

## 4215 二連弦で支持された剛体棒の振動系における非線形連成振動の解析

## Analysis on nonlinear coupled vibrations of a system of a rigid rod supported by parallel strings

正 丸山 真一 (群馬大)      ○ 学 福富 慎己 (群馬大)

正 永井 健一 (群馬大)      正 山口 誉夫 (群馬大)

Shinichi MARUYAMA, Gunma University

Masami FUKUTOMI, Gunma University

Ken-ichi NAGAI, Gunma University

Takao YAMAGUCHI, Gunma University

**Key Words**: Parallel strings, Chaos, Nonlinear Vibrations, Wheeling, Pitching, Coupled Vibrations

## 1. 緒言

軽量で高強度な要素の一つに弦がある。弦は複数本張り渡すと、高弾性支持要素として使用できる。しかし、共振状態では、横たわみと軸方向の伸縮が連成し、非線形振動が生じる。弦の非線形振動では、振れ回りが生じることがある。さらに、二本の弦に剛体が支持された系には、ピッチングが生じる。これらの複数の運動形態の連成振動を解明することは工学上重要な課題である。本研究では、二連弦に支持された剛体棒の振動系の非線形連成振動について解析を行った。カオス振動の発生領域や、弦間距離および剛体棒重心の非対称性による振動挙動の変化について分析を行った。

## 2. 基礎式および解法

図1に解析モデルを示す。初期軸引張変位  $2U_0$  を与えた二本の平行な弦に、剛体棒を橋渡すように垂直に固定する。弦の軸方向を  $x$  軸、剛体棒の長手方向を  $y$  軸、それらと垂直な方向を  $z$  軸とする。系の  $z$  軸方向に周期加振加速度  $a_s \cos \Omega t$  と重力加速度  $a_g$  が作用する。剛体棒の幅  $L_d$  を含まない弦の自然長を  $2L$ 、一端から剛体棒までの距離を  $L_1 + L_d/2$ 、弦の断面積を  $A$ 、密度を  $\rho$ 、ヤング率を  $E$ 、全長を  $L_b$ 、質量を  $M$ 、剛体棒の重心から弦1弦2までの距離をそれぞれ  $S_1$ 、 $S_2$ 、実験において  $y$  方向変位の計測のために剛体棒両端に取り付けた薄板の質量を  $M_a$  とする。剛体棒重心の  $y$  軸方向の変位を  $V$ 、 $z$  軸方向の変位を  $W$ 、剛体棒の傾き角を  $\theta$  とする。系の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{,\tau\tau} + C_{11}V + D_{133}\theta^2 + E_{1111}V^3 + E_{1122}VW^2 + E_{1123}VW\theta + E_{1133}V\theta^2 &= 0 \\ W_{,\tau\tau} + C_{22}W + C_{23}\theta + E_{2112}V^2W + E_{2113}V^2\theta + E_{2222}W^3 \\ &+ E_{2223}W^2\theta + E_{2233}W\theta^2 + E_{2333}\theta^3 - (p_s + p_d \cos \omega\tau) = 0 \\ \theta_{,\tau\tau} + C_{33}\theta + C_{32}W + D_{313}V\theta + E_{3223}W^2\theta + E_{3112}V^2W \\ &+ E_{3113}V^2\theta + E_{3222}W^3 + E_{3223}W\theta^2 + E_{3333}\theta^3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、上式の係数は次に示される。

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{1}{m_a(1-\lambda_b^2)}, \quad C_{23} = \frac{C_{32}}{12} = -\frac{\lambda_s}{m_a(1-\lambda_b^2)}, \quad C_{33} = \frac{12(l_s^2 + \lambda_s^2)}{m_a(1-\lambda_b^2)}, \\ D_{133} &= \frac{D_{313}}{24} = \frac{\alpha\lambda_s}{2m_a l_b(1-\lambda_b^2)}, \quad E_{1111} = E_{1122} = E_{2112} = E_{2222} = \frac{\alpha^2(1+3\lambda_b^2)}{2\varepsilon_0 m_a(1-\lambda_b^2)^3}, \end{aligned}$$

