

GS1007 2個の円形弾性介在物を有する等方性弾性体の 準三次元問題の解析

Quasi-Three-Dimensional Problems for Isotropic Elastic Medium Which Has Two Circular Inclusions

○正 宮川 睦巳 (産技高専), 正 鈴木 拓雄 (産技高専)
正 田宮 高信 (産技高専), 正 志村 穰 (東京高専)

Mutsumi MIYAGAWA, Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology,
8-17-1, Minami-senju, Arakawa-ku, Tokyo

Takuo SUZUKI, Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology.

Takanobu TAMIYA, Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology.

Jyo SHIMURA, Tokyo National College of Technology

Key Words : Isotropic Elasticity, Quasi-Three-Dimensional Problems,
Two Circular Elastic Inclusions, Uniform Stresses

1. 緒 言

二次元弾性論に基づき、円形の弾性介在物を有する無限に広がった領域に、無限遠方より一様に応力が作用する問題は面内、面外荷重を問わず、その工学的な重要性ならびに他分野への応用性から、解析解を求める試みが行われてきている。

これらの単一の介在物が存在する問題から発展させて、複数の介在物が存在する問題については有限要素法、境界要素法など数値解析的手法によって解かれており、二次元弾性論に基づく一般解の形で解が得られていない。このため、例えば、有限要素法では離散化の方法に依存してしまうため、解析技術者の技能により計算結果の精度が異なる場合がある。

このことから、本研究では2個の円形介在物が存在する問題について定式化を行い、一般解を誘導する。この目的のため、森口⁽¹⁾および Sendecyk⁽²⁾らによる単一の介在物を有する面内問題の一般解を基本にする。そして、複数の介在物が存在する問題に拡張させるため、面外問題を取り扱った Honein⁽³⁾、および著者⁽⁴⁾の解析接続による手法を用いる。ここでの理論式は大きさや位置の異なる2個の円形弾性介在物を扱っており、介在物の弾性定数を特殊化することによって、空孔、または剛体介在物の問題も含め、系統的に包含したものとなっている。

2. 基礎方程式と基本解

2・1 応力と変位を求める公式 奥行き方向に対して形状変化のない無限に広がった領域を複素

変数 $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$) とし、対象となる応力、変位成分は、面内応力について、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ および面内変位 u_x, u_y である。また、 xy 平面に垂直方向 (奥行き方向) の座標を z とし、面外せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} および面外変位 u_z である。いずれも面内座標 (x, y) のみの関数である。

面内問題において、無限弾性媒体内の任意点における応力および変位を求める公式は森口⁽¹⁾による2つの応力関数 $\phi(z), \psi(z)$ を用いて、次式となる。

$$u_x - iu_y = \frac{1}{2G_M} [\kappa_M \overline{\phi(z)} - \{\bar{z}\phi'(z) - \phi'(z)\}] \quad (1)$$

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[\phi'(z)] - \operatorname{Re}[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \quad (2)$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}[\phi'(z)] + \operatorname{Re}[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im}[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \quad (4)$$

ここに、 $\kappa_M = 3 - 4\nu_M$ (平面ひずみ状態) となる。面外問題において、同様に任意点における応力、変位を求める公式は Honein⁽³⁾による複素関数 $\phi(z)$ を用いて次式のように与えられる。

$$\tau_{xz} + i\tau_{yz} = \phi'(z) \quad (5)$$

$$u_z = \frac{1}{G_M} \operatorname{Im}[\phi(z)] \quad (6)$$

ここに、プライム記号は複素変数による微分を意味し、 G_M, ν_M はそれぞれ媒体のせん断弾性係数、ポアソン比である。また Re, Im はそれぞれカッコ内の実部と虚部を示し、バー記号は複素数の共役を意味する。

2・2 無限弾性媒体内に円形弾性介在物を有する

問題の一般解 等方性弾性体では、面内問題と面外問題は連成しないことが知られている。ここでは、無限弾性媒体内において、面内問題における複素応力関数 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ が、面外問題では $\phi(z)$ が与えられている。Fig. 1 に示した円形境界 L_j 、中心 z_j 、半径 a_j において、介在物 j と媒体が完全結合されている場合、媒体と介在物との接合界面での境界条件を以下のように設定する。

$$\text{面内問題} \quad \tau_{r\theta}^M = \tau_{r\theta}^j, \sigma_r^M = \sigma_r^j, u_x^M = u_x^j, u_y^M = u_y^j. \quad (7)$$

$$\text{面外問題} \quad \tau_{rz}^M = \tau_{rz}^j, u_z^M = u_z^j. \quad (8)$$

ここに、上添字の M は媒体 (Matrix) を、また j は介在物 j (j^{th} Inclusion) を意味する。なお、本研究では $j=1, 2$ をとる。上記の境界条件を満たすように、鏡像原理を用いた解析接続を行うことにより、最終的に以下のような一般解が得られる。

