The Japanese Geotechnical Society

講座

地盤材料の構成モデル最前線

4. 地盤材料の密度や繰返し載荷を考えたモデル化

岡 安 崇 史（おかやす たかし）
九州大学大学院准教授 農学研究院

4.1 はじめに

土木・地盤構造物の多くは，交通，波浪，水位変動，地震等に起因する繰返し荷重を絶えず受けており，構造物の力学設計においては，その考慮が極めて重要となる。近年では，コンピューター技術の発達によって，これらの力学設計に有限要素法などの数値解析法が利用されているが，その精度向上には，繰返し荷重に対する地盤材料の力学挙動を高精度に予測できる構成モデル（以下，繰返し塑性モデル（cyclic plasticity model）と略称）の開発が必要であり，従前より国内外において様々な研究が行われている。

繰返し塑性モデルは，降伏面内部を純粋弾性域としない非古典塑性論[1]の枠組みに属し，降伏面内部における塑性変形のモデル化の違いから，降伏面の移動により塑性変形の発生を表現する概念を下降伏状態に拡張したものと，降伏面内部の応力状態に対して膨張，収縮，移動する新たな負荷面を仮定するものに分類される。前者に属するモデルには，多面モデル（multi surface model）[2),3)]，二面モデル（two surface model）[4),5)]，無数面モデル（infinite surface model），単面モデル（single surface model）などがあり，金属や土の繰返し負荷特性の予測に利用されている。一方，後者のモデルには，初期下負荷面モデル（initial subloading surface model）[6),7)]や，その拡張モデルである拡張下負荷面モデル（extended subloading surface model）[8),9)]があり，これらも同様に金属や土の繰返し負荷特性の予測に利用されている。

本稿では，近年，地盤工学分野で広く活用されている橋口により提案された（初期）下負荷面モデル，さらには，同モデルを拡張して繰返し負荷挙動の現実的表現を可能にした拡張下負荷面モデルについて，その具体的定式化も含め解説する。さらに，これらのモデルを用いた土の単調ならびに繰返し負荷挙動の予測特性についても紹介する。

4.2 下負荷面モデル

4.2.1 初期下負荷面モデル[6),7)]

橋口[6),7)]は，降伏面の内部に常に現応力点を通り，これと相似な形でかつ配置を維持しつつ，膨張，収縮する下負荷面を仮定し，塑性係数がこれらの面の大きさの比率により決定されるとした初期下負荷面モデルを提案した。以下では，まず，正規降伏面と下負荷面の相似の中心が応力空間の1点に固定される初期下負荷面モデルに基づく応力増分～ひずみ増分関係式の定式化を行う。

ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$ は，弾性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^{e}$ と塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ に加算分解されるものとする。

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{e}+d\varepsilon_{ij}^{p} \quad \cdots\cdots (4.1)$$

ここに，弾性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^{e}$ は次式で与えられる。

$$d\varepsilon_{ij}^{e}=E_{ijkl}^{-1}d\sigma_{kl} \quad \cdots\cdots (4.2)$$

また，4階のテンソル E_{ijkl} は Hooke 型の弾性係数テンソルで各成分は次式で与えられるとする。

$$E_{ijkl}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \quad \cdots\cdots (4.3)$$

本式における体積弾性係数 K およびせん断弾性係数 G は，一般に，応力および内部状態変数の関数である。δ_{ij} は Kronecker（クロネッカー）のデルタ，すなわち，$i=j$ に対し，$\delta_{ij}=1$, $i\neq j$ に対し $\delta_{ij}=0$ である。

次の降伏条件を考える。

$$f(\sigma_{ij})=F(H) \quad \cdots\cdots (4.4)$$

ここに，H は等方硬・軟化変数を表す。本稿では，簡単のため，移動硬化や異方性の無い材料を対象に定式化を進める。また，本モデルにおいては，降伏面内部における塑性変形の発生を考慮するので，古典塑性論における降伏面を改めて正規降伏面（normal yield surface）と称することにする。

いま，正規降伏面の内部に常に現応力点を通り，応力空間の原点に関して正規降伏面と相似な形状でかつ配置を保ちつつ膨張，収縮する下負荷面を導入する。さらに，正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比率，すなわち，これらの面の相似比を R により表す。ここで，変数 R $(0\leq R\leq 1)$ は，正規降伏状態への応力の接近の度合いと見なし得るので，“正規降伏比（normal-yield ratio）”と称される。**図—4.1**に正規降伏面および下負荷面を示す。本図において，現応力 σ_{ij} に対する正規降伏面上の共役応力 $\sigma_{y_{ij}}$ は次式で与えられる。

$$\sigma_{y_{ij}}=\frac{\sigma_{ij}}{R} \quad \cdots\cdots (4.5)$$

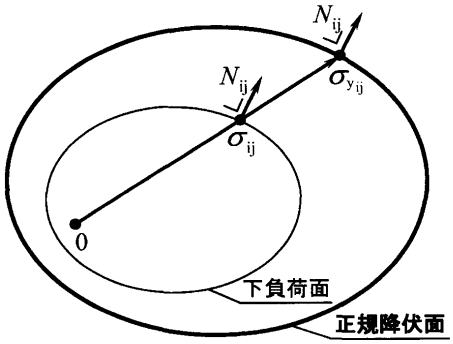
正規降伏面式(4.4)における σ_{ij} を $\sigma_{y_{ij}}$ と見なして，式(4.5)に代入することにより，下負荷面が具体的に次式のように表される。

$$f(\sigma_{ij})=RF(H) \quad \cdots\cdots (4.6)$$

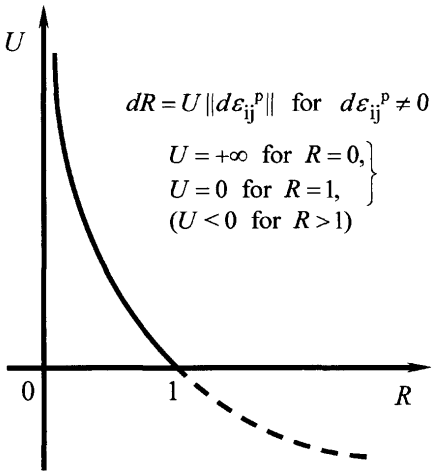
下負荷面式(4.6)を微分することにより次式を得る。

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



図―4.1　下負荷面モデルにおける正規降伏面および下負荷面の配置図



図―4.2　関数 U

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = dRF + RF'dH \quad \cdots\cdots (4.7)$$

$$F' \equiv \frac{dF}{dH} \quad \cdots\cdots (4.8)$$

塑性変形過程において，常に，下負荷面（現応力点を通る負荷面）は正規降伏面に漸近することを考慮して，R の発展則を次式で与える。

$$dR = U\|d\varepsilon_{ij}{}^{p}\| \quad \text{for} \quad d\varepsilon_{ij}{}^{p} \neq 0 \quad \cdots\cdots (4.9)$$

