初級講座

# 地盤工学技術者のための確率統計入門

## 5. 確率過程と確率場

本 城 勇 介（ほんじょう ゆうすけ）
岐阜大学 教授 工学部

大 竹 雄（おおたけ ゆう）
岐阜大学 特任助教 工学部

### 5.1 はじめに

この章では1個または数個の確率変数を取り扱う初歩的な確率論から一歩進んで，時間や空間を表す独立変数（ベクトル）の関数として表される確率変数である確率過程や確率場について説明する。それらの定義や基本的な性質から始めて，その応用についても述べる。

応用では地盤の特徴である不均質場のモデル化である確率場の例題を取り上げた。すなわち不均質な地盤上に建設された浅い基礎の支持力の問題と，造成地の不同沈下の問題を取り上げた。

### 5.2 確率過程と確率場

$x$ があるスカラーの実数であり，$Z(x)$ がどのような固定された $x$ に対しても確率変数であるとき，$Z(x)$ を確率過程（random process）という。$x$ は，すべての実数，正の実数，正の整数などを取ることができる。もし $x$ が離散量（例えば整数）であるとき，$Z(x)$ は離散確率過程といわれ，一方これが連続量のときは，連続確率過程という。さらに，$\boldsymbol{x}$ がある2次元または3次元の実数ベクトルであり，$Z(\boldsymbol{x})$ がどのような固定された $\boldsymbol{x}$ に対しても確率変数であるとき，$Z(\boldsymbol{x})$ を確率場（random field）という。確率過程が多くの場合，時間的に遷移する確率現象を取り扱うのに対して，確率場は空間的に遷移する確率現象を扱う。

#### 5.2.1 定義と記述

確率過程の理論と確率場の理論は，本質的に同じである。ここではまず確率過程（1次元の確率場とも言える）の理論の概要を述べ，確率場の理論を後で補うこととする。

確率過程（stochastic process, random process）の理論は，基本的に多数の相関する確率変数を取り扱う。したがって，確率過程の完全な記述には，すべての任意の $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ における確率変数 $(Z(x_1), Z(x_2) \cdots Z(x_n))$ の，同時確率分布が必要であると言うことになる。これは現実にはかなり厳しい要求であり，我々が実用的に応用する確率過程を記述するとき同時に考えるのは $Z(x_1)$ と $Z(x_2)$ という任意の二つの確率変数のみである。任意の $x_1$ と $x_2$ のにおける $Z$ の同時確率密度関数を定義することができれば，これに基づいて次のように平均，分散及び自己相関関数を定義できる。

$$\text{平均}: E[Z(x)] = \mu_z(x) \quad \cdots\cdots(5.1)$$

$$\text{分散}: Var[Z(x)] = E[\{Z(x) - \mu_z(x)\}^2] \quad \cdots\cdots(5.2)$$

$$\begin{aligned}\text{共分散}: Cov[Z(x_1), Z(x_2)] &= E[\{Z(x_1) - \mu_z(x_1)\}\{Z(x_2) - \mu_z(x_2)\}] \\ &= \sigma_{z_1z_2}(x_1, x_2) \quad \cdots\cdots(5.3)\end{aligned}$$

$$\text{自己相関関数}: \rho(\Delta x) = \frac{\sigma_{z_1z_2}(x_1, x_2)}{\sigma_{z_1}(x_1)\sigma_{z_2}(x_2)} \quad \cdots\cdots(5.4)$$

定常性は，確率過程の性質の中でももっとも重要であり，確率過程 $Z(x)$ は，次の性質が満たされるとき，またそのときに限って（弱）定常であるという。

① $E[Z(x)] = \mu_z$，すなわち $Z(x)$ の平均値は $x$ によらず一定値をとる。

② すべての $x$ と $x+\Delta x$ 対して，

$$Cov[Z(x), Z(x+\Delta x)] = C(\Delta x) \quad \cdots\cdots(5.5)$$

すなわち，任意の確率変数 $Z(x)$ と $Z(x+\Delta x)$ の共分散は，$x$ と $x+\Delta x$ の絶対値に依存せず，その距離 $\Delta x$ にのみ依存する。ここに $C(\Delta x)$ は，自己共分散関数と呼ばれる。

定常確率過程では，先の平均，分散，共分散及び自己相関関数は，次のようになる。

$$\text{平均}: E[Z(x)] = \mu_z \quad \cdots\cdots(5.6)$$

$$\text{分散}: Var[Z(x)] = E[\{Z(x) - \mu_z\}^2] = \sigma_z{}^2 = C(0) \quad \cdots\cdots(5.7)$$

$$\text{共分散}: Cov[Z(x), Z(x+\Delta x)] = C(\Delta x) \quad \cdots\cdots(5.8)$$

$$\text{自己相関関数}: \rho(\Delta x) = \frac{C(\Delta x)}{\sigma_z{}^2} = \frac{C(\Delta x)}{C(0)} \quad \cdots\cdots(5.9)$$

定常過程では，その一つの実現値から，その確率過程の特性を推定できると仮定する。この性質をエルゴート性（ergodicity）と言う。定常性は，エルゴート性の必要条件であるが，十分条件ではない。つまり，その確率過程が定常であるからと言って，その一つの実現値からその定常確率過程の特性を必ず推定できるわけではない。しかし一方，エルゴート性を持つ確率過程は必ず定常である。

エルゴート性は，一つ一つの統計量について論じられるべきものである。すなわち，「平均値のエルゴート性」，「共分散関数のエルゴート性」といった具合である。

確率過程のたくさんの実現値（サンプル）の平均を，アンサンブル平均と言うが，エルゴート性は，このアンサンブル平均が，一つの実現値の時間平均に一致することを保証する。すなわち時間を $x$ とすると，平均値のエルゴート性は次式により保証される。

$$E[Z(x)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T z(x)dx \quad\cdots\cdots(5.10)$$

共分散関数のエルゴート性も，同様の形式で書くことができる。

エルゴート性について厳密な理論を展開するには，上記の極限が何を意味するか等を含めて，多くの議論が必要であり，参考文献を参照されたい[1)]。現実のデータを解析する場合，エルゴート性を仮定しなければ，解析を進めることができないので，エルゴート性は暗黙の内に仮定されている場合がほとんどである。

