数に展開し，次式で表す．

$$g(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

さて系が図２に示す反発力特性を持つ場合，その生起する応答振動は種々の波形が考えられる．本解析では主共振域において出現する質量が１周期中に１度だけ被衝突体に弾性衝突する応答振動波形に限定して解析する．このとき，定常振動において質量 m が境界点 $z=e_1$ を通過する条件，すなわち異なるタイプの区間の切替条件は次式で表される．ただし，式中の θ_1, θ_2 は衝突時間に対応する滞留位相角である．

$$\theta=-\theta_1\ ;\ z=e_1,\qquad \theta=0\ ;\ \frac{dz}{dt}=0,\qquad \theta=\theta_2\ ;\ z=e_2 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

2.3 解析式の導出　切替条件の式(5)および復元力の反発力の式(4)を運動方程式に導入することにより，変位励振 $q(t)$ が作用した場合の質量 m に関する無次元化した応答波形 z/e_1 は次式のように得られる．

$$\frac{z}{e_1}=1+\frac{\left[\begin{array}{l}(\cos\theta-\cos\theta_1)+\sum_{n=2}^{\infty}M_n\left(u_n'N-x_n\cos\phi_n+y_n\sin\phi_n\right)\left(\cos n\theta-\cos n\theta_1\right)\\ +\sum_{n=2}^{\infty}M_n\left(v_n'N-x_n\sin\phi_n-y_n\cos\phi_n\right)\left\{\left(\sin n\theta+\sin n\theta_1\right)-n\left(\sin\theta+\sin\theta_1\right)\right\}\end{array}\right]}{-\frac{x_0}{2}+\cos\theta_1+\sum_{n=2}^{\infty}M_n\left\{\begin{array}{l}\left(u_n'N-x_n\cos\phi_n+y_n\sin\phi_n\right)\cos n\theta_1\\ -\left(v_n'N-x_n\sin\phi_n-y_n\cos\phi_n\right)\left(\sin n\theta_1-n\sin\theta_1\right)\end{array}\right\}} \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

さらに，応答変位が式(6)で表されるとき，相応する励振振幅比 f_1/e_0 および位相遅れ角 α はそれぞれ次式のように導出される．

$$\frac{f_1}{e_1}=\frac{1}{\cos(\alpha-\phi_1)}\frac{N}{-\frac{x_0}{2}+\cos\theta_1+\sum_{n=2}^{\infty}M_n\left\{\begin{array}{l}\left(u_n'N-x_n\cos\phi_n+y_n\sin\phi_n\right)\cos n\theta_1\\ -\left(v_n'N-x_n\sin\phi_n-y_n\cos\phi_n\right)\left(\sin n\theta_1-n\sin\theta_1\right)\end{array}\right\}} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left[\frac{\left\{-x_1\sin\phi_1-y_1\cos\phi_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M_n}{M_1}\left(v_n'N-x_n\sin\phi_1-y_n\cos\phi_1\right)\right\}}{\frac{1}{M_1}+x_1\cos\phi_1-y_1\sin\phi_1}\right]+\phi_1 \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