ここに，U は次の条件を満たす R の単調減少関数である（図―4.2参照）。

$$\left.\begin{array}{l} U = +\infty \quad \text{for} \quad R = 0, \\ U = 0 \quad \text{for} \quad R = 1, \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (4.10)$$
$$(U < 0 \quad \text{for} \quad R > 1)$$

なお，式(4.10)を満たす関数 U として，例えば，次式を仮定する。

$$U = -u \ln R \quad \cdots\cdots (4.11)$$

ここに，u は材料定数である。

式(4.9)を式(4.7)に代入することにより，下負荷面に拡張された適応条件を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = U\|d\varepsilon_{ij}{}^{p}\|F + RF'dH \quad \cdots\cdots (4.12)$$

次の関連流動則を導入する。

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = \lambda N_{ij}, \quad \left(N_{ij} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Big/ \left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\| \right) \quad \cdots\cdots (4.13)$$

ここに，λ は正値の比例係数，$N_{ij}(\|N_{ij}\| = 1)$ は下負荷面上の現応力点における正規化外向き法線テンソルを示す。

適応条件式(4.12)に関連流動則を代入することにより，λ が求められる。

$$\lambda = \frac{N_{ij} d\sigma_{ij}}{M^{p}} \quad \cdots\cdots (4.14)$$

また，次式から塑性係数 M^{p} は下負荷面の状態により変化することがわかる。

$$M^{p} \equiv \left(\frac{F'}{F} h + \frac{U}{R} \right) N_{ij} \sigma_{ij} \quad \cdots\cdots (4.15)$$

$$h \equiv \frac{dH}{\lambda} \quad \cdots\cdots (4.16)$$

式(4.14)の誘導に際しては，Euler（オイラー）の定理を下負荷面式(4.6)に適用した次式を用いた。

$$\frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\|} = \frac{N_{ij}\sigma_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}} = \frac{N_{ij}\sigma_{ij}}{f} = \frac{N_{ij}\sigma_{ij}}{RF} \quad \cdots\cdots (4.17)$$

式(4.2)，(4.13)および(4.14)を式(4.1)に代入することにより，ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ は次式で与えられる。

$$d\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} + \frac{N_{kl} d\sigma_{kl}}{M^{p}} N_{ij} \quad \cdots\cdots (4.18)$$

ここに，テンソルの各成分を表すための添字は，例えば，$A_{ij}B_{ij} = A_{kl}B_{kl}$ のように総和をとる場合には適宜記号を変更しているが，結果は変わらない。次に，本式の逆関係として応力増分～ひずみ増分関係式を導く。まず，式(4.18)の両辺に $N_{ij}E_{ijkl}$ を掛けると次式を得る。

$$N_{ij}E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = N_{kl} d\sigma_{kl} + \frac{N_{mn} d\sigma_{mn}}{M^{p}} N_{ij}E_{ijkl}N_{kl} \quad \cdots\cdots (4.19)$$

本式を整理することにより，式(4.14)はひずみ増分を用いて次式で表すことができる。

$$\lambda \equiv \frac{N_{ij} d\sigma_{ij}}{M^{p}} = \frac{N_{ij}E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{M^{p} + N_{ij}E_{ijkl}N_{kl}} \equiv \Lambda \quad \cdots\cdots (4.20)$$

これより，式(4.18)の逆表現である応力増分～ひずみ増分関係式は次式で与えられる。

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}{}^{p} (= E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \Lambda E_{ijkl} N_{kl})$$

$$E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \frac{N_{mn}E_{mnop} d\varepsilon_{op}}{M^{p} + N_{mn}E_{mnop}N_{op}} E_{ijkl} N_{kl} \quad \cdots\cdots (4.21)$$

負荷基準（loading criterion）[10]は次式で与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} d\varepsilon_{ij}{}^{p} \neq 0 : N_{mn}E_{mnop} d\varepsilon_{op} > 0, \\ d\varepsilon_{ij}{}^{p} = 0 : N_{mn}E_{mnop} d\varepsilon_{op} \leq 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (4.22)$$

以上，初期下負荷面モデルの概念を解説したが，一般的に本モデルは古典塑性モデルと比較して次に挙げるような種々の改善がなされている。

1）本モデルは弾性状態から塑性状態への滑らかな遷移，つまり，滑らかな応力～ひずみ関係が予測される。

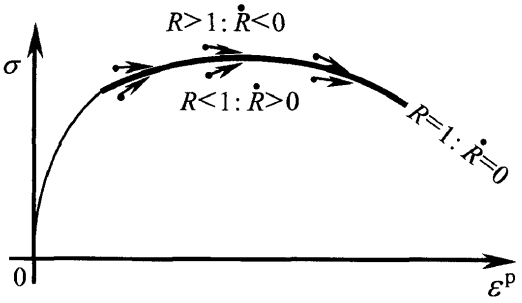
2）常に応力が負荷面の役割を担う下負荷面上に存在するので，負荷基準の判定においては，降伏条件を満たしているか否かの判定は不要で，式(4.22)の正負を判定するだけでよい。

3）式(4.9)で示される正規降伏比の発展則を導入しているので，塑性負荷状態で応力が正規降伏面に漸近する自動制御機能を有する（図―4.3参照）。

しかしながら，初期下負荷面モデルにおいては，正規

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



図—4.3　塑性負荷状態における応力を正規降伏面に漸近させる自動制御機能

降伏面と下負荷面の相似中心が応力空間の1点に固定されているため，片振りの繰返し負荷に対しては応力～ひずみ関係が開いたヒステリシスループを描くこととなる。

4.2.2　拡張下負荷面モデル[8),9)]

前述の初期下負荷面モデルにおける繰返し負荷挙動表現の不備を補うため，正規降伏面と下負荷面の相似中心を塑性変形とともに移動させることを考慮した拡張下負荷面モデルについて解説を行う。

いま，下負荷面式として次式を考える。

$$f(\bar{\sigma}_{ij})=RF(H) \quad \cdots\cdots(4.23)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}-\bar{\alpha}_{ij} \quad (\bar{\alpha}_{ij}=(1-R)s_{ij}) \quad \cdots\cdots(4.24)$$

s_{ij} は正規降伏面と下負荷面の相似中心（similarity center）を表す。**図—4.4**に拡張下負荷面モデルにおける正規降伏面および下負荷面を示す。