非エルゴート的な定常過程の例題を考えることは容易である。次の確率過程を考えてみる。$Z_k$ は，この確率過程の $k$ 番目のサンプルを意味する。

$$Z_k(x)=\sin\{2\pi(x+\phi(k))\}+A(k) \quad\cdots\cdots(5.11)$$

ここに，$A(k)$ と $\phi(k)$ は，それぞれ標準一様分布に従う確率変数とする。よって $A(k)=a_k$ は，サンプル $z_k$ ごとに異なる。一方 $E[Z_k(x)]=0.5$ であり，$Z_k(x)$ は定常確率過程である。$Z_k(t)$ のアンサンブル平均は0.5であるが，個々のサンプルの時間平均は

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T z_k(x)dx=a_k$$

である。したがって，エルゴート性は成り立たない。

### 5.2.2 自己相関関数

自己相関関数は，確率過程の性質を考える上で，もっとも重要であるので，さらに説明を加える。

地盤の確率場によるモデル化では，自己相関関数の具体的な関数形として，デルタ関数，指数関数，ガウス関数等が用いられることが多い。それぞれの関数の形は次のとおりである。

$$\text{デルタ関数}:\rho(\Delta x)=\begin{cases}1 & \Delta x=0\\ 0 & \text{その他}\end{cases} \quad\cdots\cdots(5.12)$$

$$\text{指数関数}:\rho(\Delta x)=\exp[-\Delta x/\theta] \quad\cdots\cdots(5.13)$$

$$\text{ガウス関数}:\rho(\Delta x)=\exp[-(\Delta x/\theta)^2] \quad\cdots\cdots(5.14)$$

ここで，$\Delta x$ は2点間の距離，$\theta$ は自己相関距離である。

さらに，図―5.1には，平均0，分散1で，自己相関関数がデルタ関数，及び指数関数で自己相関距離が1と5のときの，正規確率過程のシミュレーション結果を示した。平均と分散が同じでも，全く異なった挙動を示すことが理解できる。

図―5.2に，白色雑音（white noise），自己相関距離 $\theta$ が単位長さ（$=1.0$）のときの指数型及びガウス型の自己相関関数の形状を示した。ガウス型では，2点間の距離が自己相関距離より短いときに指数型に比べて高い相関を示すが，自己相関距離を超えると，この関係が逆転する。

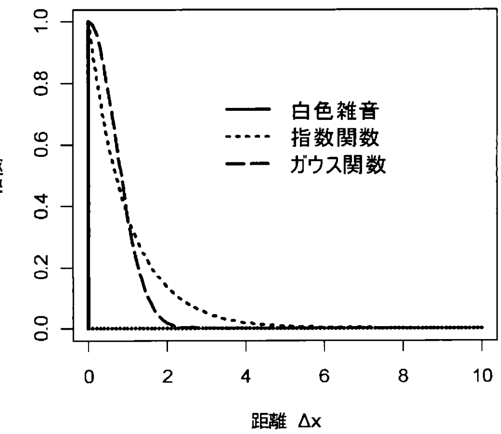
自己相関関数について，次の知識は有用である。

① 自己相関関数は偶関数である。すなわち $\rho(\Delta x)=\rho(-\Delta x)$，

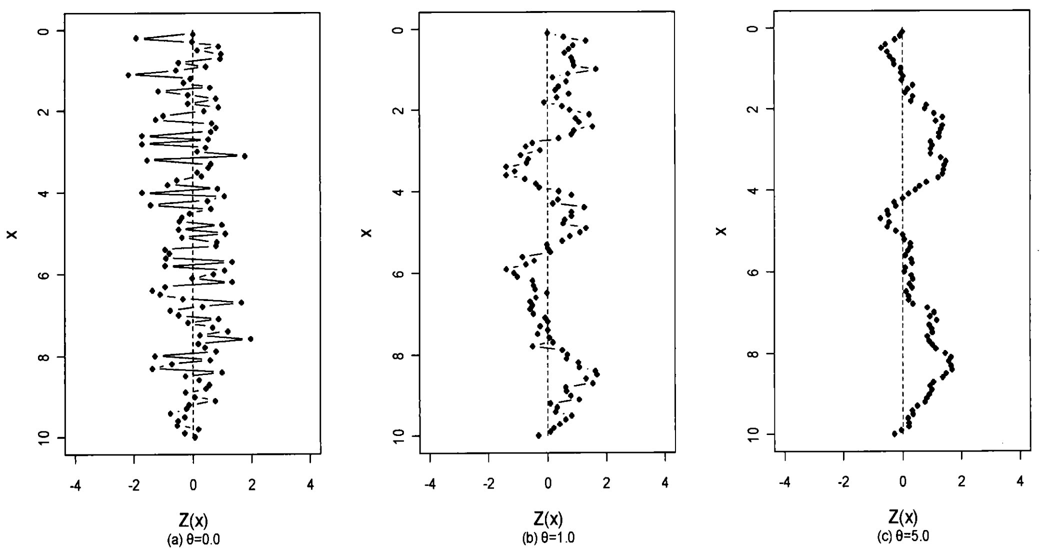
② 自己相関関数は，$\Delta x=0$ で最大値を取る。すなわち，$\rho(0)\geq\rho(\Delta x)$。

### 5.2.3 パワースペクトル密度関数

定常確率過程の自己共分散関数の代替的で等価な表現として，パワースペクトル密度関数がある。$Z(x)$ が弱定常過程で，その共分散関数 $C(\Delta x)=Cov(Z(x),Z(x+\Delta x))$ が与えられているとき，$C(\Delta x)$ のフーリエ逆変換




図―5.2 各種の自己相関関数




図―5.1 自己相関距離の異なる確率過程の例示

として，パワースペクトル密度関数を得ることができる。これは，Wiener-Khintchine（ウイナー・キンチン）の公式として，知られている[2]。

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(\delta)e^{-i\omega\delta}\,d\delta \quad\cdots\cdots(5.15)$$