ここに，簡単化のため，以上の式(6)～(8)において次式のような無次元量および係数を導入した．

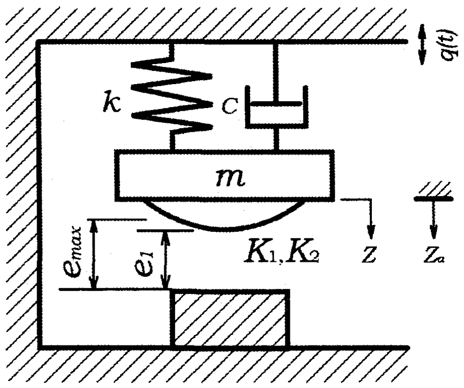


Fig.1　Dynamical model for impact vibration system

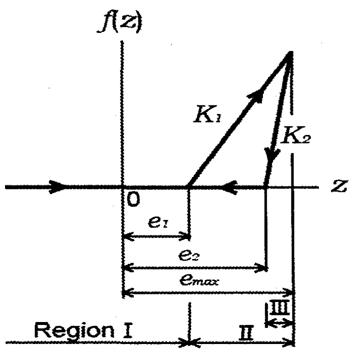


Fig.2　Characteristics of restitution force with hysteresis

$$\left.\begin{array}{l} M_n = 1\Big/\sqrt{\left(1-n^2\Omega^2\right)^2+\left(2n\zeta\Omega\right)^2} \\ N = 1/M_1 + x_1\cos\varphi_1 - y_1\sin\varphi_1 \\ \varphi_n = \tan^{-1}\left\{\left(2n\zeta\Omega\right)\Big/\left(1-n^2\Omega^2\right)\right\} \end{array}\right\} \qquad (n = 2,3,4,\cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

以上の解析により得られた式(6)〜式(8)はすべて振動数比 Ω, 質量 m の非線形区間の滞留位相角 θ_1, θ_2 および位相遅れ角 α の四つのパラメータのほかに，独立した無次元フーリエ係数 x_n $\{x_n=a_n/(k\Gamma)$，Γ：応答の基本波の余弦部分の振幅$\}$，y_n $\{y_n=b_n/(k\Gamma)\}$で表されたことになる．したがってこれらの無次元係数 x_n，y_n が決定されれば，質量の応答変位波形 z/e_1 は式(6)から，そのときの相応する励振振幅比 f_1/e_1 および位相遅れ角 α は式(7)，式(8)からそれぞれ得られる．

2.4 無次元係数の決定　無次元フーリエ係数 x_n, y_n は復元力の断片線形特性を満足するように決定されなければならない．この条件より，次の無限連立１次方程式が得られる．

$$x_m + \sum_{n=2}^{\infty}\left(XB_{mn}x_1 + XA_{mn}x_n + YB_{mn}y_1 + YA_{mn}y_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} I_{mn} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots) \quad \cdots(10)$$

$$y_m + \sum_{n=2}^{\infty}\left(XD_{mn}x_1 + XC_{mn}x_n + YD_{mn}y_1 + YC_{mn}y_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} J_{mn} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

したがって式(10)，(11)を連立させて解き，x_n，y_nが決定される．なお，式中の係数 $XA_{mn}, XB_{mn}, YA_{mn}, \cdots, J_{mn}$などは $\Omega, \alpha, \theta_1, \theta_2$ をパラメータとして決定される定数項である．

3. 数値結果とアナログ結果との比較および数値計算例

以上の解析結果に基づいて数値計算を行った．フーリエ級数の項数は収束性を勘案し，20 項まで取った近似計算としたが，収束性は十分である．解析結果を検証するため，解析モデルに対応する式(1)の運動方程式を直接解くアナログ・シミュレータを用いてアナログ解を求めた．

Fig.3 は数値計算結果とアナログ結果を比較した共振曲線を示すが，両結果はかなりよく一致する．図中の記号●は質量 m が床面へ弾性衝突する境界点である．m が床面へ弾性衝突すると，共振曲線は右傾化して大きな非線形挙動を示す．共振曲線の右側 Ω=1.03~1.08 は背骨曲線の傾きが負で不安定領域であり，アナログ値は跳躍現象が発生し，解は得られない．アナログ解はほぼ Ω>1.1 となると，線形振動へ跳躍する．

Fig. 4 は，系の非線形性 K_1/k をパラメータにとった場合の共振曲線を示す．K_1/k が大きくなるほど，共振曲線は右傾化し，最大振幅が増大する．

Fig.5 は励振振幅比 f_1/e_1 をパラメータにとった共振曲線を示す．f_1/e_1 が大きくなるほど，振幅と共振域は増大する．

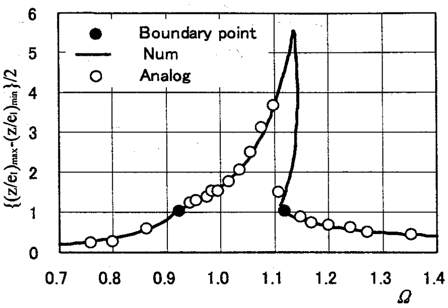
Fig.6 は Fig.5 の共振曲線上の点(a)，(b)における励振 $q(t)$ に対する応答変位，反発力の波形を示す．