式(4.23)を微分したものに式(4.9)を代入することにより，拡張下負荷面モデルにおける適応条件式を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}d\bar{\alpha}_{ij}=U\|d\varepsilon_{ij}{}^{p}\|F+RF'dH \quad \cdots\cdots(4.25)$$

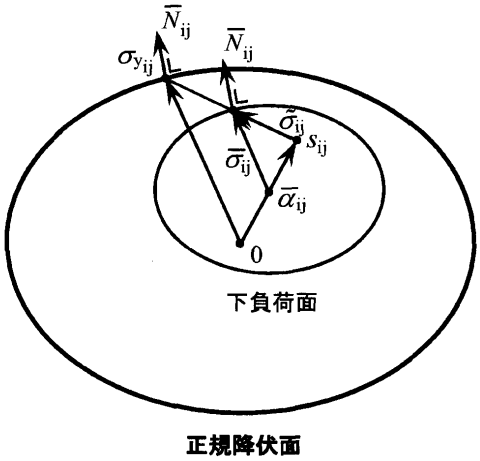
さて，正規降伏面と下負荷面が常に相似の配置を維持（これらの面が交差など生じないよう）するには，これらの面の相似中心を表す s_{ij} が常に正規降伏面内部に存在するよう，s_{ij} の移動範囲を数学的に制限しておく必要がある。すなわち，s_{ij} は常に次式を満たさなければならない。

$$f(s_{ij})\leq F(H) \quad \cdots\cdots(4.26)$$

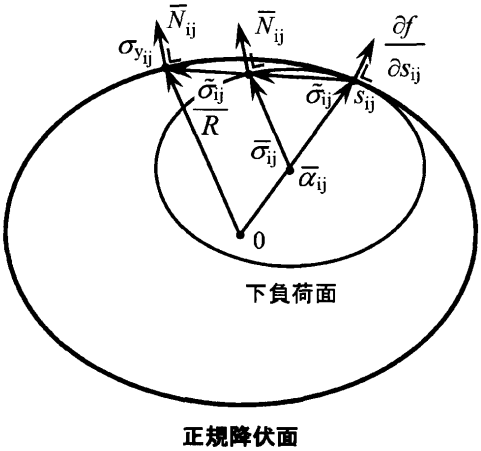
いま，s_{ij} が正規降伏面上に存在する極限状態を想定し，式(4.26)を微分することにより，次式を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\left(ds_{ij}-\frac{F'}{F}s_{ij}dH\right)\leq 0 \ \text{ for } f(s_{ij})=F(H) \quad \cdots\cdots(4.27)$$

式(4.26)あるいは(4.27)は s_{ij} が正規降伏面上あるいは内部に存在することを規定するために必要な条件であり，相似中心の包囲条件（enclosing condition for similarity center）と称される。**図—4.5**に s_{ij} が正規降伏面上にある極限状態における正規降伏面（この状態では相似中心面は正規降伏面に一致している）と下負荷面を示す。本図から，相似中心面が常に凸面で規定されるならば，s_{ij} から正規降伏面上あるいはその内部の任意点へのテンソルと相似中心面上の s_{ij} に関する外向き法線とのなす角は常に鈍角となり，式(4.27)を満たすことがわかる。よって，本条件を満たす次式を仮定する。



図—4.4　拡張下負荷面モデルにおける正規降伏面および下負荷面の配置図



図—4.5　相似中心 s_{ij} の包囲条件

$$ds_{ij}-\frac{F'}{F}dHs_{ij}=c\|d\varepsilon_{ij}{}^{p}\|\frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{R} \quad \cdots\cdots(4.28)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}-s_{ij} \quad \cdots\cdots(4.29)$$

これより，相似中心 s_{ij} の移動則は次式で与えられる。

$$ds_{ij}=c\|d\varepsilon_{ij}{}^{p}\|\frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{R}+\frac{F'}{F}dHs_{ij} \quad \cdots\cdots(4.30)$$

ここに，c は相似中心 s_{ij} の移動量を制御するための材料定数である。

次の関連流動則を採用する。

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=\bar{\lambda}\bar{N}_{ij}, \quad \left(\bar{N}_{ij}\equiv\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}\Big/\left\|\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right\|\right) \quad \cdots\cdots(4.31)$$

ここに，$\bar{\lambda}(>0)$ は正値の比例係数，$\bar{N}_{ij}(\|\bar{N}_{ij}\|=1)$ は下負荷面上の現応力点に対する正規化外向き法線テンソルである。適応条件式(4.25)に s_{ij} の移動則(4.30)および関連流動則(4.31)を代入することにより，$\bar{\lambda}$ は次式のように具体的に求められる。

$$\bar{\lambda}=\frac{\bar{N}_{ij}d\sigma_{ij}}{\bar{M}^{p}} \quad \cdots\cdots(4.32)$$

$$\bar{M}^{p}\equiv\bar{N}_{ij}\left\{\left(\frac{F'}{F}\bar{h}+\frac{U}{R}\right)\sigma_{ij}+\bar{a}_{ij}\right\} \quad \cdots\cdots(4.33)$$

$$\bar{a}_{ij}\equiv\frac{d\bar{\alpha}_{ij}}{\bar{\lambda}}=(1-R)z_{ij}-Us_{ij} \quad \cdots\cdots(4.34)$$

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

$$z_{ij} \equiv \frac{ds_{ij}}{\bar{\lambda}} = c\frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{R} + \frac{F'}{F}\bar{h}s_{ij} \quad \cdots\cdots (4.35)$$

$$\bar{h} \equiv \frac{dH}{\bar{\lambda}} \quad \cdots\cdots (4.36)$$

式(4.2)および(4.31)を式(4.1)に代入してストレッチング $d\varepsilon_{ij}$ が次式で与えられる。

$$d\varepsilon_{ij} = E^{-1}_{ijkl}d\sigma_{kl} + \frac{\bar{N}_{kl}d\sigma_{kl}}{\bar{M}^{p}}\bar{N}_{ij} \quad \cdots\cdots (4.37)$$

また，本式の逆関係である応力増分～ひずみ増分関係式は，初期下負荷面モデルの定式化と同様の手順（式(4.18)から(4.21)）により，次式のように求めることができる。