フーリエ逆変換とフーリエ変換の関係から，次式も成り立つ。

$$C(\delta)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i\omega\delta}\,d\omega \quad\cdots\cdots(5.16)$$

ここに，$\omega=2\pi f$であり，$\omega$は角周波数と呼ばれる。$f$は周波数である。したがって，パワースペクトル密度関数を，周波数で記述する場合，$P(f)=2\pi S(\omega)=2\pi S(2\pi f)$である。表—5.1に，自己相関関数がデルタ関数，指数関数，ガウス関数の場合のパワースペクトル密度関数を示した。

地震波の解析等ではほとんどの場合パワースペクトル密度関数が用いられるが，地盤データの解析では自己相関関数が用いられる。しかしこれらは全く等価な情報の異なる表現である。パワースペクトル密度関数はまた，確率過程をモンテカルロシミュレーションで生成する際にも，重要な道具となる。

### 5.2.4 確率場

確率過程$Z(x)$の$x$が2次元または3次元の実数ベクトル$\boldsymbol{x}$であり，$Z(\boldsymbol{x})$がどのような固定された$\boldsymbol{x}$に対しても確率変数であるとき，$Z(\boldsymbol{x})$を確率場ということは，先に述べた。確率場は確率過程の拡張であり，ほとんど同様に取り扱えるが，幾つかの注意すべき点がある。

確率場では定常性は，均質と等方という二つの性質により表現される。確率場が均質であるとき，その確率密度関数は，$\boldsymbol{x}$のどのような平行移動に対しても不変である。これを2次までの統計量に限ると，平均と分散は$\boldsymbol{x}$に依存しない定数であり，共分散関数と自己相関関数は，$\boldsymbol{x}$のどのような平行移動に対しても不変である。すなわち共分散関数と自己相関関数は，$\boldsymbol{x}$により計算される距離ベクトル$\Delta\boldsymbol{x}$のみの関数である。特に，自己相関関数が次のように書けるとき，これを分離可能と言う：

$$\rho(\Delta\boldsymbol{x})=\rho(\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3)=\rho(\Delta x_1)\rho(\Delta x_2)\rho(\Delta x_3) \quad\cdots\cdots(5.17)$$

一方確率場が等方であるとき，その確率密度関数は，$\boldsymbol{x}$のどのような平行移動や回転に対しても不変（座標系に依存しない）である。これを2次までの統計量に限ると，平均と分散は$\boldsymbol{x}$に依存しない定数であり，共分散関数と自己相関関数は，任意の2点間の相対的な距離の絶対値のみの関数である。

表—5.1 自己相関関数とパワースペクトル密度関数

| | $\rho(\delta)$ | $S(\omega)$ | $P(f)$ |
|---|---|---|---|
| 白色雑音 | $k\delta(\delta)$ | $k/2\pi$ | $k$ |
| 指数関数 | $\exp\left[-\delta/\theta\right]$ | $\dfrac{1/\theta}{\pi(\omega^2+(1/\theta)^2)}$ | $\dfrac{2(1/\theta)}{4\pi^2 f^2+(1/\theta)^2}$ |
| ガウス関数 | $\exp\left[-(\delta/\theta)^2\right]$ | $\dfrac{1}{(2/\theta)\sqrt{\pi}}e^{-(\omega\theta/2)^2}$ | $\sqrt{\pi}\theta e^{-(2\pi f\theta)^2}$ |

確率場では，その幾何学的な制約のため自己相関関数が満たさなければならない条件が存在する。これらについては参考文献を参照されたい[3]。また確率量の場合と同様にパワースペクトル密度関数を定義できる。

### 5.2.5 地盤の確率場によるモデル化

対象とする土層は，地質学的にみて均質である場合，これを確率場を用いてモデル化する場合，地盤パラメータの値は，トレンド成分とランダム成分の和として表されると仮定するのが一般的である。トレンド成分はある確定した座標の関数と考え，ランダム成分は（弱）定常確率場によって記述されるとする。ここで確率場は，次式により記述される。

$$Z(X)=\mu_Z(X)+\varepsilon(X) \quad\cdots\cdots(5.18)$$

ここに，$Z$は定常確率場，$x$は空間座標，$\mu_Z$は確定値であるトレンド成分，$\varepsilon$はランダム成分であり，平均0，分散$\sigma_z^2$，自己相関関数$\rho_Z(\Delta X|\theta)$である。なお$\theta$は自己相関距離である[4]。

## 5.3 浅い基礎の支持力の信頼性解析

信頼性設計の導入が進む中，地盤パラメータの空間的ばらつきが構造物の性能に与える影響を，設計時における具体的な処理の仕方は，大きな関心事の一つであろう。

ここでは，具体的な設計例題に基づいて，地盤パラメータの空間的ばらつきが構造物の性能に与える影響を視覚的，定量的に示した上で，それを適切に，かつ簡易的に評価する方法を示している。なお，ここでの議論のキーパラメータは「局所平均（定義は後述する）」と「自己相関距離」である。そして，結論から述べてしまうと，実は，地盤パラメータの空間的ばらつきの影響は，一般に“思ったより小さい”のである。

### 5.3.1 何のばらつきを捉えるのか？

例えば，工事現場で予期せぬ変状が生じた時，その挙動の再現解析をすることを考えてみる。対象現場の地層を大まかに区分し，区分した地層毎に地盤パラメータを与える。地層構成のモデル化が適切で，生じた変状を表現可能な構成式を選択していれば，考えられる範囲でパラメータを調整していくと，挙動をある程度再現できることが多いだろう。現場の地盤は不均質に堆積しているだろうが，この時，地層中の地盤パラメータの空間的ばらつきの影響を考える技術者はいるであろうか。

我々は，地盤の不均質性が構造物の挙動に与える影響は比較的小さいことを経験的に知っている。この設計実務の直感的理解を表現した言葉が，欧州連合が開発した設計コード Eurocode7[5]に示されている。