4. 結言

(1) 任意周期関数励振を受ける１自由度ばね - 質量系の解析モデルを設定し，衝突体が被衝突物体に弾性衝突するとき，被衝突体からの反発力はヒステリシス・ループの履歴特性を三角形の非対称断片線形系で近似した衝突振動の解析モデルを設定した．ついでこの系にフーリエ級数解法を適用し，生起する応答振動の厳密解を導出した．

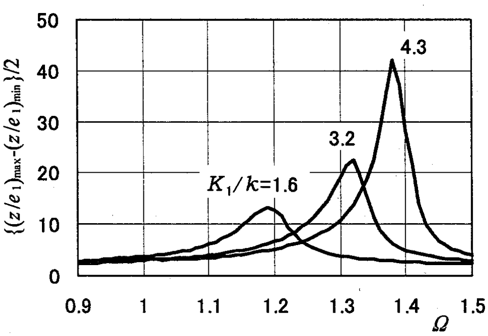
(2) (1)の解析結果に基づいて数値計算を行い，応答変位波形，反発力波形を求め，応答振動の衝突による非線形性，励振振幅比をパラメータに採った共振曲線を作成し，共振曲線に及ぼす諸因子の影響を数値的に明らかにした．

(3) (2)から得られた解析結果を検証するため，アナログ・シミュレータによる解析を行い，本数値計算と比較してかなりよく一致することを示し，本解析法の有効性を検証した．



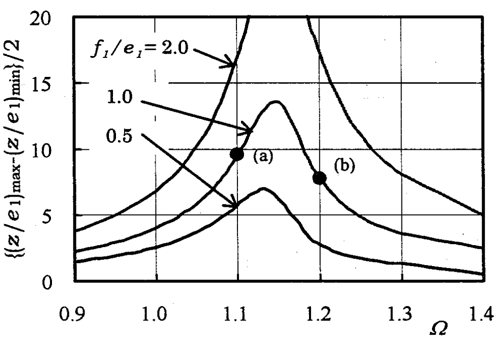
$\{q(t)=\cos\omega t,\ K_1/k=1.0,\ K_2/k=1.0,\ f_1/e_1=0.2,\ \zeta=0.0216\}$

Fig. 3 Resonance curve for comparing numerical result with experimental ones



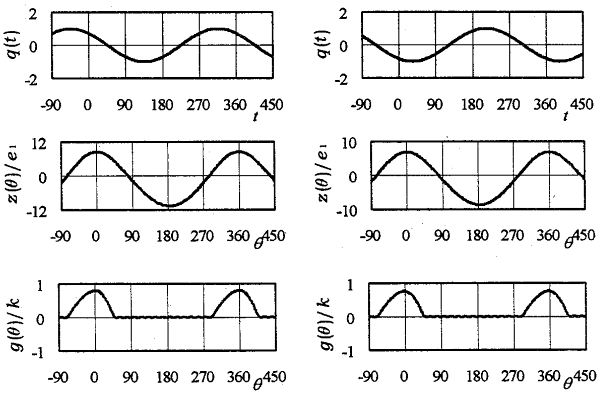
$\{q(t)=\cos\omega t+\sin 2\omega t,\ K_2/k=5.0,\ f_1/e_1=0.8,\ \zeta=0.01\}$

Fig. 4 Resonance curves in the case when spring constant ratio K_1/k in held parameter



$\{q(t)$=cosωt,　K/k_1=1.0,　K/k_2=2.0,　ζ=0.02$\}$

Fig. 5 Resonance curves in the case when amplitude ratio f_1/e_1 of excitation in held parameter



(a) Ω=1.1,　θ_1=69.64°，θ_2=47.74°，α=44.6°　(b) Ω=1.2,　θ_1=69.55°，θ_2=47.00°，α=147°

Fig. 6 Each waveform of resulting displacement and restitution force contrasted with exciting force