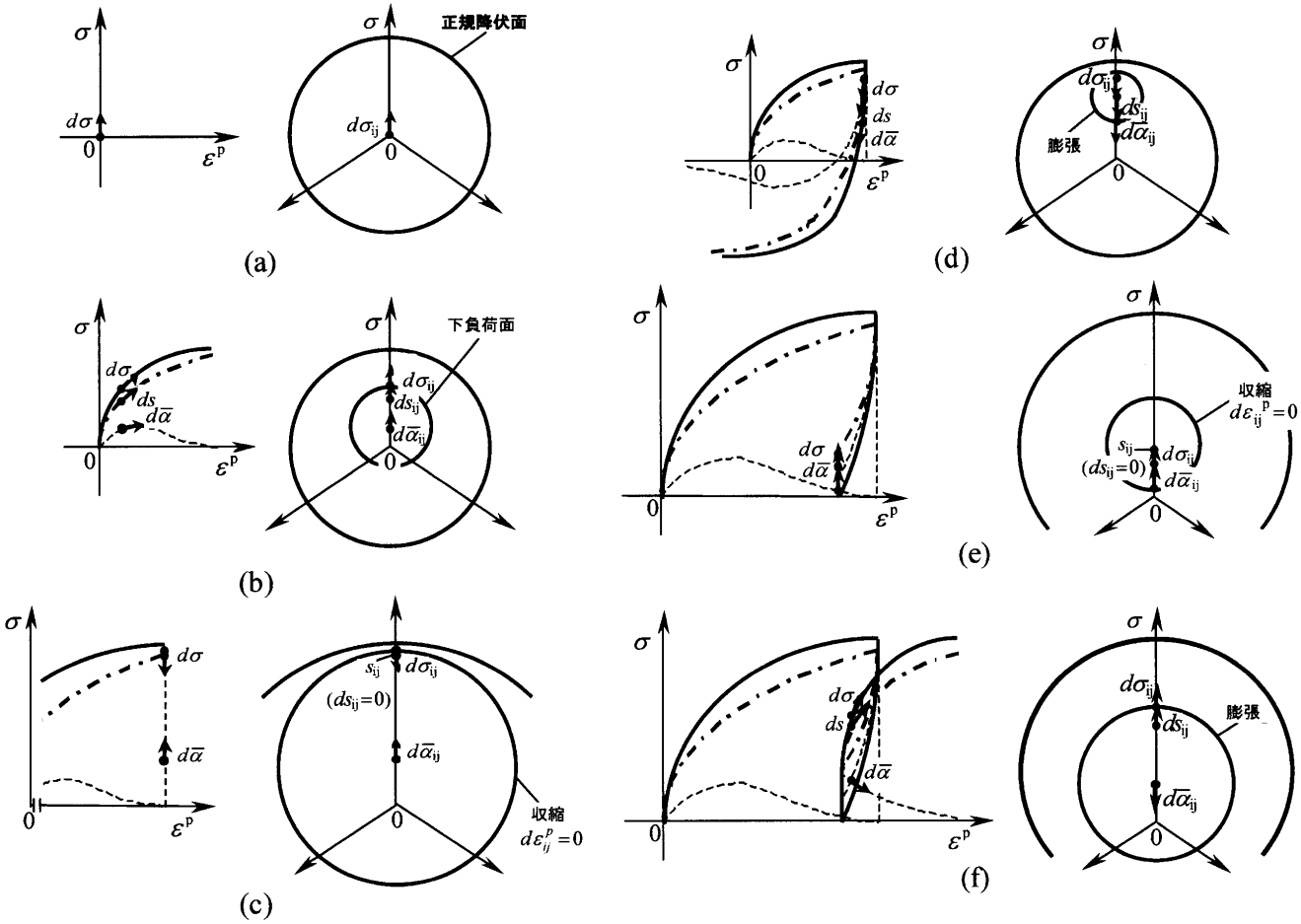
$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - \frac{\bar{N}_{mn}E_{mnop}d\varepsilon_{op}}{\bar{M}^{p} + \bar{N}_{mn}E_{mnop}\bar{N}_{op}}E_{ijkl}\bar{N}_{kl} \quad \cdots\cdots (4.38)$$

負荷基準[10]は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}{}^{p} \neq 0 &: \bar{N}_{mn}E_{mnop}d\varepsilon_{op} > 0, \\ d\varepsilon_{ij}{}^{p} = 0 &: \bar{N}_{mn}E_{mnop}d\varepsilon_{op} \leq 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4.39)$$

本拡張モデルは，当然ながら，既述の初期下負荷面モデルの三つ利点（滑らかな弾塑性遷移の表現，負荷基準判定の簡素化，塑性負荷過程における応力の自動制御機能）を継承している。加えて，**図―4.6**に示されるように，繰返し負荷に対しては閉じたヒステリシスループが現実的に表現される。その具体的計算の流れは以下のとおりである。以下では，説明を簡単にするため，初期等方・非硬化の Mises 型正規降伏面を持つ材料の単軸繰返し負荷状態に限定して解説を行う。

1) 負荷開始直後（弾性過程）：下負荷面は点（偏差応力が0）の状態から弾性的に現応力 σ_{ij} が増大する（同図(a)）。負荷開始直後は塑性変形を伴わないので，相似中心 s_{ij} は移動しない。
2) 負荷過程（弾塑性過程）：式(4.30)で示されるように，塑性変形過程（$d\varepsilon_{ij}{}^{p} \neq 0$）において，$s_{ij}$ は σ_{ij} の正規降伏面上の共役応力 σy_{ij} に漸近するように増大する（同図(b)）。
3) 除荷開始直後（弾性過程）：σ_{ij} は直ちに弾性的に原点方向に向かって減少する，このとき，式(4.30)により，$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = 0$ において $ds_{ij} = 0$ となるので，s_{ij} は移動しない。つまり，下負荷面は s_{ij} に向かって弾性的に収縮することとなる（同図(c)）。
4) 除荷過程（弾塑性過程）：σ_{ij} がさらに減少して，s_{ij} を通過すると，下負荷面が再び膨張に転じるので，塑性変形が発生する。同時に，s_{ij} も再び移動（減小）を開始する。このように，同モデルでは除荷過程でさえも応力の状態によっては塑性変形の発生を許容し得るので，図中に示されるような，Masing（マーシング）効果が適当に表現される（同図(d)）。
5) 再負荷過程（弾性過程）：σ_{ij} は s_{ij} を通過するまでは弾性的に増大する。3)と同様 $d\varepsilon_{ij}{}^{p} = 0$ で $ds_{ij} = 0$ となるので，s_{ij} は移動しない（同図(e)）。
6) 再負荷過程（弾塑性過程）：σ_{ij} が s_{ij} を通過すると，