「地盤構造物の限界状態における挙動を支配する地盤の範囲は，通常の試験試料や，原位置試験で影響を受ける地盤の範囲よりかなり大きい。したがって，支配パラメータの値は，かなり大きな地盤の面積や体積についての平均値である。特性値は，この平均値の注意深い推定値でなければならない。（EN1997-1,2.3.5.2）」

すなわち，構造物の挙動を支配するのは，地盤調査データにみられるような，いわば点のばらつきではなく，

地盤のある範囲，局所部分の平均値（以後，局所平均と呼称）のばらつきと考えるのが合理的である。このことは，記述するまでもないことかもしれないが，地盤構造物の信頼性解析を適切に行う上で，改めて強調しておきたい点である。

### 5.3.2　局所平均の効果

粘性土地盤上の浅い基礎の支持力問題を例に局所平均の効果を確認してみよう。計算条件を図―5.3に示すが，基礎幅 2 m の浅い帯基礎で，現場調査により，粘着力 $c$（kN/m$^2$）は，平均値 $\mu_c = 30$（kN/m$^2$），変動係数 $COV_c = 0.20$ の正規分布，水平方向の自己相関距離 $\theta_x = 5$ m，鉛直方向の自己相関距離 $\theta_z = 0.5$ m とする。（堆積地盤では，一般に水平方向の相関が，鉛直方向のそれに比べてかなり高い。）

内部摩擦角 $\phi = 0$ と仮定すれば，浅い基礎の支持力公式より単位面積当たりの支持力 $q_d$ は $c$ に比例する（(5.19)式）。

$$q_d = cN_c \quad \cdots\cdots (5.19)$$

ここで，$N_c$ は支持力係数である。容易に計算できるが，$COV_c = 0.20$ をそのまま $c$ に与えると，$q_d$ の変動係数 $COV_b$ は0.20が得られる。ただし，この解は明らかな間違いである。

このことを，確率場の生成と有限要素法を組み合せ，モンテカルロシミュレーション（MCS）で直接評価してみよう。以後，この解析方法を MC 有限要素法と呼称する。用いる方法は，Fenton（フェントン）and Griffiths（グリフィス）[6]が提案し，解析プログラムを公開している RBEAR2D である。確率場の生成については，「Local average sub-division（LAS）」法[7]に基づいている。LAS は，空間を階層的に分割しながら，分割されるセル同士の局所平均の値が，仮定された確率場の相関構造を満たし，かつそれらの平均値が分割される前のセルの平均値と一致する等の条件を満たすように，局所平均場が生成する方法である。浅い基礎の沈下や支持力，深い基礎の支持力，堤体の浸透問題などに適用され，その有効性が検証されている[6]。この手法についての解説は，本報の趣旨とは異なるため，詳細は割愛する。詳細が知りたければ，文献 6）を参照されたい。図―5.3のメッシュの着色は，c の大きさを示し，生成された場の1例である。

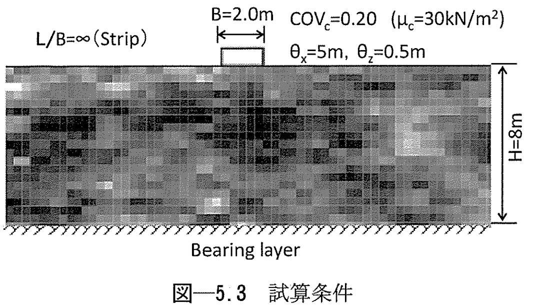
図―5.4は，RBEAR2D を用いて計算された基礎の支持力のヒストグラムである。先に示した平均値，変動係数，自己相関距離に基づいて地盤の不均質な場を1 000回生成し，1 000回基礎の極限支持力を計算，集計した結果である。なお，実線で $COV = 0.20$ の理論確率分布も併記している。この結果，極限支持力の変動係数は $c$ の変動係数よりも小さい $COV_b = 0.11$ と計算された。この効果がすなわち局所平均の効果である。地盤パラメータの空間的ばらつきの効果は，局所平均の効果により低減されることが確認できる。ここでは，これを地盤パラメータの空間的ばらつきの低減と呼ぶ。

### 5.3.3　自己相関距離が及ぼす影響

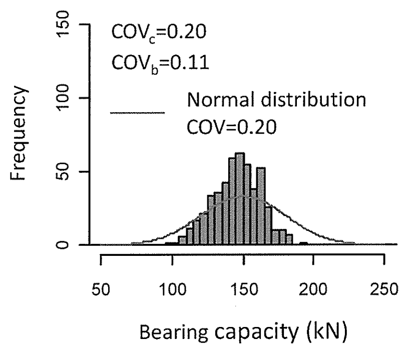
先に，自己相関距離がキーパラメータであると述べた。その影響を MC 有限要素法に基づいて確認してみよう。

図―5.5は，先に示した例題の条件を基本として，$\theta_x$, $\theta_z$ を変更し，$c$ の不均質な場を生成した結果を示している。(a), (b), (c)の順で自己相関距離を長く設定した。そして，(c)は現実的ではない大きな値を与えている。図からも分かるとおり，このケースは，個々の生成された地盤内では空間的ばらつきが無視でき，地盤全体の $c$ が $COV = 0.20$ で変動するケースである。それぞれ三つサンプルを示しているが，同じ平均値と変動係数を持つ地盤を想定しているにもかかわらず，まったく異なる性質を持つように見える。もちろん，計算される支持力のばらつきも大きく異なる。

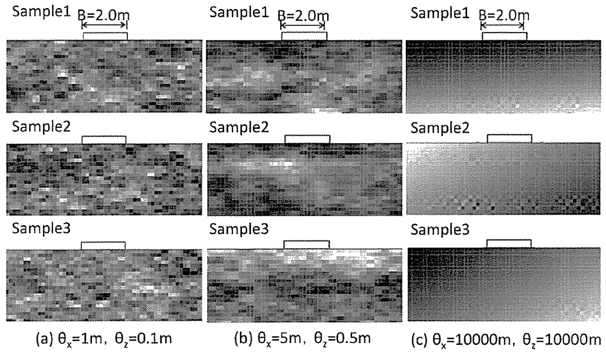
図―5.6は，それぞれの計算結果を示している。おそらく読者の直感と一致すると思われるが，$c$ の自己相関距離が短いほど計算される極限支持力のばらつきは小さくなる。また，ケース毎の違いが非常に大きく，自己相関距離の影響の大きさを確認することができる。そして，(c)のケースが間違いであると述べた最初の解と一致していることに注目してもらいたい。過去に地盤パラメー



