

地盤工学技術者のための確率統計入門

7. 限界状態設計法

森 保 宏 (もり やすひろ)

名古屋大学 教授

7.1 はじめに

構造物に将来作用する荷重の大きさや構造・材料特性などは不確定である。このような不確かさに対して、許容応力度設計法などのこれまでの設計法では、材料安全率など経験的あるいは工学的判断に基づく安全率を用いて対応してきた。しかし、性能水準を定量的に明示することは難しく、また、データの蓄積や品質管理による不確かさの減少を合理的に設計に取り込むことも困難である。経験のない新材料を採用する際には新たな安全率を設定することとなるが、設計体系全体の統一性に欠ける。

一方、限界状態設計法では、不確かさを確率・統計論によって合理的かつ定量的に取り扱っており、不確かさの変化を取り込むことができるだけでなく、統計的性質の異なる地盤構造物や上部構造物、さらには新材料を用いた構造物を統一的な理念の下で設計することが可能となる。また、構造物がその供用期間中に好ましい状態から限界状態を超過して好ましくない状態となる確率（限界状態超過確率）という定量的な尺度で構造性能水準を明示し制御することができることから、性能設計を実現していくための有力な方法の一つでもある。

限界状態超過確率を評価する方法として、今回は、最も直感的に理解しやすく極めて汎用性の高いモンテカルロ法について述べたが、特に大規模で高い信頼性を必要とする構造物の限界状態超過確率の評価には、一般に多大な計算時間が必要となる。また、現在我が国のほとんどの土木・建築構造物が許容応力度設計により設計されていることを考えると、より簡便な設計条件式が望まれる。そこで、従来の許容応力度設計法と同様の形式で、構造物に作用する荷重効果（以下、単に荷重という）の基本値及び耐力の公称値に、荷重・耐力の不確実性及び目標性能水準に直接結びついた安全率である荷重・耐力係数を乗ずる荷重耐力係数設計法が提案されている^{1)~4)}。

本章では、まず、限界状態と荷重耐力係数設計法について概説した後、限界状態超過確率の理論的評価方法及び荷重耐力係数の算定方法について述べる。最後に、目標性能水準の設定の考え方について概説する。

7.2 限界状態超過確率と荷重・耐力係数設計式

7.2.1 限界状態と限界状態超過確率

構造物や構造部材（以下、単に構造物という）の状態は、一般に「好ましい状態」、「好ましくない状態」及び

これらの境界に位置する状態（「限界状態」）に分けることが出来る。

構造物の状態は、次式で定義される限界状態関数 $G(X)$ によって表すことが出来る。

$$G(X) \begin{cases} >0 & \text{好ましい状態} \\ =0 & \text{限界状態} \\ <0 & \text{好ましくない状態} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7.1)$$

ここに、 X は、構造特性や耐力、荷重などを表す基本確率変数ベクトルである。

限界状態関数を用いることにより、限界状態超過確率 P_f は次式で表される。

$$P_f = P[G(X) < 0] \quad \dots\dots\dots (7.2)$$

ここに、 $P[A]$ は事象 A が生起する確率である。

P_f は信頼性指標 β と次式で関係づけられる。

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad \dots\dots\dots (7.3)$$

ここに、 $\Phi^{-1}(\bullet)$ は標準正規確率分布関数 $\Phi(\bullet)$ の逆関数である。図-7.1は(7.3)式の関係を図に示したものである。構造物が好ましくない状態に陥る確率は、一般に $10^{-1} \sim 10^{-4}$ といった小さな値でありイメージがしづらいが、対応する信頼性指標は 1~4 程度となり、工学的に身近な尺度となっている。

7.2.2 耐力の不確かさと限界状態超過確率

自然材料である地盤の材料特性は、工業製品である鋼材やコンクリートが規格化されているのに対し、サイトごとに大きく異なるため基本的にサイトごとに調査し決定しなければならない。さらに、前者のばらつきは後者よりもはるかに大きく、例えば鋼材の引張り強度やコンクリートの圧縮強度の変動係数は 0.1~0.2 程度であるのに対し、例えば場所打ち杭の先端支持力や砂質土の周面摩擦力の変動係数はそれぞれ 0.3, 0.8 程度である³⁾。