図―4.6　拡張下負荷面モデルによる繰返し負荷挙動の表現

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

再び弾塑性過程に転じ，s_{ij} も再び増大を始める。以上の過程により，応力～ひずみ関係は閉じたヒステリシスループを呈する（同図(f)）。

拡張下負荷面モデルでは，正規降伏面と下負荷面の相似中心 s_{ij} を塑性変形とともに移動させることにより，繰返し負荷現象の予測に不可欠な閉じたヒステリシスループの表現を可能にしている。さらに，本現象の表現に新たに追加した材料定数は，s_{ij} の移動量を制御するための材料定数1個のみである。

4.2.3　拡張下負荷面モデルの土への適用

下負荷面式(4.23)を土に適用するため，次式で与えられる関数を採用する。

$$f(\bar{\sigma}_{ij})=f(\bar{p},\bar{\chi})=\bar{p}(1+\bar{\chi}^2) \quad \cdots\cdots(4.40)$$

ここに，

$$\bar{\chi}\equiv\frac{\bar{\eta}}{\bar{m}},\quad \bar{\eta}\equiv\frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad \cdots\cdots(4.41)$$

$$\bar{p}\equiv\frac{\bar{\sigma}_{ij}}{3},\quad \bar{q}\equiv\|\bar{\sigma}_{ij}{}^*\|,\quad \bar{\sigma}_{ij}{}^*\equiv\bar{\sigma}_{ij}-\bar{p}\delta_{ij} \quad \cdots\cdots(4.42)$$

$$\bar{m}=\frac{14\sqrt{6}\sin\phi_c}{(3-\sin\phi_c)(8+\cos 3\bar{\theta}_\sigma)} \quad \cdots\cdots(4.43)$$

$$\cos 3\bar{\theta}_\sigma\equiv\sqrt{6}\,\frac{\bar{\sigma}_{ij}{}^*\bar{\sigma}_{jk}{}^*\bar{\sigma}_{ik}{}^*}{\bar{q}^3} \quad \cdots\cdots(4.44)$$

ϕ_c は材料定数を表す。なお，式(4.40)の微分式については付録に示しているので，参照いただきたい。**図—4.7**に p～q 平面における正規降伏面，下負荷面および相似中心面を示す。本図から明らかのように，式は修正Cam clayモデル[11),12)]と同型の負荷関数であることがわかる。初期下負荷面モデルは，拡張下負荷面モデルにおける相似中心 $s_{ij}=0$ を常に仮定することにより表現される。すなわち，同モデルにおいては，応力空間の原点に相似中心が固定され，下負荷面が正規降伏面内で膨張，収縮することとなる。**図—4.8**は式(4.43)で示される π 平面における負荷面形状[13)]を示す。図中にはMohr-Coulomb（モール-クーロン）基準も示した。このように，式(4.43)の採用により，同基準をほぼ満たしつつ，凸面性を有する負荷面が規定される。拡張下負荷面モデルにおける正規降伏面，下負荷面および相似中心面に対しても同負荷関数を導入している。

式(4.23)の等方硬・軟化関数 F を次式で与える。

$$F(H)=F_0\exp\left(\frac{H}{\rho-\gamma}\right) \quad \cdots\cdots(4.45)$$

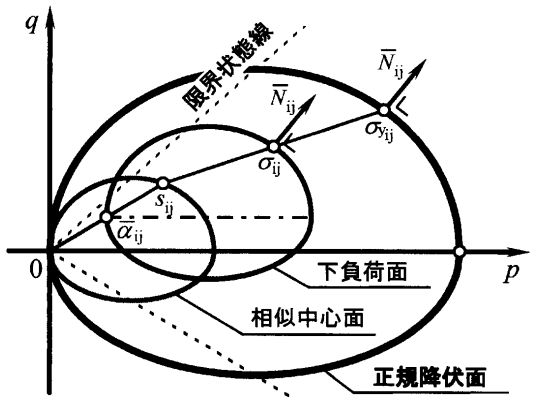
ここに，F_0 は初期の降伏面の大きさを表す。また，ρ および γ はそれぞれ圧力 p と体積 v の両対数（$\ln p$～$\ln v$）線形関係における正規圧密線および膨潤線の勾配を示す。さらに，等方硬・軟化変数 H の発展則として次式を採用する。

$$dH=d\varepsilon_v{}^p \quad \cdots\cdots(4.46)$$

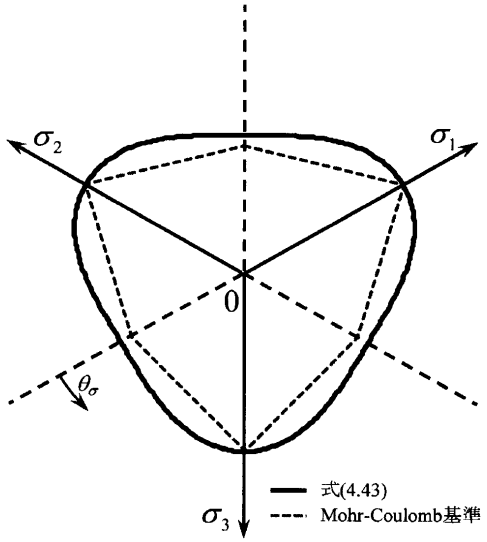
さらに，体積弾性係数 K は次式で与えられる。

$$K=\frac{p}{\gamma} \quad \cdots\cdots(4.47)$$

さらに，せん断弾性係数 G は式(4.47)とポアソン比 ν により次式で表される。



図—4.7　p～q 平面における正規降伏面，下負荷面および相似中心面



図—4.8　π 平面における負荷面形状

$$G=\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad \cdots\cdots(4.48)$$

