

プログラミングで学ぶ有限要素法

5. 弾塑性モデルを用いた変形解析

渦岡良介 (うずおか りょうすけ)

徳島大学大学院教授 ソシオテクノサイエンス研究部

山川優樹 (やまかわ ゆうき)

東北大学大学院准教授 工学研究科

宮田喜壽 (みやた よしひさ)

防衛大学校准教授 システム工学群

3章で説明した変形解析では線形弾性モデルを用いたが、ここでは4章で説明した弾塑性モデルを用いる。それ以外は基本的に3章と同様であるので、材料モデルの違いにより解法やプログラムが異なる部分を中心に説明する。

5.1 支配方程式

ここでは図-3.1の一次元地盤モデルに関する境界値問題を対象とし、釣合い式(3.1)、境界条件の式(3.2)および式(3.3)、適合条件の式(3.4)も同様である。異なるのは構成式の式(3.5)であり、ここでは式(4.76)で示したアルゴリズム接線係数 \bar{D}^{ep} ($n+1$ は省略、以下接線係数)を用いて次式で表す。

$$\text{構成式: } \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \bar{D}^{\text{ep}} \quad (0 < z < H) \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

接線係数は式(4.82)で示したように圧密降伏応力の σ_c 関数であり、3章の式(3.5)のような定数ではない。なお、応力は4.3.2で述べた弾性予測子とリターンマッピングによる方法で計算する。弱形式および重み関数も式(3.6)および式(3.7)と同様である。

5.2 有限要素定式化

(1) 弱形式の離散化

用いる要素は3章と同様に3節点要素とする。有限要素近似を代入した解くべき弱形式は式(3.18)である。式(3.18)を改めて式(3.14)の要素内力・外力ベクトルを用いて図-3.1の地盤モデルについて表すと次式^{注1)}が得られる。

$$R_i = \sum_{e=1}^M F_i^{\text{int}(e)} - \sum_{e=1}^M F_i^{\text{ext}(e)} = F_i^{\text{int}} - F_i^{\text{ext}} = 0 \quad (i=2, \dots, N)$$

$$\{R\} = \{F^{\text{int}}\} - \{F^{\text{ext}}\} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

ここに、 $\{F^{\text{int}}\}$ は全体内力ベクトル、 $\{F^{\text{ext}}\}$ は全体外力ベクトルであり、また2行目にはベクトル表示の式も示している。3章では全体内力ベクトルは節点変位の線形関数であったため、容易に式(3.22)が得られたが、ここでは変位の非線形関数となっており、式(3.22)と同様な式を得ることはできない。そこで、2.4.1のNR法を

注1) 図-3.1の境界条件では、節点 $i=1$ を変位境界としているため式(3.18)と同様に節点 $i=1$ を除いている。

用いてこの非線形方程式を解く。

(2) 弱形式の線形化方程式

はじめに、式(3.6)の弱形式まで戻り、式(2.12)に相当する線形化方程式を導く。 $G_{(k)}$ は式(2.12)の $y_{(k)}$ に相当する。式(3.6)の G を解くべき変数である変位 u (2.4.1では x)で微分すると、変位の関数である応力の項のみが残り、チェーンルールを用いて次式が得られる。

$$G'_{(k)} = \int_0^H \frac{d\delta u}{dz} \frac{\partial \sigma}{\partial u} dz = \int_0^H \frac{d\delta u}{dz} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{du} dz \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

これが、式(2.12)の接線勾配 $y'_{(k)}$ に相当する。なお、式(5.3)の被積分関数も繰返し回数 k 回目の値であるが、ここでは煩雑になるので添え字 (k) は省略し、明示した方がわかりやすい一部の変数のみ明示する。式(2.12)と同様に繰返し回数 k 回における変位の補正量を $\Delta u_{(k)}$ とすれば、式(2.12)に相当する線形化方程式は次式で得られる。

$$\Delta G_{(k)} = -G_{(k)} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

ここに、左辺は式(2.12)に示すように接線係数 $y'_{(k)}$ に未知の補正量 $\Delta x_{(k)}$ を乗じたものに相当し、ここでは式(5.3)の被積分関数に $\Delta u_{(k)}$ を乗じた次式となる。

$$\Delta G_{(k)} = \int_0^H \frac{d\delta u}{dz} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{du} \Delta u_{(k)} dz \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

さらに式(3.4)および式(5.1)を代入すれば次式^{注2)}が得られる。

$$\Delta G_{(k)} = \int_0^H \frac{d\delta u}{dz} \bar{D}_{(k)}^{\text{ep}} \frac{d\Delta u_{(k)}}{dz} dz \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