地盤特性は空間的に大きくばらつくが、地盤構造物の

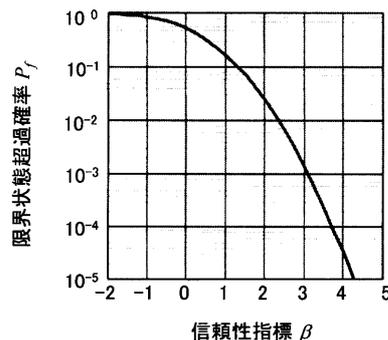


図-7.1 信頼性指標と限界状態超過確率の関係

設計の際に重要な値は、ある程度の面積や体積についての平均的な値である⁵⁾。サイトの中のある地点の地質調査を行った場合、その地点の地盤特性は測定誤差を除いて既知となるため、このような調査を多くするほど、その平均的な値の推定誤差（変動係数）は減少する。

図-7.2(a)は、耐力の向上、及びデータの蓄積によるばらつきの減少と限界状態超過確率 P_f の関係の簡単な例を示したものである。ここでは、同図(b)に示すように単純引張り力を受ける部材モデルを考え、部材の耐力 R 、荷重 S はそれぞれ対数正規分布、グンベル分布にしたがい、荷重の変動係数を0.4とする。実線は、耐力の変動係数が0.6の場合であり、限界状態超過確率が0.001となる場合（図中の●）を基本に、耐力の平均値を基本から1.2倍すると P_f は約40%に（図中の△）、1.4倍すると約1/8となる（図中の◇）。データの蓄積等によって耐力の変動係数を0.6から0.5に減じることができた場合（点線）、以前と同程度の P_f が許容されるのならば、耐力の平均値を0.8倍弱まで下げることができる（図中の○）。なお、変動係数が小さいほど、耐力の平均値の向上による P_f の低減の割合が大きいことにも注目された。

このように、限界状態超過確率は、投資額と投資効果の関係（平均値を割り増す費用と限界状態超過確率の低減や、追加調査の費用と同等の性能を確保しながら部材断面を小さくすることによる建設コストの低減など）と併せて、様々な選択肢のうちどれが良いかを判断する際の重要な情報となる。

7.2.3 設計条件式と荷重耐力係数設計式

許容限界状態超過確率を P_{f_s} とした時、限界状態設計法における設計条件は次式で表される。

$$P_f \leq P_{f_s} \dots\dots\dots (7.4)$$

限界状態超過確率の代わりに信頼性指標を用いれば設計条件は次式で表される。

$$\beta \geq \beta_T \dots\dots\dots (7.5)$$

ここに、 β_T は目標信頼性指標である。

限界状態設計法を実設計に適用する際には、モンテカ

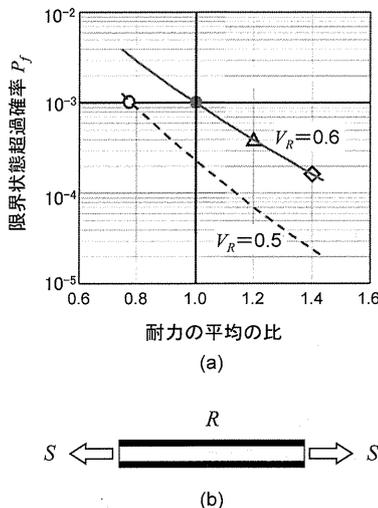


図-7.2 耐力の不確かさと限界状態超過確率

ルロ法等の信頼性解析手法を用いて限界状態超過確率あるいは信頼性指標を直接評価する方法もあるが、煩雑である。一方、(7.6)式のように、従来の許容応力度設計法と同様の形式で表すことができれば、従来の設計法からの移行も比較的容易である。このような設計条件式を荷重耐力係数設計式という。

$$\phi_1 R n_1 + \dots + \phi_n R n_n \geq \gamma_1 S n_1 + \dots + \gamma_n S n_n \dots\dots\dots (7.6)$$

(7.6)式は、固定荷重、積載荷重、雪荷重、地震荷重といった n_s 種類の荷重を同時に受ける構造物あるいは構造部材の設計を念頭に置いたものであり、その耐力は、杭の先端支持力と周面摩擦力等のように n_r 個の耐力の和として表されることを想定している。

(7.6)式中の、 $R n_i, S n_j$ は、それぞれ耐力 R_i 、荷重 S_j の公称値、 ϕ_i, γ_j はそれぞれ、耐力の公称値に乗ずる安全率である耐力係数、荷重の公称値に乗ずる安全率である荷重係数である。後述するように、 ϕ_i, γ_j には目標信頼性指標のほか、各耐力や荷重の不確かさの程度が反映される。