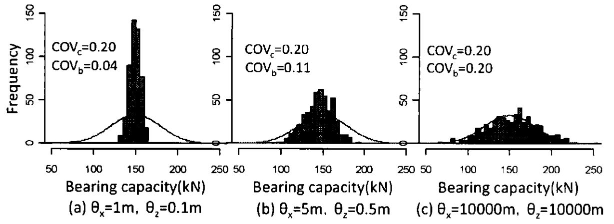

図―5.3　試算条件




図―5.4　MC 有限要素法による支持力の計算結果




図―5.5　粘着力の空間的ばらつきの可視化




図―5.6　自己相関距離別の極限支持力の算定結果

タのばらつきを考慮したと称する少なからぬ信頼性解析が事実上この仮定（空間的ばらつきがない）で行われていた。これでは，真の意味の信頼性解析になっていないことを，この図は明確に示している。なお，この(c)のケースを「Primitive Case」と呼称する。

さらに付け加えると，理論的には，自己相関距離が0である場合，支持力のばらつきは0となる（このような確率場はホワイトノイズと呼ばれる）。

### 5.3.4　Vanmarckeの分散関数を用いた近似解法

これまで用いてきたMC有限要素法は魅力的な方法の一つである。ただし，実際の問題は先の例題のような単純な問題ではなく，モデル化に係る労力やMCSのための繰り返し計算に係る時間を考えると，すべての設計問題に適用することは現実的ではないだろう。ここでは，筆者らが提案している近似解法[8),9)]について述べる。

この近似解法で重要な役割を担うのが，Vanmarcke（ヴァンマルク）[10)]の分散関数（Variance Function）である。Vanmarckeは，これまで述べてきた効果を早くから指摘し，その解析のための道具を用意した。以下にその概要を示す。

1次元確率場の場合の局所平均は，$x$をその局所平均を取る長さ$V$の中心位置とすると，次の式で表される。

$$Z_V(x)=1/V\int_{x-V/2}^{x+V/2}Z(u)du \quad\cdots\cdots(5.20)$$

Vanmarckeは，この局所平均の分散を記述する関数として，次の分散関数$\Gamma^2(V/\theta)$を提案した。

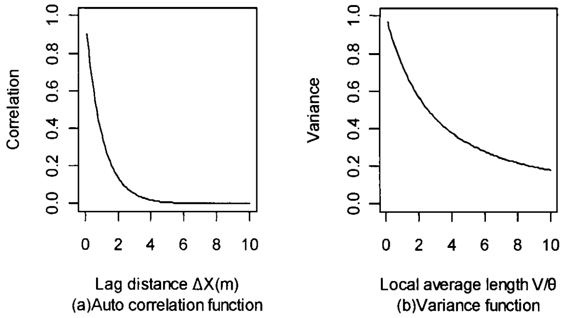
$$\sigma_{Z_V}^2=E[(Z_V(x)-\mu_Z)^2]=\sigma_Z^2\Gamma^2(V/\theta)\quad\cdots\cdots(5.21)$$

$\Gamma^2(V/\theta)$は，仮定される自己相関関数の関数形に応じて，解析的に求められる。自己相関関数が指数型（(5.13)式）の分散関数は，(5.23)式のようになる（図―5.7参照）。

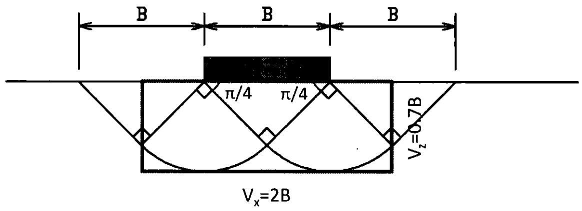
$$\rho(\Delta x)=\exp[-\Delta x/\theta]\quad\cdots\cdots(5.22)$$

$$\Gamma^2(V/\theta)=(\theta/V)^2[2(V/\theta-1+\exp(-V/\theta))]\quad\cdots\cdots(5.23)$$

ここで，$\Delta x$は2点間の距離，$\theta$は自己相関距離である。$V$と$\theta$が与えられれば，局所平均の分散を容易に計算することができる。ここで気になるのが，「構造物の挙動を支配する地盤のある範囲，局所部分」と定性的に表現してきた局所平均の範囲$V$の決定方法ではないだろうか。筆者ら[9)]は，MC有限要素法と近似解法で同一の問題を多数解き，キャリブレーションすることで，局所平均をとる範囲$V$の具体的な設定方法について提示した。図―5.8は，粘性土地盤上の浅い基礎の支持力問題を考える上での局所平均の範囲を図示したものである。支持力公式のすべり線との関連からその意味を明快に解釈することができる。その他，砂質土地盤でも同様の考え方が適用できること，弾性変形問題については，載荷荷重の応力伝播を確認し，載荷荷重の10%以上の増加応力が生じる範囲を局所平均として与えれば良いことを示した[9)]。




図―5.7　指数関数型の自己相関関数と分散関数




図―5.8　局所平均の範囲と支持力公式のすべり線

以上の準備より，本近似解法の流れを以下に示す。

**Step 1**　Vanmarckeの分散関数の計算

局所平均をとる範囲$V$を設定し，$V$と$\theta$の関係からVanmarckeの分散関数に基づき局所平均の分散$\sigma_{Z_V}^2$を算定する。自己相関関数の分離可能性を仮定しているので，分散関数は多次元確率場に容易に拡張できる。3次元確率場の局所平均の分散は，次式で評価できる。

$$\sigma_{z_V}^2=\Gamma_1^2(V_1/\theta_1)\cdot\Gamma_2^2(V_2/\theta_2)\cdot\Gamma_3^2(V_3/\theta_3)\cdot\sigma_z^2\quad\cdots(5.24)$$