4.3　下負荷面モデルによる土の単調・繰返し負荷挙動の表現

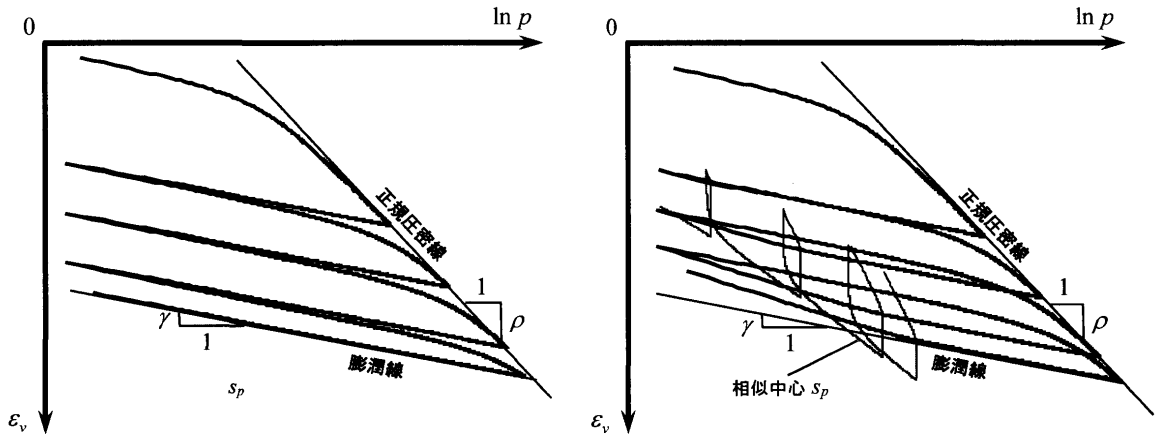
本節では，前節で定式化した初期ならびに拡張下負荷面モデルを用いて，等方圧密および軸対称条件下での土の典型的な単調・繰返し負荷挙動の予測特性を示す。

4.3.1　繰返し等方圧密挙動

図—4.9に初期および拡張下負荷面モデルによる土の繰返し等方圧密曲線の予測結果を示す。いずれも下負荷面概念を導入しているので，先行圧密応力以下の応力変化でも塑性変形の発生が許容され，滑らかな圧密曲線が表現できている。しかし，初期下負荷面モデル（同図(a)）では，相似中心 s_p が常に応力空間の原点に固定されるため，負荷時は塑性変形が生じる。一方，除荷時は弾性変形のみしか表現できないので，圧密曲線は開いたヒステリシスループを呈することとなる。これに対して，拡張下負荷面モデルでは，s_p が塑性変形とともに式(4.30)により，現応力点方向へ移動するので，除荷過程では，下負荷面は，まず，s_p に向かって弾性的に収縮（s_p は不変）し，現応力が s_p を通過すると同時に，下負

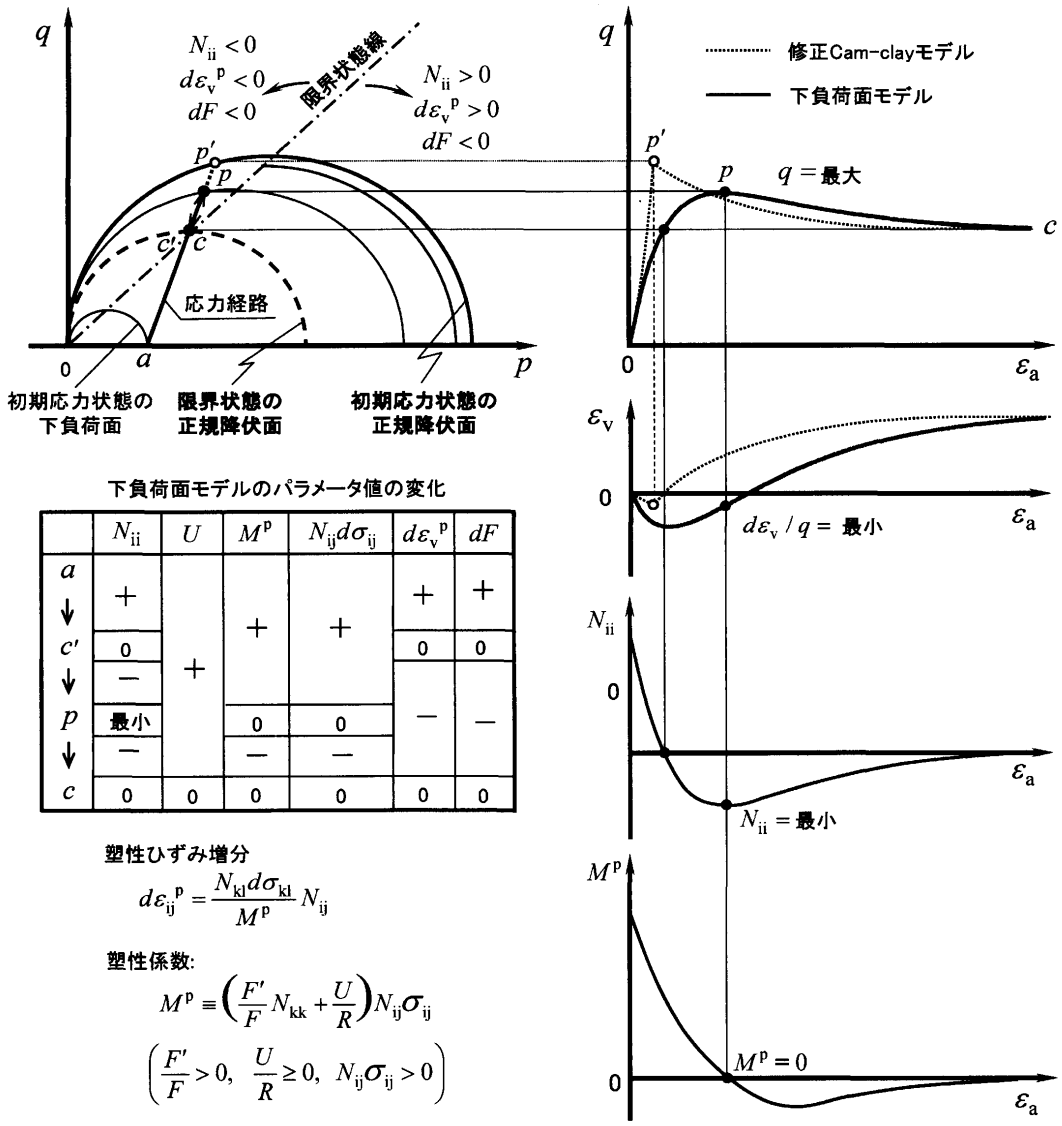
NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



(a) 初期下負荷面モデル　　(b) 拡張下負荷面モデル

図―4.9　繰返し等方圧密試験の計算結果



下負荷面モデルのパラメータ値の変化

	N_{ii}	U	M^p	$N_{ij}d\sigma_{ij}$	$d\varepsilon_v^p$	dF
a ↓	+	+	+	+	+	+
c' ↓	0				0	0
	−				−	−
p ↓	最小		0	0		
	−		−	−		
c	0	0	0	0	0	0