ここに、 $\bar{D}_{(k)}^{\text{ep}}$ は繰返し回数 k 回目の接線係数である。このように解くべき変数で線形化した弱形式を線形化弱形式と呼ぶ。

注2) ΔG を求める作業は、 $G_{(k)}$ の変位 u に対する線形化¹⁾と呼ばれ、一般には次式による。

$$\Delta G = D_u G = \left. \frac{dG(u + \phi \Delta u)}{d\phi} \right|_{\phi=0}$$

ここに、 ϕ はパラメータである。式(3.6)の線形化では変位 u の関数である応力 σ だけが対象となり、式(3.4)およびチェーンルールを用いると応力 σ の変位 u に対する線形化は次式で得られる。

$$D_u \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} D_u \varepsilon = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{d}{d\phi} \left\{ \frac{d(u + \phi \Delta u)}{dz} \right\} \Big|_{\phi=0} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{d\Delta u}{dz}$$

これより式(5.6)の一部が得られる。なお、多次元問題ではスカラーの変位による微分ではなく、変位ベクトルによる微分(方向微分^{1),2)}となる。

(3) 弱形式の線形化方程式の離散化

次に3章の手順に従い、式(5.4)に有限要素近似式を代入し、離散化した線形化方程式を導く。まず、式(5.4)の右辺については要素毎に積分したものの総和を取ることとすると、式(3.13)と同様に次式が得られる。

$$G_{(k)}^{(e)} = \sum_{a=1}^3 \delta u_a \left(\int_{z^{(e)}} B_a \sigma_{(k)} dz - \int_{z^{(e)}} N_a \rho b dz - [N_a \bar{F}]_{z^{(e)}} \right) = \sum_{a=1}^3 \delta u_a R_{a(k)}^{(e)} \dots\dots\dots (5.7)$$

ここに、 $\sigma_{(k)}$ は繰返し回数 k 回目の応力、 $R_{a(k)}^{(e)}$ は繰返し回数 k 回目における要素残差ベクトルの成分である。次に式(5.4)の左辺である式(5.6)についても要素毎に積分したものの総和を取ると、式(3.19)の右辺第1項と同様に次式が得られる。

$$\Delta G_{(k)}^{(e)} = \sum_{a=1}^3 \delta u_a \left\{ \int_{z^{(e)}} \frac{dN_a}{dz} \bar{D}_{(k)}^{ep} \left(\sum_{b=1}^3 \frac{dN_b}{dz} \Delta u_{b(k)} \right) dz \right\} = \sum_{a=1}^3 \delta u_a \left(\sum_{b=1}^3 \int_{z^{(e)}} B_a \bar{D}_{(k)}^{ep} B_b dz \Delta u_{b(k)} \right) = \sum_{a=1}^3 \delta u_a \left(\sum_{b=1}^3 K_{ab(k)}^{(e)} \Delta u_{b(k)} \right) \dots\dots\dots (5.8)$$

ここに、 $K_{ab(k)}^{(e)}$ は

$$K_{ab(k)}^{(e)} = \int_{z^{(e)}} B_a \bar{D}_{(k)}^{ep} B_b dz \dots\dots\dots (5.9)$$

であり、繰返し回数 k 回目の要素接線剛性マトリックスである。式(3.16)および式(3.21)と同様に式(5.7)および式(5.8)を要素毎に重ね合わせ、式(5.4)に代入すると次の線形化方程式が得られる。

$$\sum_{a=1}^M \left\{ \sum_{b=1}^3 \delta u_a \left(\sum_{c=1}^3 K_{ac(k)}^{(e)} \Delta u_{c(k)} \right) \right\} = - \sum_{a=1}^M \left(\sum_{a=1}^3 \delta u_a R_{a(k)}^{(e)} \right) \sum_{i=1}^N \delta u_i \left\{ \sum_{j=1}^N \left(\sum_{e=1}^M K_{ij(k)}^{(e)} \right) \Delta u_{j(k)} \right\} = - \sum_{n=1}^N \delta u_i \left(\sum_{e=1}^M R_{i(k)}^{(e)} \right) \sum_{i=1}^N \delta u_i \left(\sum_{j=1}^N K_{ij(k)} \Delta u_{j(k)} \right) = - \sum_{n=1}^N \delta u_i R_{i(k)} \dots\dots\dots (5.10)$$