**Step 2**　モンテカルロシミュレーション

空間的ばらつきの影響を考慮する変数をStep 1で求めた局所平均の平均値と分散$\sigma_{Z_V}^2$をもつ確率変数として，一般的な設計式（例えば(5.1)式）を用いたMCSにより信頼性解析を行う。

### 5.3.5　近似解法を用いた信頼性解析の具体的手順

先に示した例題（図―5.3）を近似解法により解いてみよう。図―5.4に示したとおり，MC有限要素法により得られた支持力の変動係数$COV_b=0.11$である。

**Step 1**　Vanmarkeの分散関数の計算

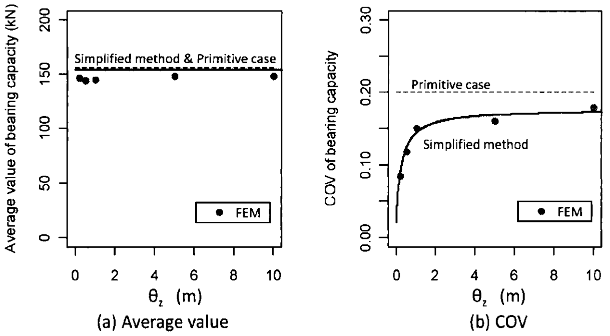
局所平均の範囲は，図―5.8より水平方向$V_x=2B=4$ m，鉛直方向$V_z=0.7B=1.4$ mが得られる。自己相関距離は$\theta_x=5$ m，$\theta_y=0.5$ mであるので，分散関数は(5.22)式より，$\Gamma_x=0.88$，$\Gamma_z=0.68$を得ることができる。

(5.23)式より，$c$の局所平均の変動係数$COV_{cv}$は下式により得られる。

$$COV_{cv}=\Gamma_x(V_x/\theta_x)\cdot\Gamma(V_z/\theta_z)\cdot COV_c$$
$$=0.88\times0.68\times0.20=0.12$$

**Step 2**　モンテカルロシミュレーション

(5.19)式の$c$に，平均$\mu_c=30\,\mathrm{kN/m^2}$，変動係数




**図—5.9**　MC 有限要素法と近似解法の試算結果比較

$COV_{cv}=0.12$ の正規分布で乱数を発生させ $q_d$ kN/m$^2$ を評価する。(5.18)式の場合，MCS をするまでもないが，$COV_b=0.12$ が得られ，MC 有限要素法の解とほぼ一致する。

この手順に従って，さらに試算をしてみよう。**図—5.9**は，同一の解析モデルで $\theta_z=0.2$，0.5，1.0，5，10，20 m と変化させて MC 有限要素法と，近似解法の結果を比較した図である。近似解法は，確率有限要素の解を良く再現しており，有効な手法であることが確認できる。また，「Primitive Case」と比べて支持力の分散は大きく低減されることが分かる。

なお，この近似解法は，浅い基礎の問題に限ったものではない。例えば，杭基礎の支持力問題を考えると，周面摩擦力であれば杭の周面積が局所平均を取る範囲であろうし，先端支持力であれば，円形基礎の支持力すべり線から設定できるだろう。本報では，非常に簡単な設計例題を対象に具体的な信頼性解析の方法を示した。実際に信頼性解析を実施する場合や，その他構造物へ展開する場合には，ぜひ，文献[8),9)]を参照されたい。

## 5.4　宅地造成地の不同沈下予測

最後に地盤工学の問題で特に確率場理論の応用として有用なクリギングについて紹介する。これはフランスの統計学者 Matheron（マスロン）により1960–70年代に開発された理論であり，とくに鉱山開発の分野での利用を目的としており，地盤工学の問題にも応用できる。ここでは地盤の沈下量を統計的に推定し，そこから予測される不同沈下量を求める方法の提案について紹介する[11)～13)]。

### 5.4.1　各点における沈下予測

ここで用いるデータは，泥炭地盤に宅地を造成し，その後約 3 年間のプレローディグを経て，またその後約 3 年間の観測期間を経た地盤である。対象としている宅地では，約 600 m$^2$ に 1 点の沈下観測点があり，これらの観測地点で，泥炭地盤の沈下予測に広く用いられる（沈下量）－log（時間）関係によりかなり精度良く予測することができる。まずこのような沈下解析を行う。

### 5.4.2　クリギングによる沈下量の内挿

クリギングとは，確率場のある領域内での任意の位置における値を，その領域内の数点で測定された確率場の 1 組の実際値から推定する方法である。本研究と照らし合わせれば，対象地域内の $N$ 個の観測点での沈下量から，領域内の任意点での沈下量を推定する方法である。この方法は確率場の統計量(平均，分散，自己相関関数)と観測値という，知りうるすべての情報に基づいて生起しているサンプル関数を直接内挿することを特徴としている。これにより，対象地域の沈下量を平面的に推定でき，地域内の沈下の傾向を知ることなどができる。

今，観測された沈下量を，

$Z(\underline{x})=m(\underline{x})+W(\underline{x})$ ……………………………………(5.25)

$(\underline{x})$：対象地域 $R$ 内のある 1 点を表す $\underline{x}=(x1, x2)$

$Z(\underline{x})$：$\underline{x}$ における沈下量を表す確率変数

$m(\underline{x})$：$\underline{x}$ で確定値をとるトレンド成分

$W(\underline{x})$：$\underline{x}$ でのランダム成分

と表す。対象地域のどの点においても，沈下量はトレンド成分とランダム成分の和で表されると仮定する。本研究においては $Z(\underline{x})$ の定常性を仮定しており，その平均と分散は一定である。基本仮定は次のようである。

①　不偏性：推定量の期待値が平均値に一致する。

$E[\hat{Z}(\underline{x})]=m(\underline{x})$ …………………………………………(5.26)

②　線形推定量

推定量は観測値の線形結合によって表現される。

$Z(\underline{x}_i)$：$R$ 内の $N$ 個の観測点 $\underline{x}_i$（$i=1, \cdots, N$）で得られた沈下量