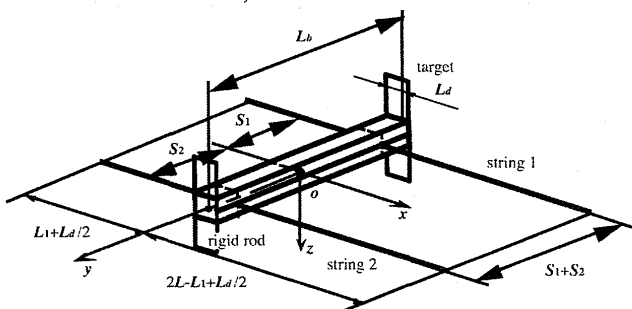


Fig.1 A rigid rod attached in parallel strings

$$E_{1123} = 2E_{2113} = \frac{2}{3}E_{2223} = \frac{E_{3112}}{6} = \frac{E_{3222}}{6} = -\frac{\alpha^2\lambda_s(1+3\lambda_b^2)}{\varepsilon_0 m_a(1-\lambda_b^2)^3},$$

$$E_{1133} = \frac{E_{2233}}{3} = \frac{E_{3113}}{12} = \frac{E_{3223}}{36} = \frac{\alpha^2(l_s^2 + \lambda_s^2)(1+3\lambda_b^2)}{2\varepsilon_0 m_a(1-\lambda_b^2)^3},$$

$$E_{2333} = \frac{E_{3233}}{9} = -\frac{\alpha^2\lambda_s(3l_s^2 + \lambda_s^2)(1+3\lambda_b^2)}{2\varepsilon_0 m_a(1-\lambda_b^2)^3},$$

$$E_{3333} = \frac{6\alpha^2(l_s^4 + 6l_s^2\lambda_s^2 + \lambda_s^4)(1+3\lambda_b^2)}{\varepsilon_0 m_a(1-\lambda_b^2)^3}$$

ここで導入した無次元量と諸量を以下に示す。

$$w = \frac{W}{\alpha L}, \quad v = \frac{V}{\alpha L}, \quad \theta = \frac{l_b \Theta}{\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{a_s(M+2M_a)}{2EA}}, \quad \tau = \Omega_0 t,$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{4EA\varepsilon_0}{ML}}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad \lambda_b = \frac{L_1 - L}{L}, \quad l_b = \frac{L_b}{L}, \quad l_s = \frac{S_1 + S_2}{2L_b},$$

$$\lambda_s = \frac{S_1 - S_2}{2L_b}, \quad p_s = \frac{\{(M+2M_a) + 2\rho LA\}a_s}{4\alpha\varepsilon_0 EA},$$

$$p_d = \frac{\alpha^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho LA}{2\alpha\varepsilon_0 EA}, \quad m_a = 1 + 2\frac{M_a}{M} + \frac{\rho LA}{M},$$

$$m_b = 1 + 6\frac{M_a}{M} + \frac{\rho LA(S_1^2 + S_2^2)}{2J}, \quad J = \frac{ML_b}{12}$$

解析ではまず、式(1)において時間変動項を無視し、重力と初期軸引張変位による静的変位  $\bar{v}$ 、 $\bar{w}$ 、 $\bar{\theta}$  を求める。次に静的平衡位置からの動的な変位  $\tilde{v}$ 、 $\tilde{w}$ 、 $\tilde{\theta}$  に関する連立非線形方程式を導く。さらに、静的平衡位置周りの微小振動における線形固有振動数  $\omega_i$  ( $i=1,2,3$ ) および対応する固有振動形を定める。

固有振動形に基づく基準座標  $b_i$  を用いて、 $\tilde{v}$ 、 $\tilde{w}$ 、 $\tilde{\theta}$  に関する非線形方程式を変換すると、次の基準形の方程式を得る。

$M(b_i) = b_{i,\tau\tau} + \omega_i^2 b_i + \sum_{j,k} \hat{D}_{ijk} b_j b_k + \sum_{j,k} \hat{E}_{ijk} b_j b_k b_l - F_i p_s \cos \omega\tau = 0$

$$(i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2)$$

式(2)より、調和バランス法を用いて非線形周期応答を求める。さらにルンゲ・クッタ法により数値積分を行い、カオス振動を含む時間応答を得る。

## 3. 数値解析結果及び考察

**3.1 計算条件** 過去の実験<sup>(1)</sup>での諸量と試験片の基本特性を参考にして、解析に用いるパラメータを次のように決定した。

$$\alpha = 16.4 \times 10^{-3}, \quad \varepsilon_0 = 2.52 \times 10^{-3}, \quad \lambda_b = -0.342, \quad l_b = 0.768,$$

$$\Omega_0 = 402, \quad m_a = 1.03, \quad m_b = 1.08, \quad p_s = 53.3 \times 10^{-3},$$

$$p_d = 54.4 \times 10^{-3}, \quad l_s = 0.3054, \quad \lambda_s = 2.0 \times 10^{-3}$$