さらに、3.3.1(2)で述べたようにして式(3.3)の変位境界条件を考慮し、重み関数 δu_i が任意であることを考慮すると、式(3.22)と同様に図-3.1の地盤モデルに対して次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^N K_{ij(k)} \Delta u_{j(k)} = -R_{i(k)} \quad (i=2, \dots, N) [K_{(k)}] \{\Delta u_{(k)}\} = -\{R_{(k)}\} \dots\dots\dots (5.11)$$

なお、第2式には参考までにベクトル表示の式も示している(以下でも最終的に得られる式についてはベクトル・マトリックス表示の式を適宜示す)。これが離散化された線形化弱形式であり、 $[K_{(k)}]$ は繰返し回数 k 回目の全体接線剛性マトリックス、 $\{R_{(k)}\}$ は繰返し回数 k 回目の全体残差ベクトルである。線形化方程式を解くことにより、繰返し回数 k 回目の節点 i の変位は式(2.12)で示したとおり、変位の補正量 $\Delta u_{i(k)}$ を用いて次式で得られる。

$$u_{i(k+1)} = u_{i(k)} + \Delta u_{i(k)} \dots\dots\dots (5.12)$$

この更新された変位 $u_{i(k+1)}$ が次の繰返し回数 $k+1$ 回目の変位の初期値となる。なお、繰返し計算の収束判定法

には様々な方法^{注3)}があるが、ここでは次式で示す全体残差ベクトルのノルム (norm) が許容値以下になれば収束と判定する。

$$\text{norm} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (R_{i(k)})^2} = \sqrt{\{R_{(k)}\}^T \{R_{(k)}\}} \dots\dots\dots (5.13)$$

(4) 要素積分

最後に式(5.7)の $R_{a(k)}^{(e)}$ および式(5.9)の $K_{ab(k)}^{(e)}$ に対し、ガウス・ルジャンドルの積分公式を適用すると式(3.30)および式(3.31)と同様に次式が得られる。

$$R_{a(k)}^{(e)} = \sum_{l=1}^L w_l \left\{ \frac{dN_a}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^{-1} \right\}_l \sigma_{l(k)} \left(\frac{dz}{dr} \right)_l - \sum_{l=1}^L w_l (N_a)_{l, \rho b} \left(\frac{dz}{dr} \right)_l - [N_a \bar{F}]_{z^{(e)}} \dots\dots\dots (5.14)$$

$$K_{ab(k)}^{(e)} = \sum_{l=1}^L w_l \left\{ \frac{dN_a}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^{-1} \right\}_l \bar{D}_{l(k)}^{ep} \times \left\{ \frac{dN_b}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^{-1} \right\}_l \left(\frac{dz}{dr} \right)_l \dots\dots\dots (5.15)$$

ここに、 L は積分点数、下付き添え字 l は各積分点での値を示している。これらより、非線形問題に対するNR法では線形問題に対する式(3.30)および式(3.31)において、次のように各変数を置き換えればよいことになる。

- 要素残差ベクトルにおける応力をNR法における繰返し回数 k 回目の値 $\sigma_{(k)}$ とする。
- 要素接線剛性マトリックスにおける接線係数をNR法における繰返し回数 k 回目の値 $\bar{D}_{l(k)}^{ep}$ とする。
- 求める未知数をNR法における繰返し回数 k 回目の変位の補正量 $\Delta u_{(k)}$ とする。

なお、式(5.14)中の積分点の応力 $\sigma_{l(k)}$ は4.3.2で述べた弾性予測子とリターンマッピングによる方法で算定する。

非線形方程式である式(5.2)をそのまま解く場合もあるが、通常は作用させる荷重を仮想的に分割し、 N_{step} 分割した荷重を N_{step} 回に分けて徐々に増加させていく増分解析が用いられる。この場合でも、 $n (=1 \sim N_{\text{step}})$ 回目の計算ステップ^{注4)}における荷重に対して、NR法の繰返し計算を行い、式(5.13)により釣合い式の成立を保証している。最終計算ステップでは次式のように式(5.2)と当然同じ式となる。

$$F_i^{\text{int}} = \sum_{n=1}^{N_{\text{step}}} (\Delta F_i^{\text{ext}})_n = F_i^{\text{ext}} \quad (i=2, \dots, N) \dots\dots\dots (5.16)$$

ここに、下付き添え字 n は計算ステップ、 $(\Delta F_i^{\text{ext}})_n$ は n 回目の計算ステップにおける外力ベクトル増分である。増分解析では荷重を仮想的に分割しているだけであり、釣合い式は常に当該計算ステップにおける荷重に対して満足されている。

