

むだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器の設計法

A Design Method for Robust Stabilizing Simple Multi-Period Repetitive Controllers for Time-Delay Plants

○学 李 楠 (群馬大学大学院) , 学 小林 雅彦 (群馬大学大学院) , 正 村上 岩範 (群馬大学大学院)
正 安藤 嘉則 (群馬大学大学院) , 正 山田 功 (群馬大学大学院)

Nan Li Graduate school of Engineering, Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma
Masahiko Kobayashi Graduate school of Engineering, Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma
Iwanori Murakami Graduate school of Engineering, Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma
Yoshinori Andou Graduate school of Engineering, Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma
Kou Yamada Graduate school of Engineering, Gunma University, 1-5-1 Tenjincho, Kiryu, Gunma

Key words: multi-period repetitive control, uncertainty, robust stability, parametrization, finite number of poles, time-delay

1 まえがき

本稿の目的は、不確かさをもつむだ時間系に対して補償器が多重周期繰返し補償器として働き、周期目標入力から出力までの伝達関数と外乱から出力までの伝達関数が有限個の極を持つ、むだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器のパラメトリゼーションを提案することである。

2 問題の記述

次式で表される一入力一出力の制御系を考える。

$$\begin{cases} y = G(s)u + d \\ u = C(s)(r - y) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $G(s)e^{-sL}$ は制御対象、 $L > 0$ はむだ時間、 $G(s) \in R(s)$ 、 $C(s)$ は補償器、 $u \in R$ は制御入力、 $y \in R$ は出力、 $d \in R$ は外乱、 $r \in R$ は周期 $T > 0$ の周期目標入力であり、

$$r(t+T) = r(t) \quad (\forall t \geq 0) \quad (2)$$

を満足するものとする。制御対象 $G(s)e^{-sL}$ の公称モデルを $G_m(s)e^{-sL_m} \in R(s)$ とする。ただし $G_m(s) \in R(s)$ 、 $L_m > 0$ であり、 $G(s)$ と $G_m(s)$ はともに、虚軸上に零点、極を持たないとして仮定する。さらに、 $G(s)$ と $G_m(s)$ の不安定極数が等しく、 $G(s)e^{-sL}$ と $G_m(s)e^{-sL_m}$ は、

$$G(s)e^{-sL} = G_m(s)(e^{-sL_m} + \Delta(s)) \quad (3)$$

と記述されるものとする。 $\Delta(s)$ は不確かさであり

$$|\Delta(j\omega)| < |W_T(j\omega)| \quad (\forall \omega \in R_+) \quad (4)$$

を満足する任意の関数である。ただし、 $W_T(s)$ は、不確かさの上界で、安定な実有理関数とする。(4) 式を満足する不確かさ $\Delta(s)$ を持つ制御対象 $G(s)e^{-sL}$ に対するロバスト安定条件は

$$\left\| \frac{C(s)G_m(s)W_T(s)}{1 + C(s)G_m(s)e^{-sL_m}} \right\|_{\infty} < 1 \quad (5)$$

を満足することである。参考文献 [1] によると、(1) 式の制御系の出力 y が周期目標入力 r に小さな定常偏差で追従する多重周期繰返し補償器 $C(s)$ は、

$$C(s) = C_0(s) + \frac{\sum_{i=1}^N C_i(s)e^{-sT_i}}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} \quad (6)$$

と記述される。ただし、 N は任意の正数、 $C_0(s)$ 、 $C_i(s) \neq 0$ ($i = 1, \dots, N$) は補償器、 $q_i(s) \in R(s)$ ($i = 1, \dots, N$) は $\sum_{i=1}^N q_i(0) = 1$ を満足するローパスフィルタで $T_i > 0 \in R$ ($i = 1, \dots, N$) である。(6) 式の多重周期繰返し補償器 $C(s)$ を用いると (1) 式の制御系の周期目標入力 r から出力 y までの伝達関数と外乱 d から出力 y までの伝達関数は、たとえ不確かさがなく、すなわち $\Delta(s) = 0$ としても、一般に無限個の極を持つ。実用的な観点から、入出力特性と外乱抑制特性の指定は容易であることが望ましい。以上の観点から、むだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器の定義をつぎのように与える。