$\hat{Z}(\underline{x})$：任意点での予測沈下量

$v_i$　：係数（$i=1, \cdots, N$）

$\hat{Z}(\underline{x})=\sum_{i=1}^{N} v_i Z(\underline{x}_i)=Z_N{}^T \underline{v}$ ……………………………(5.27)

また，式(5.27)を(5.26)に代入すると，

$$E[\hat{Z}(\underline{x})]=E\left[\sum_{i=1}^{N} v_i Z(\underline{x}_i)\right]=\sum_{i=1}^{N} v_i E[Z(\underline{x}_i)]$$

$$=\sum_{i=1}^{N} v_i \mu_z=\mu_z$$

これより，任意点での予測沈下 $\hat{Z}(\underline{x})$ が不偏推定量であるための条件

$\sum_{i=1}^{N} v_i=1.0$ ………………………………………………(5.28)

が得られる。

③　最小分散推定量

以上二つの条件のもとで，$\hat{Z}(\underline{x})$ と真値との二乗誤差の期待値が最小となるように係数 $v_i$ を決定することにより $\hat{Z}(\underline{x})$ を求める。これはラグランジュ未定定数法により求めることができ，$\hat{Z}(\underline{x})$ は次式で与えられる。

$\hat{Z}(\underline{x})=Z_N{}^T[K^{-1}\underline{k}(\underline{x})+K^{-1}FA\{\underline{f}(\underline{x})-F^T K^{-1}\underline{k}(\underline{x})\}]$

……………………………………………………………(5.29)

ここに，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}$ である。

またその推定誤差は，

$\sigma_Z{}^2(\underline{x})=[Var(Z(\underline{x}))-\underline{k}(\underline{x})^T K^{-1}\underline{k}(\underline{x})]$

$+[\underline{f}(\underline{x})-F^T K^{-1}\underline{k}(\underline{x})]^T A\{\underline{f}(\underline{x})-F^T K^{-1}\underline{k}(\underline{x})]$

……………………………………………(5.30)

ここに，

$\boldsymbol{K}$　：$N$ 個の観測点間の観測値の分散・共分散行列

$\underline{k}(\underline{x})$：$x$ 点と各観測点の観測値間の共分散ベクトル

$\boldsymbol{F}$　：トレンド曲面の説明変数行列

$\underline{f}(\underline{x})$：$x$ 点の説明変数ベクトル

クリギングでは沈下量の推定を行った。しかし，クリギング法ではあくまでも沈下挙動の平均値を求めているのみで，不同沈下量の推定に必要不可欠な勾配の統計量を求めることはできない。これにはクリギング法に加え，条件付シミュレーションを併用して解析を行う必要がある。条件付きシミュレーションとは，全観測点を通過し，かつ既知の統計量を満足するような，生起している可能性のある多数のサンプル関数をモンテカルロ法によって生成し，その沈下勾配の統計量を求めることにより不同沈下量の推定を行うものである。条件付きシミュレーションの手順等は，誌面の都合で割愛する[12),13)]。

### 5.4.3　計算例の提示

解析によって得られた結果を示す。まずクリギングで得られる曲面を，自己相関距離がもっとも適当と思われる25 mの他，比較のために5 mの場合も計算した。自己相関距離 $\theta$ を25 mと推定したのは，沈下量の実測値によるバリオグラムに基づく解析による[13)]。沈下量は実測値である3年目（1 017日目）の44点の沈下量を用いた。この曲面はすべての観測点を通過しており，沈下量のトレンド成分に，クリギングによるランダム成分を加えたものである（以下 $\hat{Z}(\underline{x})$ 平面とする）。

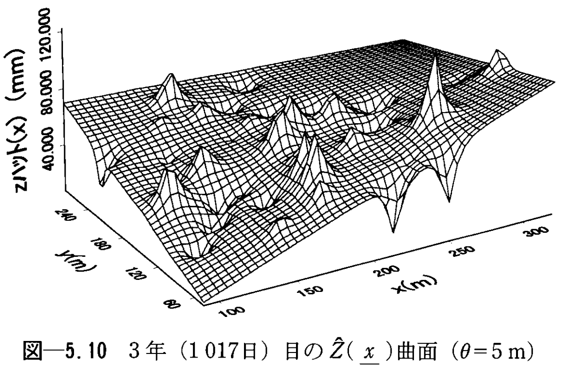
3年目の沈下量によるクリギング結果を示す**図—5.10**と**11**より，自己相関距離 $\theta$ が5 m及び25 mどちらの場合でも，左下から右上方向に値が上昇している傾向が見られる。また，数箇所で高い（低い）値をとり，グラフが上方向（下方向）に突き出している様子が見られるが，これはその各点で大きい沈下量が与えられているためである。二つを比較すると，自己相関距離が長い場合のほうが，なだらかな傾斜を持ち，全体的になだらかに変動する。

次に条件付きシミュレーションを用いて実際に生起する可能性のある $Zc(x)$ 曲面を生成した。そのグラフを次に示す。これが本手法で最終的に得られる沈下曲面である。このグラフは全観測点を通過し，さらに沈下量の統計量を満たしている。

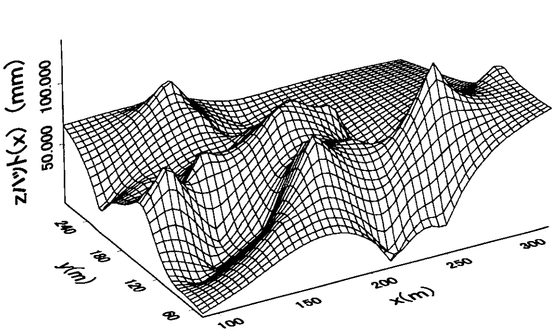
**図—5.12**と**13**の条件付シミュレーションの結果の例を $\hat{Z}(\underline{x})$ 曲面と比較すると，右上の $\hat{Z}(\underline{x})$ 曲面では平らである部分が，$Zc(x)$ では起伏が生じ，この部分で沈下が発生している様子がわかる。その様子は自己相関距離が短い場合のほうが顕著であり，$\theta=25$ m ではあまり起伏が生じていない。