注3) 式(2.7)で示したような正規化した未知数の誤差ベクトルの内積で判定する方法、正規化した残差ベクトルの内積で判定する方法などがある。

注4) ここでは荷重ステップの意味であるが、増分解析における荷重ステップや後述する圧密解析における時間ステップの総称として計算ステップと呼ぶ。

5.3 有限要素解析プログラム

5.3.1 計算のアルゴリズム

解くべき方程式が式(5.2)や式(5.11)のように得られた。3章との大きな違いは各計算ステップにおいてNR法を用いて繰返し計算を行うことにある。図-3.4同様に計算のアルゴリズムをフローチャートの形で記述したのが図-5.1である。図-3.4との違いは以下のとおりである。

- 計算ステップの反復と要素の反復の間にNR法の反復計算を追加。反復の途中で収束せず、反復回数iiterが最大反復回数に達した場合は異常終了とする。
- 線形化方程式を解く前にNR法の収束判定を追加。
- 応力を計算するサブルーチンを弾性および弾塑性モデルに対応したsub_stressに変更。sub_stressのFortranによるプログラムについてはリスト4.1を参照されたい。

5.3.2 Fortranによるプログラムリスト

用いるサブルーチンは図-5.1に示すとおり、応力を計算するサブルーチン以外は図-3.4とほぼ共通である。以下では、メインプログラムのプログラムリスト、3.3.2で示したサブルーチンにおいて変更あるいは追加すべき項目のみ説明する。共通事項は3.3.2(1)と同様であるが、新たに以下のファイル番号を追加する。

7: 入力リスタートファイル

8: 出力リスタートファイル

なお、追加すべき項目についてはサブルーチンの一部のみを示すので3.3.2で示した同名のサブルーチンに追加して欲しい。

(1) モジュール (グローバル変数の定義)

メインプログラムおよびサブルーチンで共通で使える変数をモジュールで定義する。ここでは、リスト-3.1に追加する変数のみを示す。

リスト-5.1 モジュール (追加のみ)

行	ソースコード
1	MODULE common
2	IMPLICIT NONE
3	INTEGER, PARAMETER:: max_iter=20
4	INTEGER, SAVE:: iiter, reflag
5	INTEGER, SAVE:: type_estr_m(max_m), & n_prop_estr(max_m)
6	REAL(p), SAVE:: er_tol, & prop_estr_m(max_m, max_p)
7	REAL(p), SAVE:: iso_hp_i
8	REAL(p), SAVE:: sts_e_i(max_e, n_int_es), & stst_e_i(max_e, n_int_es), & iso_hp_e_i(max_e, n_int_es), & iso_hpt_e_i(max_e, n_int_es)
9	END MODULE common

行	説 明 文
3	整数型パラメータ (各種最大値)