塑性ひずみ増分

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{N_{kl}d\sigma_{kl}}{M^p}N_{ij}$$

塑性係数:

$$M^p \equiv \left(\frac{F'}{F}N_{kk} + \frac{U}{R}\right)N_{ij}\sigma_{ij}$$

$$\left(\frac{F'}{F} > 0,\ \frac{U}{R} \geq 0,\ N_{ij}\sigma_{ij} > 0\right)$$

図―4.10　初期下負荷面モデルに過圧密土の単調負荷挙動の計算結果

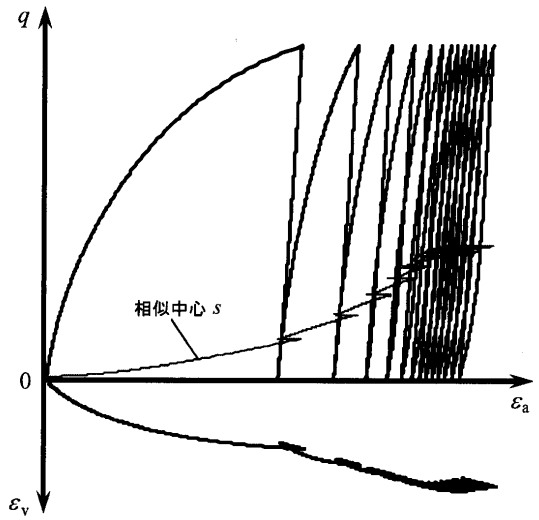
荷面は再び膨張に転じ，塑性変形の発生が許容される。これにより s_p は再び現応力点方向へ移動することとなる。この一連の過程において，圧密曲線は閉じたヒステリシスループを呈する。このように，拡張下負荷面モデルでは，繰返し負荷に伴う土の塑性的な圧縮現象（密度変化）を表現できることがわかる。

4.3.2　単調・繰返し軸対象排水圧縮せん断挙動

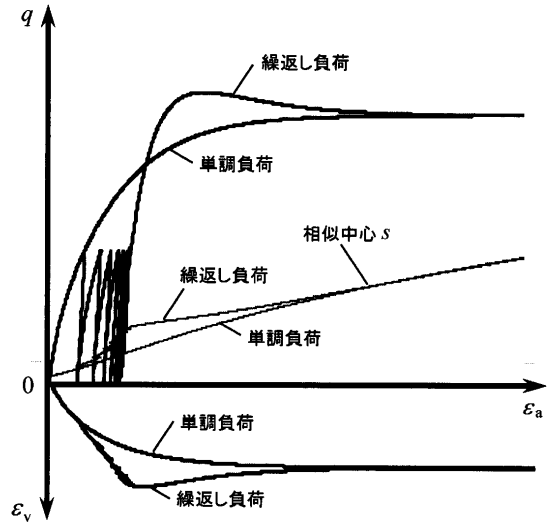
図―4.10に初期下負荷面モデルによる排水三軸圧縮せん断挙動の計算結果を示す。下負荷面の導入により，応力が正規降伏面に近づくにつれて徐々に塑性変形が大き

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



図—4.11　繰返し排水三軸圧縮せん断試験の計算結果



図—4.12　単調および繰返し負荷挙動の比較

くなる実際の土の圧縮せん断試験と同様の挙動を表現できている。特に，過圧密土に対しては，軸ひずみに対する軸応力のピーク（点 p）と軸ひずみ増分に対する体積ひずみ増分の極小値の発生点が一致する実験事実[14]を合理的に表現できているのがわかる。一方，修正 Cam clay モデルでは，降伏面内部の応力変化に対して弾性変形のみが予測されることになるので，軟化現象を伴う過圧密土の予測に際しては，過大なピーク応力（点 p'）が予測されることになる。これに対して，下負荷面モデルでは，修正 Cam clay モデルで用いる材料定数に加えて，下負荷面の発展量を規定する材料定数 u を導入するだけで，正規圧密土から過圧密土にわたる広範な土の力学挙動を現実的に表現することが可能である。

図—4.11に拡張下負荷面モデルによる繰返し排水三軸圧縮せん断試験の計算結果を示す。圧密曲線，同様，滑らかな応力～ひずみ曲線が表現されている。繰返し負荷挙動については，初回ループは相似中心 s_{ij} が小さく除荷時の弾性過程が大きくなるので，繰返し負荷挙動は開いたヒステリシスループを呈する。第2回ループ以降，s_{ij} が徐々に増大し，除可時の弾性過程が小さくなるので，閉じたヒステリシスループをもつ繰返し負荷挙動が表現できている。

図—4.12に正規圧密土の単調および繰返し負荷挙動の計算結果の比較を示す。単調負荷のみの場合には，正規圧密土の典型的な応力-ひずみ曲線が予測されている。一方，負荷初期に降伏応力以下の繰返し負荷を与えた計算では，繰返し負荷に伴う土の塑性的圧縮により土が硬化（過圧密化）し，単調負荷時の最大せん断応力に比して，より大きなせん断応力を示した後，軟化挙動に転じて限界状態に至る過圧密度土特有の力学挙動を再現できている。このように，拡張下負荷面モデルを用いれば，繰返し負荷によって，正規圧密土が徐々に過圧密土に遷移する過程，すなわち，土の密度変化も表現できることが理解されよう。

4.4 おわりに

本稿では，正規から過圧密状態にわたる土の単調および繰返し負荷挙動を現実的に表現し得る構成モデルとして，常に現応力点を通り正規降伏面内部で膨張，収縮，移動する負荷面を導入する下負荷面モデルの概念ならびに定式化について紹介した。本モデルの概念は，既述のように，地盤工学分野で広く用いられてきた Cam-clay モデルへ容易に導入できると同時に，同モデルでは表現できなかった様々な土の力学挙動の表現を可能にする種々の機能を有していることをいくつかの計算結果を用いて示した。

しかしながら，本稿で紹介したモデルは，繰返し負荷挙動の表現を読者に分かりやすく説明することを目的としているため，実際の土が有する様々な力学的性質，例えば，土の固有・誘導異方性を表現する回転硬化概念[9),14),17)]，砂質土において観察される塑性的せん断変形に伴う硬軟化現象[9)]，時間・速度依存性挙動の表現[18),19)]，降伏面に沿う応力速度（偏差接線応力速度）による非弾性変形挙動の発現[20)]，土の耐負圧性[21)]，繰返し負荷挙動の改善[22)]などは，全く考慮されていない。特に，地震時の地盤の変形挙動解析には，これらの特性を考慮したより高度なモデルを採用する必要がある。これらに関しては，参考文献[22)]にモデルの具体的定式化を含めたより詳細な説明がなされているので，是非とも参考にしていただきたい。

