

モンテカルロ・シミュレーション

Monte Carlo Simulation

鈴木 誠 (すずき まこと)

清水建設株式会社 技術研究所 センター所長

1. はじめに

実現象を、モデルを用いて模擬的に再現することを、シミュレーションという。その方法には大別して、理論的方法と実験的方法がある。理論的方法は数値シミュレーションと言われ、コンピュータの発達とともに大変有用な解析手段となってきた。模型実験などの実験的方法と同様に、数値シミュレーションもデータを得るために用いられることがほとんどであるが、実現象から直接得られるデータの代用として、あるいはそれを補完するためのデータとして利用される。このため、理論的方法は数値実験とも呼ばれることがある。

地盤工学では、基礎や地盤の挙動や応答を予測するためにシミュレーションが使われる。特に、コンピュータ・シミュレーションを用いて入力パラメータの変動に対する挙動や応答への感度を推定することができる。このように、シミュレーションは、種々の設計案の検討や最適設計案の決定のために利用されている。

入力パラメータが確定値ではなく確率分布が仮定されているような場合には、乱数を用いたシミュレーションが必要となる。モンテカルロ法 (Monte Carlo methods) とは、乱数を取り扱う技法の総称である。数値実験法であるモンテカルロ・シミュレーション (Monte Carlo simulation, 以下、MCS と記す) とは、1 回のシミュレーションで、確率分布に従って発生させた乱数の組を用い、このシミュレーションを何回も繰り返す技法を言う。ここでいう乱数とは、一般にコンピュータで作られる擬似乱数をさす。これを用いると 1 回ごとに乱数が異なる値の集合となるような複数の解の標本が得られる。そのため、MCS の結果は統計的に処理されるが、標本抽出理論と同様の問題を抱えることになる。すなわち、結果には標本誤差が含まれるため、有限個の標本による解は、厳密解ではない。そのため、分散低減法¹⁾などの工夫もなされている。

MCS は汎用性のあるものの、計算労力が大きいという難点があった。しかし、近年の計算機能力の飛躍的な向上、アルゴリズムの改良により、現実的な手段として MCS が用いられる場面が増えている。

2. 乱数の発生

MCS に用いる乱数としては、一般に、コンピュータ上で発生させた疑似乱数を利用している。これは同じ乱

数列を作り出すことができる反面、発生方法により若干傾向をもつことが多い。特に、発生数が増えると同じ乱数が繰り返して現れることもあり、利用に当たっては注意を要する。擬似乱数は、コンピュータ言語の関数として用意されていることが多く、ここでは専門書に委ねることにして、説明は省略する。これとは別に、電氣的にまったくランダムな乱数を発生するような装置も使われており、厳密さを要求する場合などに利用されている。

MCS の効率化のための方法としては、層別サンプリング^{2),3)}、負相関の方法^{2),3)}、ラテン方格法^{4),5)}などが知られている。これらはサンプルの偏りを減らすことによる改良法であるが、低確率の算定という意味ではこうした工夫だけでは効果が少ない。低確率を算定する方法としては重要度サンプリング (加重サンプリング)^{2),3)}が有名である。しかし、サンプリングのための密度関数の選び方に解の精度が依存するという問題がある。

また、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo methods, 以下、MCMC と記す)⁶⁾は、マルコフ連鎖に基づいて確率分布からサンプリングを行うアルゴリズムの総称である。ギブスサンプラーが代表的で、メトロポリス法、メトロポリス・ヘイスティング法などもこれに含まれる。MCMC は通常ベイズ統計学の枠組みにおいてよく用いられる。また、計算可能性の問題からある程度以上に複雑なモデルになると実装が不可能であるという欠点を抱えていたが、MCMC の出現によりほぼ克服された。MCMC は、任意の目標分布 (target distribution) $\pi(x)$ に従う乱数を発生させることができ、モンテカルロ積分を行うには非常に効率のよい乱数発生法である。

ここまでは、1 変数の乱数発生についての説明である。相互に相関をもった確率変数を表現する乱数を発生させるには、多少の工夫がいる。ここでは、コレスキー分解による方法を紹介する⁷⁾。相互に相関を持つ n 個の正規確率ベクトル $\mathbf{X}$ の共分散マトリクス $\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}$ を、コレスキー分解により三角形マトリクスの積の形、 $\mathbf{C}_{\mathbf{XX}} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ に分解する。ここで、 $\mathbf{L}$ は下三角形マトリクスである。

これを用いて、正規確率ベクトル $\mathbf{X}$ は $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{Z}$ で作成できる。ここで、 $\mathbf{Z}$ は平均値が 0、分散が 1 となる相互に独立な正規確率変数 n 個のベクトルである。すなわち、 $E[\mathbf{Z}] = 0$, $E[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T] = \mathbf{I}$ である。また、 $\mathbf{I}$ は単位マトリクスであるので、正規確率ベクトル $\mathbf{X}$ の共分散マトリクスは、 $E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = E[\mathbf{L}\mathbf{Z}(\mathbf{L}\mathbf{Z})^T] = \mathbf{L}E[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T]$

$L^T = C_{XX}$ となる。

この変換を用いれば、 N 値と内部摩擦角 ϕ のような相関を持つような地盤パラメータの発生だけでなく、空間的に相関性を有する地盤パラメータも発生させることができる。