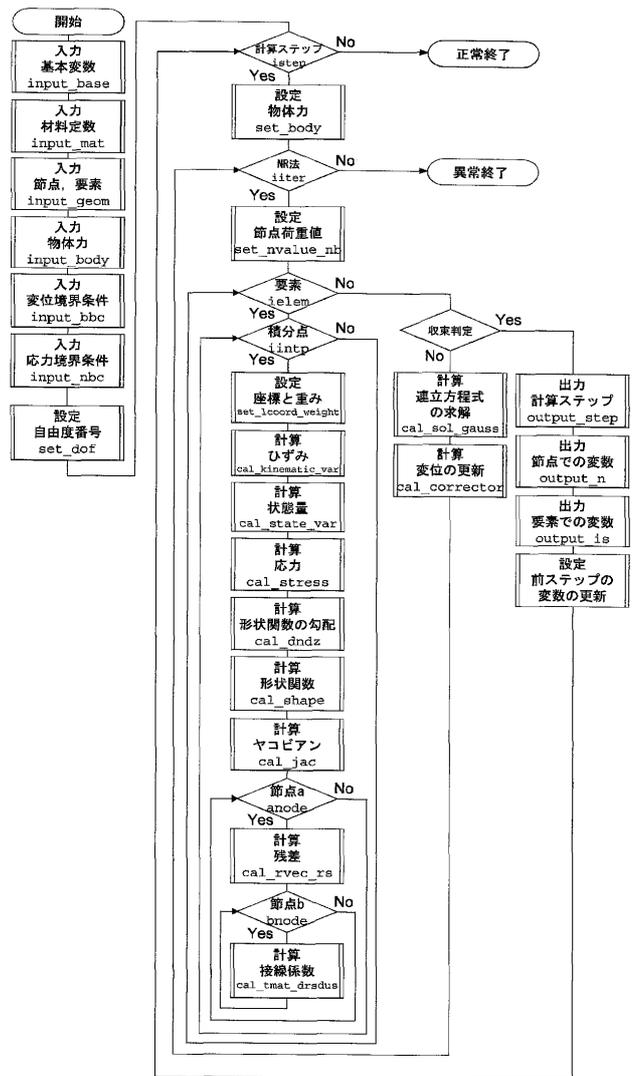


図-5.1 弾塑性モデルを用いた変形解析プログラムのフローチャート

4	max_iter: NR法の繰返し回数の最大値(20) 整数型変数(反復のためのカウンターなど) iiter: NR法の反復回数 reflag:=1でリスタート解析, rstファイルを入力。
5	整数型配列(入力変数), 括弧内は配列の大きさ type_estr_m: 材料の種類(材料数) 非線形弾性モデル: 2, 弾塑性モデル: 3 n_prop_estr: 構成式の材料定数の数(材料数) 非線形弾性モデル: 2, 弾塑性モデル: 4
6	実数型配列(入力変数), 括弧内は配列の大きさ er_tol: NR法の収束判定のための許容誤差 prop_estr_m: 構成式の材料定数 (材料数, n_prop_estr) prop_estr_m(:, 1): 基準応力 prop_estr_m(:, 2): 膨潤指数(弾性圧縮指数) prop_estr_m(:, 3): 基準状態での圧密降伏応力 prop_estr_m(:, 4): 圧縮指数(弾塑性圧縮指数)
7	実数型変数(計算変数, 全て積分点での値) iso_hp_i: 圧密降伏応力
8	実数型変数(計算変数), 括弧内は配列の大きさ これらは全積分点の値を保存するためのものである。 sts_e_i: 応力(要素数, 積分点数) stst_e_i: 前計算ステップの応力(要素数, 積分点数)

iso_hp_e_i : 圧密降伏応力 (要素数, 積分点数)
 iso_hpt_e_i : 前計算ステップの圧密降伏応力 (要素数, 積分点数)

(2) メインプログラム

サブルーチン呼び出ししながら計算全体の流れをコントロールするのがメインプログラムである。3章ではメインプログラムのリストを示さなかったが、3章と共通する部分も多いので参考にして欲しい。なお、メインプログラムではサブルーチン以外の処理について注釈も残している。

リスト-5.2 メインプログラム

行	ソースコード
1	PROGRAM tsald
2	USE common
3	IMPLICIT NONE
4	INTEGER:: anode, bnode, lstflag, & i, j, k, l, m, n, n_int_e
5	REAL(p):: norm
6	CHARACTER(LEN=80):: filename, casename
7	!--- 変数の初期化
8	n_mat=0; n_node=0; n_elem=0; n_bcs=0; & n_nload=0; n_step=0; & error_conv=0.0_p; reflag=0
9	!--- ファイルのオープン
10	WRITE(*, '(A)') & "入力データファイルの名前を入力してください。"
11	READ(*, '(A)') filename
12	OPEN(1, FILE=filename, STATUS='OLD')
13	WRITE(*, '(A)') "ケース名を入力してください。"
14	READ(*, '(A)') casename
15	OPEN(2, FILE = TRIM(casename)//".lst")
16	OPEN(8, FILE = TRIM(casename)//".rst")
17	CALL input_base
18	!--- 変数の初期化
19	type_estr_m=0; n_prop_base=0; n_prop_estr=0; & prop_base_m=0.0_p; prop_estr_m=0.0_p; & body=0.0_p; coord_n=0.0_p; mat_e=0; & node_e=0; bcs_n=0; lcs_n=0; nload_n=0.0_p; & nloadbb_n=0.0_p; dof_ns=0; n_dof=0
20	CALL input_mat
21	CALL input_geom
22	CALL input_body
23	!--- 初期値の入力
24	us_n=0.0_p; ust_n=0.0_p; & sts_e_i=0.0_p; stst_e_i=0.0_p; & iso_hp_e_i=0.0_p; iso_hpt_e_i=0.0_p
25	!--- リスタート時の初期値の入力
26	IF(reflag == 1) CALL input_rest
27	CALL input_bbc
28	CALL input_nbc
29	!--- 前計算ステップの主変数の設定
30	ust_n(1:n_node)=us_n(1:n_node)
31	stst_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)= & sts_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)
32	iso_hpt_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)= & iso_hp_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)
33	CALL set_dof