この各点の沈下量から勾配を求め，各ボックスでの不同沈下量を求めた。まず全点での沈下量の平均値と，全ボックスでの不同沈下量の平均値を，**表—5.2**に示す。

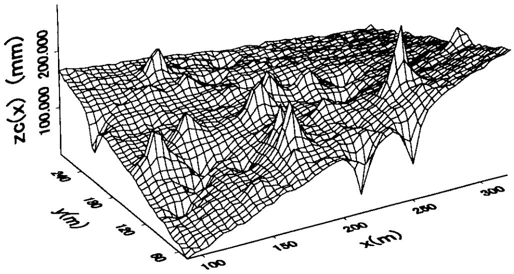
今回定義した不同沈下量とは，戸建て住宅の基礎の大きさを勘案して5 m隔たった2点間の沈下量をその距離で除した無次元で，1/1 000の大きさを持つ値のことである。つまり3年目，自己相関距離5 mならばその不同沈下量は1.1％である。この1％という数字はかなり大きいものであり，木造住宅ならば外壁にひび割れが生じるような値である。住宅にとっては著しく危険な数値であるといえる。一方，自己相関距離が25 mの場合



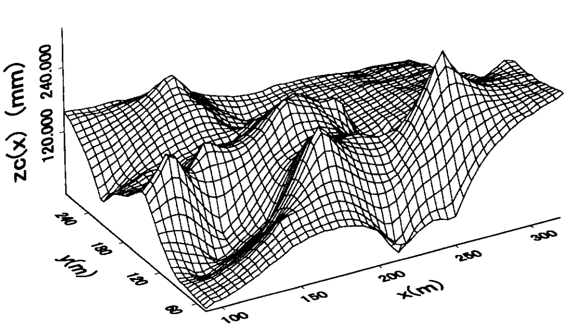

**図—5.10**　3年（1 017日）目の $\hat{Z}(\underline{x})$ 曲面（$\theta=5$ m）




**図—5.11**　3年（1 017日）目の $\hat{Z}(\underline{x})$ 曲面（$\theta=25$ m）




**図—5.12**　10年後の $Zc(x)$ の一例（$\theta=5$ m）




**図—5.13**　10年後の $Zc(x)$ の一例（$\theta=25$ m）

**表—5.2**　対象全地域における不同沈下量の平均値

| | 自己相関距離(m) | 沈下量(mm) | 不同沈下量(1/1000) |
|---|---|---|---|
| 3年目 | 5 | 59 | 11 |
| | 25 | 58 | 6 |
| 10年後 | 5 | 132 | 26 |
| | 25 | 128 | 14 |

は，この値は0.6％となる。

この表からわかるように，当然のことながら，どちらの年数の場合も，自己相関距離の違いでは絶対沈下量の差はあまり見られなかった。しかし，自己相関距離が短いほど不同沈下量が大きくなっており，3年目と10年後の比較から，沈下量が大きくなればなるほど不同沈下量が大きくなる傾向もみられる。不同沈下量が自己相関距離の短い場合に大きくなる理由は，自己相関距離が短くなるほど沈下の平面的な特性に，いわゆる短周期成分が加わるためである。

ここで紹介したモデルを数理的に発展させた時空間の沈下予測モデルが，Rongbanaphan 他（2012）[14]により開発されている。この論文では，クリギングとベーズ定理やカルマンフィルターの関係が詳細に説明されている。いずれにせよ，自己相関距離は，平均や分散に加えて，確率場の応用では極めて重要であることが理解される。

## 参考文献


1) アサナシオス・パポーリス：確率とランダム変数 1～3, 東海大学出版会．1990.
2) 日野幹雄：スペクトル解析（新装版），朝倉書店，2010.
3) Vanmarcke, E. H.: Random Field, The MIT Press, 1982.
4) 西村伸一・渡部要一：地盤データのばらつきと特性値・設計値の決定，「講座：地盤構造物の設計コードと信頼性設計法」，地盤工学会誌，Vol. 58, No. 11, pp. 54～61, 2010.
5) CEN: EN1997～1: Eurocode7, Geotechnical design Part1: General rules, European Committee for Standardization: Brussels. 2004.
6) Fenton, G. A. and Griffiths, D. V.: *Risk Assessment in Geotechnical Engineering*, John Wiley and Sons INc., 2008.
7) Fenton, G. A. and Vanmarcke. E. H.: Simulation of random fields via local average subdivision, *ASCE J. Eng. Mech.*, 116 (8), pp. 1733～1749, 1992.
8) 本城勇介・大竹　雄・加藤栄和：地盤パラメータ局所平均の空間的ばらつきと統計的推定誤差の簡易評価理論，土木学会論文集 C（地圏工学），Vol. 68, No. 1, pp. 41～55, 2012.
9) 大竹　雄・本城勇介：地盤パラメータ局所平均を用いた空間的ばらつきの簡易信頼性評価法の検証，土木学会論文集 C（地圏工学），Vol. 68, No. 3, pp. 475～490, 2012.
10) Vanmarcke, E. H.: Probabilistic modeling of soil profiles, *J. of Geotechnical Engineering* (*ASCE*), Vol. 103, No. GT11, pp. 1227～1246, 1977.
11) 上田貴夫・本城勇介・波多野敬・坂口修司：造成工事における残留沈下量の平面的予測及び誤差，土と基礎，Vol. 34, No. 5, pp. 51～58, 1986.
12) 本城勇介・坂口修司・森嶋　章：造成工事における残留不同沈下量の平面的予測，地盤工学におけるリスク評価法に関するシンポジウム論文集，土質工学会，pp. 21～28, 1987.
13) 本城勇介・藤田麻乃：戸建住宅の性能設計に関する統計的手法を用いた不同沈下量の推定，宅地地盤の安全性と性能評価に関するシンポジウム発表論文集（地盤工学会），pp. 71～76, 2005.
14) Rungbanaphan, P, Y. Honjo and I. Yoshida: Spatial-temporal prediction of secondary compression using random field theory, *Soils and Foundations*, Vol. 52, No. 1, pp. 99～113, 2012.