定義 1 (むだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器)

補償器 $C(s)$ が以下の条件を満足するならば、その補償器 $C(s)$ をむだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器と呼ぶこととする。

1. 補償器 $C(s)$ が多重周期繰返し補償器として働く。すなわち、補償器 $C(s)$ が (6) 式で記述される。
2. $\Delta(s) = 0$ のとき、補償器 $C(s)$ を用いると、周期目標入力 r から出力 y までの伝達関数と外乱 d から出力 y までの伝達関数が有限個の極を持つ。
3. 補償器 $C(s)$ が (5) 式のロバスト安定条件を満足する。

本稿で検討する問題は、むだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器のパラメトリゼーションを求めることである。

3 ロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器のパラメトリゼーション

(5) 式を満足する補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションを求める問題は、以下の H_{∞} 制御問題と等しい。(5) 式を満足する補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションを求めるために、図 1 で表される制御系を考える。ここで $P(s)$ は、 w から z までの伝達関数が $C(s)G_m(s)W_T(s)/(1 + C(s)G_m(s)e^{-sL_m})$ となる一般化制御対象である。 $P(s)$ の状態空間表現は一般に、

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t - L_m) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) \end{cases} \quad (7)$$

と記述される。ただし $A \in R^{n \times n}$ 、 $B_1 \in R^n$ 、 $B_2 \in R^n$ 、 $C_1 \in R^{1 \times n}$ 、 $C_2 \in R^{1 \times n}$ 、 $D_{12} \in R$ 、 $D_{21} \in R$ である。また、 $P(s)$ は、以下の仮定を満足するものとする。

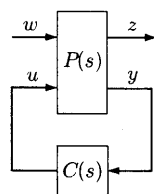


Fig. 1: Block diagram of H_∞ control problem

1. (C_2, A) 可検出, (A, B_2) 可安定
2. $\text{rank } D_{12} = 1, \text{rank } D_{21} = 1$
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + 1$
 $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + 1$
4. $C_1 A^i B_2 = 0 (i = 0, 1, 2, \dots)$.

これらの仮定のもとで、つぎの補題が成り立つ。

補題 1 (7) 式の一般化制御対象に対する H_∞ 問題の可解性は、

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = Aq(t) + B_1 w(t) + \tilde{B}_2 u(t) \\ z(t) = C_1 q(t) + D_{12} u(t) \\ \tilde{y}(t) = C_2 q(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \quad (8)$$

の H_∞ 問題のそれと等価である。ただし $\tilde{B}_2 = e^{-AL_m} B_2$ である。 $u(s) = C(s)\tilde{y}(s)$ が、(8) 式の一般化制御対象に対する H_∞ 制御則のとき、

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\tilde{y}(s)\} \quad (9)$$

は (7) 式の一般化制御対象に対する H_∞ 制御則である。ただし

$$\tilde{y}(s) = \mathcal{L}\left\{y(t) + C_2 \int_{-L_m}^0 e^{-A(\tau+L_m)} B_2 u(t+\tau) d\tau\right\} \quad (10)$$

である。

補題 1, 参考文献 [2] の結果を用いると、むだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器のパラメトリゼーションは、つぎの定理にまとめられる。

定理 1 (5) 式を満足するシンプル多重周期繰返し補償器 $C(s)$ が存在するならば、

$$\begin{aligned} X(A - \tilde{B}_2 D_{12}^\dagger C_1) + (A - \tilde{B}_2 D_{12}^\dagger C_1)^T X + X(B_1 B_1^T - \tilde{B}_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^T) X + (D_{12}^\dagger C_1^T)^T D_{12}^\dagger C_1^T &= 0 \\ Y(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T + (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) Y + Y(C_1^T C_1 - C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) Y + B_1 D_{21}^\dagger (B_1 D_{21}^\dagger)^T &= 0 \end{aligned}$$

$$\rho(XY) < 1$$

を満足する $X \geq 0, Y \geq 0$ があり、 $A - \tilde{B}_2 D_{12}^\dagger C_1 + (B_1 B_1^T - \tilde{B}_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^T) X, A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 + Y(C_1^T C_1 - C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2)$ は閉右半平面に固有値を持たない。このような X と Y を用いると、(5) 式を満足するむだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器のパラメトリゼーションは、