34	!=== ステップ毎の計算
35	step: DO istep=1,n_step
36	CALL set_body
37	!=== Newton-Raphson 法による反復計算
38	iteration: DO iiter=1,max_iter
39	gtmat=0.0_p; grvec=0.0_p; nloadbb_n=0.0_p
40	CALL set_nvalue_nb
41	!=== 要素 ielem 毎の計算
42	elem: DO ielem=1,n_elem
43	!=== 積分点 iintp での計算
44	n_int_e=n_int_es
45	intp: DO iintp=1,n_int_e
46	CALL set_initial_i
47	CALL set_lcoord_weight(n_int_e)
48	CALL cal_kinematic_var
49	CALL cal_state_var
50	CALL cal_stress
51	CALL cal_dndz(n_node_es, dnadzs_i)
52	CALL cal_shape(n_node_es, shapeas_i)
53	dnbdzs_i(1:n_node_es)= & dnadzs_i(1:n_node_es)
54	CALL cal_jac(n_node_es)
55	!--- 要素内節点 a に対する計算
56	as: DO anode=1,n_node_es
57	CALL cal_rvec_rs(anode)
58	!--- 要素内節点 a の要素内節点 b に対する計算
59	asbs: DO bnode=1,n_node_es
60	CALL cal_tmat_drdsus(anode,bnode)
61	END DO asbs
62	END DO as
63	END DO intp
64	END DO elem
65	!--- 残差のノルムの計算と収束判定
66	norm=0.0_p
67	norm=SQRT(DOT_PRODUCT(grvec,grvec))
68	IF(norm<er_tol) EXIT
69	CALL cal_sol_gauss
70	CALL cal_corrector
71	IF(iiter == max_iter) STOP
72	END DO iteration
73	!--- 出力用フラッグ lstflag の計算
74	lstflag=0
75	CALL output_step(norm)
76	CALL output_n(lstflag)
77	CALL output_is(lstflag)
78	!--- 前ステップでの変数値の設定
79	ust_n(1:n_node)=us_n(1:n_node)
80	stst_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)= & sts_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)
81	iso_hpt_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)= & iso_hp_e_i(1:n_elem,1:n_int_es)
82	END DO step
83	!--- リスタート用データの出力
84	CALL output_rest
85	END PROGRAM tsald

行	説 明 文
4	整数型ローカル変数の定義。 anode : 要素内節点番号 a, bnode : 要素内節点番号 b lstflag : 出力制御用

初級講座

5	実数型ローカル変数の定義 norm: 全体残差ベクトルのノルム
6	文字型ローカル変数 (80文字) の定義 filename: 入力ファイル名, casename: ケース名
8	基本計算条件に関する変数の初期化。変数は必ず初期化。
10	画面へ文字を出力。
11	画面に入力された文字を filename に代入。
12	ファイル番号 1 にファイル filename を割当て。
13	画面へ文字を出力。
14	画面に入力された文字を casename に代入。
15	ファイル番号 2 にファイル casename.lst を割当て。 TRIM により casename の80文字以下の空白は削除。
16	ファイル番号 8 にファイル casename.rst を割当て。
17	基本計算条件の入力。
19	入力変数の初期化。
20	材料定数の入力。
21	節点・要素の入力。
22	物体力の入力。
24	主変数の初期化。
26	リスタート解析時 (reflag=1) に主変数をリスタート 解析用ファイルから入力。
27	変位境界条件の入力。
28	応力境界条件の入力。
30	前計算ステップにおける主変数の値に現在の値を代入。 32行目まで。
33	自由度番号の設定。
34	計算ステップの反復。istep=1~n_stepの間, 81行目 までを反復。DO の前の step はラベル。DO 文の反復に 名前を付けて見やすくするためのものであり, 計算結果 には影響しない。
35	物体力の設定
37	NR法の繰返し計算の反復。iiter=1~max_iterの間, 71行目までを反復。
38	変数の初期化。
39	応力境界での節点荷重の設定。
41	要素の反復。ielem=1~n_elemの間, 63行目までを反 復。
43	当該要素の積分点数を n_int_e に代入。
44	積分点の反復。iintp=1~n_int_eの間, 62行目まで を反復。
45	積分点における変数の初期化。
46	局所座標と重みの設定。
47	ひずみの計算。
48	状態量の計算。
49	応力の計算。
50	形状関数の座標に関する微分 B_a の計算。
51	形状関数 N_a の計算。
52	要素内節点 b における形状関数の座標に関する微分 B_b に要素内節点 a における値 B_a を代入。
53	ヤコビアン計算。
55	要素内節点 a の反復。anode=1~n_node_esの間, 61 行目までを反復。
56	全体残差ベクトルの計算。
58	要素内節点 b の反復。bnode=1~n_node_esの間, 60 行目までを反復。
59	全体接線剛性マトリックスの計算。
65	変数の初期化。
66	全体残差ベクトルの内積を norm に代入。
67	norm が許容誤差未満なら71行目までの反復を終了。
68	連立方程式の求解。
69	主変数の更新。