参考文献

1) Drucker, D. C.: Conventional and unconventional plastic response and representation, *Appl. Mech. Rev.* (*ASME*), Vol. 41, pp. 151～167, 1988.
2) Mroz, Z.: On the description of anisotropic work-hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 15, pp. 163～175, 1967.
3) Iwan, W. D.: On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems, *J. Appl. Mech.* (*ASME*), 34, 612～617, 1967.
4) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P.: A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mech.*,

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

Vol. 21, pp. 173～192, 1975.
5) Krieg, R.D.: A practical two surface plasticity theory, J. Appl. Mech. (ASME), Vol. 42, pp. 641～646, 1975.
6) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials, *Constitutive Equations of Soils* (*Proc. 9th ICSMFE, Special Session 9*), Tokyo, JSSMFE, pp. 73～82, 1977.
7) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic–plastic transition, *J. Appl. Mech.* (*ASME*), Vol. 47, pp. 266～272, 1980.
8) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 25, pp. 917～945, 1989.
9) Hashiguchi, K. and Chen, Z. P.: Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Nume. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 22, pp. 199～227, 1998.
10) Hashiguchi, K.: Fundamentals in constitutive equation: continuity and smoothness conditions and loading criterion, *Soils Found.*, Vol. 40(3), pp. 155～161, 2000.
11) *Plasticity*, Cambridge Univ. Press, pp. 535～608, 1968.
12) Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: *Critical State Soil Mechanics*, London, McGraw–Hill, 1968.
13) Hashiguchi, K.: A proposal of the simplest convex–conical surface for soils, *Soils Found.*, Vol. 42(3), pp. 107～113, 2002.
14) Taylor, D. W.: Fundamentals of Soil Mechanics, John Wiley & Sons, 1948.
15) Hashiguchi, K., Saitoh, K., Okayasu, T. and Tsutsumi, S.: Evaluation of typical conventional and unconventional plasticity models for prediction of softening behavior of soils, *Geotechnique*, Vol. 52, pp. 561～573, 2002.
16) Roscoe, K. H. and Burland, J. B.: On the generalized stress–strain behavior of 'wet' clay, *Engineering* Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive equations of soils* (*Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec Session 9*), pp. 229～238, 1977.
17) Hashiguchi, K.: Description of inherent/induced anisotropy of soils: Rotational hardening rule with objectivity, *Soils Found.*, Vol. 41(6), pp. 139～145, 2001.
18) Hashiguchi, K. and Okayasu, T.: Time–dependent elastoplastic constitutive equation based on subloading surface model and its application to soils, *Soils Found.*, Vol. 40(3), pp. 21～36, 2000.
19) Hashiguchi, K., Okayasu, T. and Saitoh, K.: Rate–dependent inelastic constitutive equation: the extension of elastoplasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol. 20, pp. 463～491, 2004.
20) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S.: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, Vol. 17, pp. 117～145, 2001.
21) Hashiguchi, K. and Mase T.: Extended yield condition of soils with tensile yield strength and rotational hardening, *Int. J. Plasticity*, pp. 1939～1956, 2007.
22) Hashiguchi, K.: *Lecture notes in applied and computational mechanics vol. 42, Elastoplasticity theory*. Springer, 2009.

付　録

土に対する負荷面関数(4.40)の微分式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}=\frac{\partial f}{\partial \bar{p}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}+\frac{\partial f}{\partial \bar{\chi}}\left\{\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}}\left(\frac{\bar{\eta}}{\partial \bar{p}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}+\frac{\bar{\eta}}{\partial \bar{q}}\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}{}^{*}}\frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}{}^{*}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}\right)+\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{m}}\frac{\partial \bar{m}}{\partial \cos 3\bar{\theta}_{\sigma}}\frac{\partial \cos 3\bar{\theta}_{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}{}^{*}}\frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}{}^{*}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}\right\} \quad \cdots\cdots(A4.1)$$

ここに，

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}}=1+\bar{\chi},\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\chi}}=2\bar{p}\bar{\chi} \quad \cdots\cdots(A4.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}}=\frac{1}{\bar{m}},\quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{m}}=-\frac{\bar{\eta}}{\bar{m}^2},\quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{p}}=\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}^2},\quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{q}}=\frac{1}{\bar{p}} \quad \cdots(A4.3)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}=\frac{1}{3}\delta_{ij},\quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}=\frac{\bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}{\|\bar{\sigma}_{kl}{}^{*}\|},$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}=\frac{\partial(\bar{\sigma}_{ij}-\bar{p}\delta_{ij})}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad \cdots\cdots(A4.4)$$

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial \cos 3\bar{\theta}_{\sigma}}=-\frac{14\sqrt{6}\sin\phi_c}{(3-\sin\phi_c)(8+\cos 3\bar{\theta}_{\sigma})^2}=-\frac{\bar{m}}{8+\cos 3\bar{\theta}_{\sigma}} \quad \cdots\cdots(A4.5)$$

$$\frac{\partial \cos 3\bar{\theta}_{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}=\sqrt{6}\times\left\{\frac{\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}{}^{*}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}\bar{\sigma}_{lm}{}^{*}\bar{\sigma}_{km}{}^{*}+\bar{\sigma}_{kl}{}^{*}\frac{\partial \bar{\sigma}_{lm}{}^{*}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}\bar{\sigma}_{km}{}^{*}+\bar{\sigma}_{kl}{}^{*}\bar{\sigma}_{lm}{}^{*}\frac{\partial \bar{\sigma}_{km}{}^{*}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}\right)}{\bar{q}^3}-\frac{3\bar{\sigma}_{kl}{}^{*}\bar{\sigma}_{lm}{}^{*}\bar{\sigma}_{km}{}^{*}\frac{\partial \bar{q}}{\bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}}{\bar{q}^4}\right\}$$

$$=\frac{3}{\bar{q}}\left(\sqrt{6}\frac{\bar{\sigma}_{im}{}^{*}\bar{\sigma}_{jm}{}^{*}}{\bar{q}^2}-\cos 3\bar{\theta}_{\sigma}\frac{\bar{\sigma}_{ij}{}^{*}}{\bar{q}}\right) \quad \cdots\cdots(A4.6)$$

NII-Electronic Library Service