この無次元パラメータの値を中心にパラメータを変化させ、固有振動数、固有振動モードや非線形振動の形態を調べた。

**3.2 固有振動数, 固有振動モード** 二弦間の距離に対応する  $l_s$ , および剛体棒重心位置の非対称性を表わす  $\lambda_s$  と, 固有振動数  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  との関係を図 2(a) に示す. 図より複数の固有振動数が接近するパラメータの組み合わせがあり, その付近では内部共振現象の発生が予想される. パラメータの値によらず固有振動数が変化しない振動モードは,  $y$  方向の並進運動が主体である. 固有振動数が接近するパラメータ近傍での振動モードの変化を図 2(b) に示す. 固有振動モードにおいて,  $\lambda_s$  を一定にした左図では,  $l_s$  が小さいときには  $w$  と  $\theta$  が連成したモードであるが,  $l_s$  が増加すると  $w$  の割合が増加し,  $z$  方向並進変位  $w$  主体のモードへ移行する. 右図の,  $l_s$  を一定にした場合には, 並進モードから連成モードに変化していく.

**3.3 非線形振動の応答** 数値積分により, 時系列波形を求め, 剛体棒の重心と弦 2 上で  $y$ - $z$  方向変位のリサージュ図を図 3 に示した. 図 3(a) の  $\omega=1.005$  では  $z$  方向のみに並進運動する周期応答であるが, 図 3(b) の  $\omega=1.105$  では  $y$  方向への変位が生