70	繰返し回数が最大繰返し回数に到達したら計算終了。
73	出力の制御。lstflag=0 なら節点・積分点で出力。
74	計算ステップ, 収束回数の出力。
75	節点での変数の出力。
76	積分点での変数の出力。
78	前計算ステップでの変数値の更新。80行目まで。
83	後のリスタート解析用ファイルの出力。

(3) 基本計算条件の入力 (追加分のみ)

NR法の収束判定のための許容誤差およびリスタート解析用の条件の入力を追加する。リスタート解析を行う場合はリスタート解析用ファイル (拡張子 rst) の名前を入力する。ここでのリスタート解析とはある解析の終了後に得られた解析結果の情報 (変位, 応力など) を引き継ぎ, 新しい条件で解析することである。例えば, 自重解析を行った後に, 同じ地盤モデルに対して圧縮解析を行う場合のように, 境界条件を途中で変更し, 継続して解析を行う際にはリスタート解析を用いる^{注5)}。

リストー5.3 基本計算条件の入力 (追加分のみ)

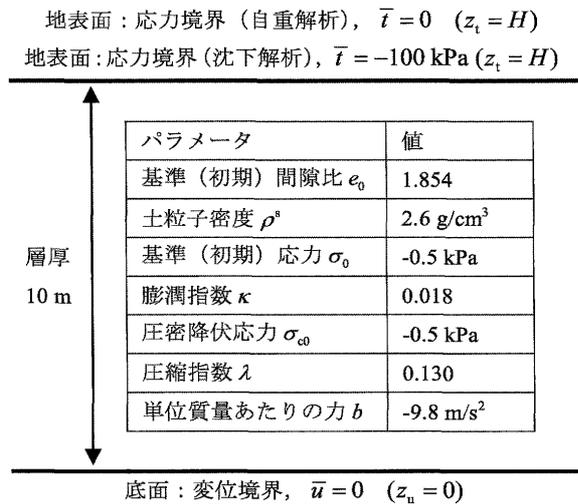
行	ソースコード
1	SUBROUTINE input_base
2	USE common
3	IMPLICIT NONE
4	CHARACTER (LEN=80)::filename
5	READ(1,*) er_tol
6	READ(1,*) reflag
7	IF(reflag == 1) THEN
8	READ(1,*) filename
9	OPEN(7, FILE=filename)
10	END IF
11	END SUBROUTINE input_base

行	説 明 文
4	文字型ローカル変数の定義。
5	NR法の収束判定のための許容誤差の入力。
6	リスタート解析条件の入力。
7	reflag=1の場合, 以下を実行。reflagが1でなければ, 10行目へ分岐。
8	リスタートファイルのファイル名を入力。
9	ファイル番号7にファイル filename を割当て。

5.4 解析例

3章と同様に図—3.1に示した地盤モデルを対象として, 弾塑性モデルを用いた次元有限要素解析プログラムによる数値解を示す。なお, ここでは3.4とは異なり, 比較的現実的な図—5.2の解析条件を設定する。用いる材料パラメータは4.3.4をもとにしているが, 基準応力 σ_0 の絶対値を小さくし (これに伴い初期間隙比 e_0 も調整), 正規圧密地盤を作成するため基準状態の圧密降伏応力 σ_{c0} と基準応力 σ_0 を等しく設定している ($\sigma_{c0} = \sigma_0$) 地盤モデルは20個の3節点要素に分割している。

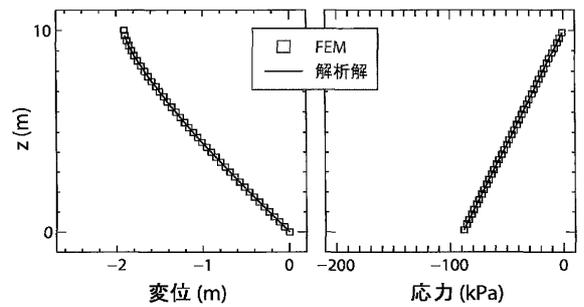
注5) 紙面の制約上, リスタートファイルの入出力のサブルーチン (input_rest, output_rest) の説明は省略する。