3. 例題

モンテカルロ・シミュレーションを、有限要素法による斜面安定解析を円弧すべりモードに適用した例を示す。解析モデルとして、図-1に示すように統計的均質な地盤を想定した。弾性計算で、地盤の弾性係数は4900 kN/m²、ポアソン比は0.3、単位体積重量は16.7 kN/m³の確定値とした。内部摩擦角は無視して、粘着力は平均値19.6 kN/m²、変動係数0.3で、以下に示す自己相関関数 ρ を有する確率場とした。確率場とは、空間的変動を表した統計モデルで、時間的表現は確率過程と呼ばれるものである。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{5.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{1.0} \right)^2 \right\} \right] \quad \cdots (1)$$

ここで、 $\Delta x, \Delta y$ はそれぞれ水平・鉛直方向の距離を表している。各要素の粘着力の乱数は上記で示したコレスキー分解による方法を用いて作成する。実際には連続する確率場を要素に離散化するときには、要素の中で平均化(局所平均)することが望ましい。この場合も、局所平均を用いて、要素間の相関特性を算定した。

ここでは、シミュレーションの試行回数を100回とし、最小安全率となるようなすべり円弧を探索する。解析の結果、図-2に示すようにすべり円弧中心は、 $x=17.0 \sim 18.0$ に集中し、すべり円弧の半径にはばらつきは見られない。粘着力のみ考慮したことから、底部破壊のモードが支配的になった影響も大きい。次に、図-3に最小安全率のヒストグラムを示す。安全率が1.0を下回る破壊確率は0.11となった。

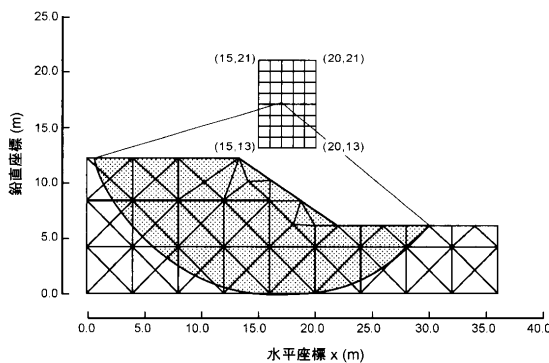


図-1 解析モデル

4. おわりに

モンテカルロ・シミュレーションの例題として、地盤パラメータの不確定性を確率変数としてモデル化し、挙動を確率論的に評価することができることを示した。今回は粘着力の空間的なばらつきのみを対象とし、すべり

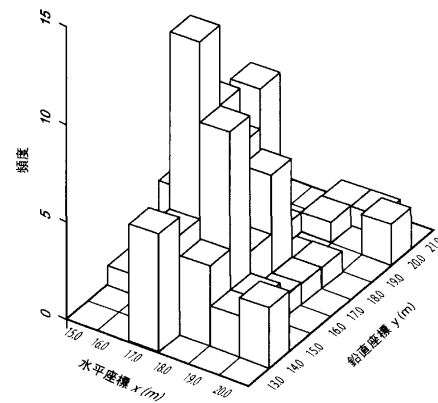


図-2 すべり円弧中心

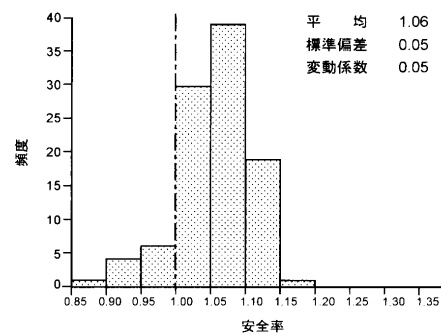


図-3 最小安全率(すべり円弧探索)

円弧上の安全率のばらつきを評価している。有限要素法などのシステムの入力パラメータを確率変数として扱えば、システムそのものは変更せずに、簡単に確率計算ができることがモンテカルロ・シミュレーションの長所であろう。ただ、求めたい確率が非常に小さくなると、試行回数も増加させる必要がある。たとえば、 10^{-6} を求めたいのであれば、 10^7 の試行回数が必要となってしまう。そのため、乱数の発生でも述べたように、重点サンプリングなどの工夫も考えられている。

参考文献

- 1) Ang, A. H.-S. and Tang W. H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Volume II Desision, Risk, and Reliability, John Wily & Sons, New York, N.Y., 1984.
- 2) 津田孝夫：モンテカルロ法とシミュレーション(三訂版), 培風館, 1995.
- 3) 伏見正則：確率的方法とシミュレーション, 岩波講座 応用数学, 1994.
- 4) 応用力学シリーズ 6, 構造物系の非線形・不確定モデリング, 日本建築学会, 1998.
- 5) Schueller, G. I., Bucher, C., Bourgund, U., Ouypornprasert, W., On Efficient Computational Schemes to Calculate Structural Failure Probabilities, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 4, No. 1, pp. 10~18, 1989.
- 6) Gilks, W. R., Richardson, S., Spiegelhalter, D. J., Markov chain Monte Carlo in practice, Chapman & Hall, 1996.
- 7) 星谷 勝・石井 清：構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986.

(原稿受理 2008.9.1)