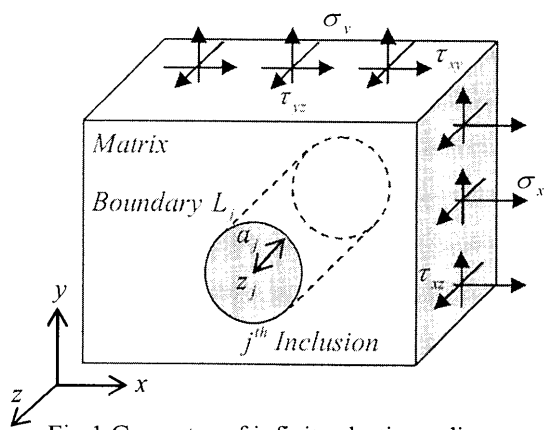


Fig.1 Geometry of infinite elastic medium with one or two circular elastic inclusions.

面外問題における媒体に対して

$$\phi_M = \phi(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \phi(M^n z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \phi(N^n z) + \hat{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \overline{\phi(A_1 N^n z)} + \hat{\alpha}_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \overline{\phi(A_2 M^n z)} \quad (9)$$

面外問題における介在物 1 に対して

$$\phi_{11} = (1 + \hat{\alpha}_1) \left\{ \phi(z) + \hat{\alpha}_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \overline{\phi(A_2 M^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \phi(M^n z) \right\} \quad (10)$$

面外問題における介在物 2 に対して

$$\phi_{12} = (1 + \hat{\alpha}_2) \left\{ \phi(z) + \hat{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \overline{\phi(A_1 N^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2) \phi(N^n z) \right\} \quad (11)$$

また、面内問題における一般解は以下の通りとなる。
面内問題における媒体に対して

$$\varphi_M = \varphi(z) \quad (12)$$

$$+ \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \overline{\chi_m(A_1 N^n z)} + \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_1 \alpha_2)^n \overline{\chi_m(A_2 M^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_1 \alpha_2)^n \varphi(M^n z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \varphi(N^n z)$$

$$\chi_M = \chi_m(z) \quad (13)$$

$$+ \beta_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_1 \alpha_2)^n \overline{\varphi(A_1 N^n z)} + \beta_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \overline{\varphi(A_2 M^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \chi_m(M^n z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \chi_m(N^n z)$$

面内問題における介在物 1 に対して

$$\varphi_{11} = (1 + \beta_1) \left\{ \varphi(z) + \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_1 \alpha_2)^n \overline{\chi_1(A_2 M^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_1 \alpha_2)^n \varphi(M^n z) \right\} \quad (14)$$

$$\chi_{11} = (1 + \alpha_1) \left\{ \chi_1(z) + \beta_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \overline{\varphi(A_2 M^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \chi_1(M^n z) \right\} \quad (15)$$

面内問題における介在物 2 に対して

$$\varphi_{12} = (1 + \beta_2) \left\{ \varphi(z) + \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \overline{\chi_2(A_1 N^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \beta_2)^n \varphi(N^n z) \right\} \quad (16)$$

$$\chi_{12} = (1 + \alpha_2) \left\{ \chi_2(z) + \beta_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_1 \alpha_2)^n \overline{\varphi(A_1 N^n z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_1 \alpha_2)^n \chi_2(N^n z) \right\} \quad (17)$$

なお、ここでは上式の具体的な関数の誘導方法と説明について省略する。

3. 結 語

本研究では無限弾性媒体中に 2 個の円形弾性介在物を有し、面内および面外方向に荷重が作用する問題の応力および変位について定式化を行い、一般解を誘導したものである。当日、ここで得られた一般解を用いて、無限遠方に一様な応力荷重が作用した問題の解析解と数値計算例について発表する予定である。

文 献

- (1) Moriguchi, S., Two Dimensional Elastic Theory (in Japanese), (1956), pp.1-77, Iwatani Ltd.
- (2) G.P.Sendeckyj, ELASTIC INCLUSION PROBLEMS IN PLANE ELASTOSTATICS, Int.J.Solids Structure, Vol.6, (1970), pp. 1535-1543.
- (3) E. Honein, T. Honein, and G. Herrmann, ON TWO CIRCULAR INCLUSIONS IN HARMONIC PROBLEMS, QUARTERLY OF APPLIED MATHEMATICS. Vol. L, No. 3 (1992), pp. 479-499.
- (4) Miyagawa, M., Suzuki, T., Shimura, J., Analysis of In-Plane Problems with Singular Disturbances for Isotropic Elastic Medium Which Has Two Circular Holes or Rigid Inclusions, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 75, No. 750 (2009), pp. 150-157.