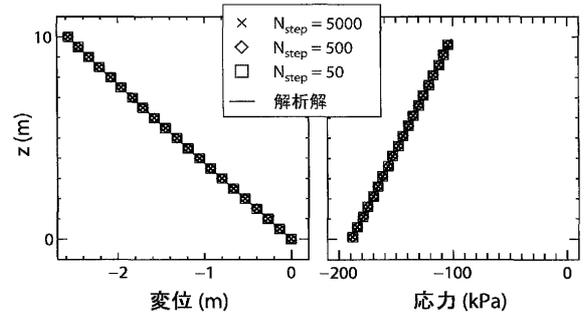
図—5.2 地盤モデルと材料パラメータ

はじめに物体力として下向きの重力加速度を作用させた自重解析を行った。計算ステップ数は1000とし、重力加速度を1000分割した。式(5.13)の許容誤差は 10^{-8} とした。リスト—5.2に示したように解析開始時の初期変位をゼロとしているため、全要素において初期ひずみはゼロ、式(4.16)より初期応力は基準応力の値となる。したがって、ひずみ・応力の初期深度分布は自重解析の結果得られる深度分布と大きく異なることから、NR法の収束^{注6)}が得られるように計算ステップ数を多くしている。自重解析の結果得られた節点での変位の深度分布および積分点での応力の深度分布を図—5.3に示す。図には式(4.2)および式(4.10)から求めた解析解^{注7)}も示しており、変位・応力とも有限要素法による結果と一致している。弾性モデルを用いた自重解析結果（図—3.5）と比較すると、同じ支配方程式(3.1)を用いていることから応力 σ は z に比例した分布となっているが、異なる構成モデルを用いたため変位分布は異なっている。なお、圧密降伏応力は図—5.3に示す応力と一致しており、すべての積分点で正規圧密状態となっている。

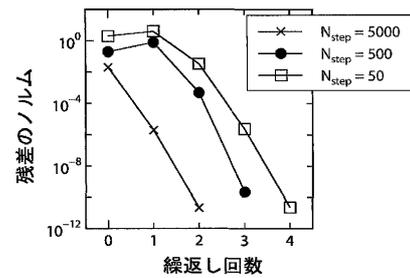
つぎに自重解析に続いて、地表面に下向き荷重（-100 kPa）を設定した沈下解析を行った。沈下解析は、図—5.3に示した自重解析後のひずみや応力などの情報を引き継ぎ、これを計算開始時の状態とするリストア解析である。解析手法の精度を示すため、沈下解析の計算ステップ数は50, 500および5000とし、荷重をそれぞれ50, 500, 5000分割した。式(5.13)の許容誤差は自重解析と同様に 10^{-8} とした。沈下解析の結果得られた節点での変位の深度分布および積分点での応力の深度分布を図—5.4（グラフをみやすくするため出力深度



図—5.3 自重解析による変位と応力の深度分布



図—5.4 沈下解析による変位と応力の深度分布



図—5.5 沈下解析における収束計算の様子（最終計算ステップにおける残差ベクトルのノルム）

を一つおきとしている）に示す。図には図—5.3と同様な方法で得られた解析解も示しており、変位・応力とも有限要素法による結果と一致している。自重解析結果（図—5.3）と比較すると、応力分布は地表面荷重の増加分だけ一様に増加しているが、変位分布は地表面付近で異なっており、地表面付近でのひずみが増加している。荷重分割数（計算ステップ数）を変えた各ケースの結果は一致しており、本解析条件において陰解法では荷重分割を粗くしても精度が確保されていることがわかる。最後に、沈下解析におけるNR法の収束の様子を図—5.5に示す。各計算ケースの最終ステップにおける式(5.13)による残差のノルムと繰返し回数の関係を示している。荷重分割数を多くしたケースの方が残差のノルムが小さく、繰返し回数も少ないが、いずれのケースでもほぼ二次収束を示している。

参考文献

- 1) Holzapfel, G.A.: Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering, John Wiley & Sons, 2000.
- 2) 京谷孝史：よくわかる連続体力学ノート，森北出版，2008.

注6) 本解析条件の場合、応力一様場から各積分点が塑性負荷となる最初の計算ステップにおける収束が特に厳しく、収束に要した繰返し回数は10回である。その後、繰返し回数は減少し、最終計算ステップでは3回となる。

注7) ここでは $\sigma_{c0} = \sigma_0$ であり基準状態からの載荷過程は正規圧密過程（弾塑性応答）となり、式(4.2)において $e_{c0} = e_0$, $e_c = e$, $\sigma_c = \sigma$ となる。応力分布は式(3.41)の第二式より算定できるので、式(4.2)および式(4.10)よりひずみ分布が得られ、 z 方向に積分すれば変位分布が得られる。