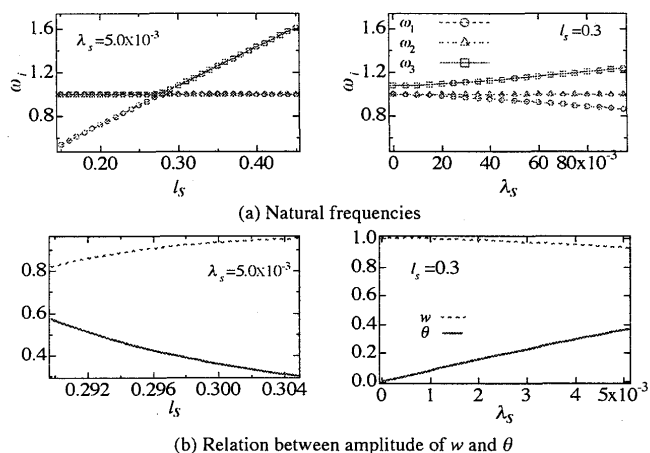


Fig.2 natural frequencies and Relation between amplitude of  $w$  and  $\theta$

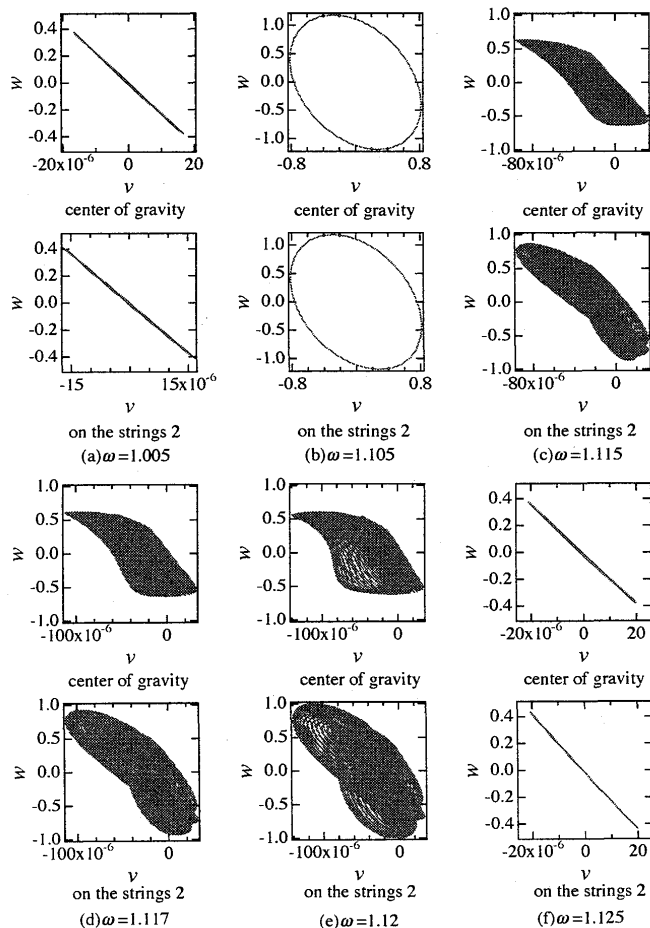


Fig.3 Trajectory of the rigid rod in  $y$ - $z$  plane

じ二連弦に触れ回りが生じている. 重心と弦上の変位の差は非常に小さく, ピッチングは生じていない. 図 3(c)~(e) の  $\omega=1.115, 1.117, 1.12$  におけるリサージュ図は重心と弦上の変位に差があり, ピッチングの発生を示すと同時に, 非周期的な変動を生じている. 図 4 に対応するポアンカレ写像図を示す. 縦軸は速度  $w_{\text{dot}}$ , 横軸は無次元変位  $w$  である. まず, 図 4(a) より  $\omega=1.115$  では, 写像図は一本の閉じた曲線になり, 概周期振動であることがわかる.  $\omega=1.117$  では, 図 4(b) の写像図が線ではなく分散していることから, カオス振動の発生が確認できる.  $\omega=1.12$  では図 4(c) より, 再び概周期振動が現れている. さらに図 3(f) より  $\omega=1.125$  では,  $z$  方向のみに振動する周期応答となる. これらより, 振動の形態が加振振動数の上昇にともない周期振動  $\rightarrow$  概周期振動  $\rightarrow$  カオス振動  $\rightarrow$  概周期振動  $\rightarrow$  周期振動と変化することが分かった. 図 5 は, 非周期応答の発生する振動数領域を示している. 縦軸は  $\lambda_s$  である. 横軸は, 無次元振動数  $\omega$  である. (a)~(f) は弦間距離  $l_s$  を 0.3 から 0.3065 まで変化させたものである. カオス振動の振動数領域は, 非対称性  $\lambda_s$  による影響をほとんど受けず, 一定の振動数  $\omega=1.117$  付近で生じる. 概周期振動の発生領域は  $\lambda_s$  の増加とともに低振動数側へと移動する. なお, 弦間距離  $l_s$  によるカオス振動発生領域への影響も小さく, 概周期振動の発生領域は  $l_s$  の増加とともに振動数の高い方へと領域を狭めつつ移動する.

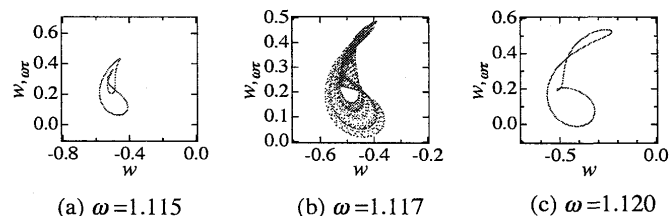
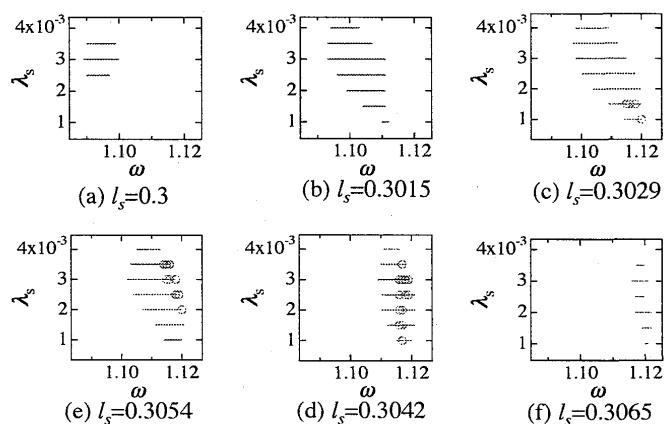


Fig.4 Poincaré map



Quasi periodic response — Chaotic response ○

Fig.5 Instability regions of the chaotic response

#### 4. 結言

- (1) 加振振動数の上昇により振動形態が, 並進運動または振れ回りを伴う周期振動からピッチングを伴う概周期振動やカオス振動, そして周期振動へと変化する.
- (2) 概周期振動が発生する振動数領域は剛体棒重心位置の非対称性や, 弦間距離により変化するが, カオス振動が現れるのはほぼ一定の振動数である.

#### 文献

- (1) 永井, 丸山, 山口, 吉沢, 機構論 No. 04-1, Vol.7 (2004) pp. 185-186