$$C(s) = C_{11}(s) + C_{12}(s)Q(s)(I - C_{22}(s)Q(s))^{-1}C_{21}(s) \quad (11)$$

で与えられる。ただし $C_{ij}(s) (i = 1, 2; j = 1, 2)$ は

$$\begin{bmatrix} C_{11}(s) & C_{12}(s) \\ C_{21}(s) & C_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ C_{c1} & D_{c11} & D_{c12} \\ C_{c2} & D_{c21} & D_{c22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_c &= A + B_1 B_1^T X - \tilde{B}_2 (D_{12}^\dagger C_1 + E_{12}^{-1} \tilde{B}_2^T X) \\ &\quad - (I - XY)^{-1} (B_1 D_{21}^\dagger + Y C_2^T E_{21}^{-1}) \\ &\quad (C_2 + D_{21} B_1^T X) \\ B_{c1} &= (I - XY)^{-1} (B_1 D_{21}^\dagger + Y C_2^T E_{21}^{-1}) \\ B_{c2} &= (I - XY)^{-1} (\tilde{B}_2 + Y C_1^T D_{12}) E_{12}^{-1/2} \\ C_{c1} &= -D_{12}^\dagger C_1 - E_{12}^{-1} \tilde{B}_2^T X \\ C_{c2} &= -E_{12}^{-1/2} (C_2 + D_{21} B_1^T X) \\ D_{c11} &= 0 \quad D_{c12} = E_{12}^{-1/2} \quad D_{c21} = E_{21}^{-1/2} \quad D_{c22} = 0 \\ E_{12} &= D_{12}^T D_{12} \quad E_{21} = D_{21} D_{21}^T \end{aligned}$$

である。 $Q(s) \in H_\infty$ は $\|Q(s)\|_\infty < 1$ を満足する任意の関数で

$$Q(s) = \frac{Q_{n0}(s) + \sum_{i=1}^N Q_{ni}(s)e^{-sT_i}}{Q_{d0}(s) + \sum_{i=1}^N Q_{di}(s)e^{-sT_i}} \quad (13)$$

$$Q_{ni}(s) = G_d(s)\bar{Q}_i(s) (i = 1, \dots, N) \quad (14)$$

$$Q_{di}(s) = -\frac{1}{1 + C_{11}(s)\bar{G}_m(s)} G_n(s)\bar{Q}_i(s) (i = 1, \dots, N) \quad (15)$$

と記述される。ただし、 $\bar{G}_m(s) = C_2(sI - A)^{-1}\tilde{B}_2$, $Q_{n0}(s) \in RH_\infty$, $Q_{d0}(s) \in RH_\infty$, $G_n(s) \in RH_\infty$ であり、 $G_d(s) \in RH_\infty$ は $-C_{22}(s) + (-C_{11}(s)C_{22}(s) + C_{12}(s)C_{21}(s))\bar{G}_m(s)$ を RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子で

$$\begin{aligned} \frac{G_n(s)}{G_d(s)} &= -C_{22}(s) + (-C_{11}(s)C_{22}(s) + C_{12}(s)C_{21}(s))\bar{G}_m(s) \end{aligned} \quad (16)$$

を満足する。 $\bar{Q}_i(s) \neq 0 \in RH_\infty (i = 1, \dots, N)$ は

$$\sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{Q_{di}(0) - C_{22}(0)Q_{ni}(0)}{Q_{d0}(0) - C_{22}(0)Q_{n0}(0)} \right\} = 1 \quad (17)$$

を満足する任意の関数である。

4 あとがき

本稿では、不確かさなむだ時間系に対するロバスト安定化シンプル多重周期繰返し補償器のパラメトリゼーションを提案した。

参考文献

- [1] Gotou, M., S. Matsubayashi, F. Miyazaki, S. Kawamura, and S. Arimoto, "A Robust System with an Iterative Learning Compensator and a Proposal of Multi-Period Learning Compensator," *J. of The Society of Instrument and Control Engineers*, 31-5, pp.367-374, 1987.
- [2] J.C. Doyle and K. Glover and P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem", *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-34, pp.831-847, 1989.