7.3 信頼性理論の基礎

本節では、限界状態超過確率の理論的評価方法の基礎について、以下に示す基本問題を用いて概説する。

基本的な問題として、先述の、全体の耐力が n_r 個の個別の耐力の和として表され、 n_s 種類の荷重を同時に受ける構造物あるいは構造部材を考える（図-7.2に示した例題は、 $n_r = n_s = 1$ の場合である）。このとき、基本確率変数を、 n_r 個の耐力 R_1, \dots, R_{n_r} 及び n_s 個の荷重 S_1, \dots, S_{n_s} ($R_1, \dots, R_{n_r}, S_1, \dots, S_{n_s}$ は互いに独立とする) とすると、限界状態関数は次式の線形関数で定義される。

$$G(R_1, \dots, R_{n_r}, S_1, \dots, S_{n_s}) = \sum_{i=1}^{n_r} R_i - \sum_{j=1}^{n_s} S_j \dots\dots\dots (7.7)$$

7.3.1 基本確率変数がすべて正規変数の場合

次式で定義される安全余裕 M を考える。

$$M = G(R_1, \dots, R_{n_r}, S_1, \dots, S_{n_s})$$

$$= \sum_{i=1}^{n_r} R_i - \sum_{j=1}^{n_s} S_j \dots\dots\dots (7.8)$$

R_i, S_j がすべて正規確率変数ならば、(7.8)式で定義される安全余裕 M も正規確率変数となり、(7.2)式と(7.8)式より、限界状態超過確率は次式で評価することができる。

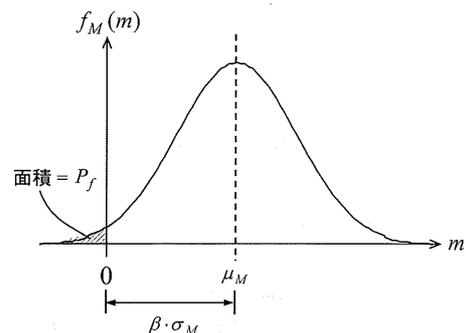


図-7.3 安全余裕 M の確率密度関数

初級講座

$$P_f = P[M < 0] = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta) \dots\dots\dots(7.9)$$

ここに、 μ_M , σ_M は、それぞれ M の平均値及び標準偏差であり次式で表される。

$$\mu_M = \sum_{i=1}^{n_r} \mu_{R_i} - \sum_{j=1}^{n_s} \mu_{S_j} \dots\dots\dots(7.10)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_r} \sigma_{R_i}^2 + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{S_j}^2} \dots\dots\dots(7.11)$$

また、 β は信頼性指標で、次式で表される。

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \dots\dots\dots(7.12)$$

なお、(7.12)式の関係は、基本確率変数がすべて正規確率変数の場合のみ成立する。

図-7.3は安全余裕 M の確率密度関数 $f_M(m)$ を示したものであるが、 P_f は $f_M(m)$ が負となる部分の面積に等しく、また、 M の平均値 μ_M は、原点すなわち限界状態から M の標準偏差 σ_M の β 倍のところに位置している ((7.12)式参照)。

7.3.2 基本確率変数が二つ、かつ対数正規変数の場合

耐力・荷重がともに対数正規確率変数で、耐力・荷重を表す基本確率変数がともに一つの場合 ($n_r = n_s = 1$) には、限界状態超過確率は、基本確率変数がすべて正規確率変数の場合と同様に評価することができる。 X が対数正規確率変数の場合、 $\ln X$ は正規確率変数となるので次式で定義される新たな安全余裕 M^* を考える。

$$M^* = \ln R - \ln S \dots\dots\dots(7.13)$$

このとき、安全余裕 M^* は次式で表される平均値 μ_{M^*} 及び標準偏差 σ_{M^*} を有する正規確率変数となる ((7.10), (7.11)式参照)。

$$\mu_{M^*} = \mu_{\ln R} - \mu_{\ln S} \dots\dots\dots(7.14)$$

$$\sigma_{M^*} = \sqrt{\sigma_{\ln R}^2 + \sigma_{\ln S}^2} \dots\dots\dots(7.15)$$

ここに、 $\mu_{\ln X}$, $\sigma_{\ln X}$ は、それぞれ対数正規確率変数 X の対数平均値 ($\ln X$ の平均値) 及び対数標準偏差 ($\ln X$ の標準偏差) であり、 X の平均値 μ_X 及び変動係数 V_X と次式の関係がある。

$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln(V_X^2 + 1)} \dots\dots\dots(7.16)$$

$$\mu_{\ln X} = \ln\left(\frac{\mu_X}{\sqrt{V_X^2 + 1}}\right) \dots\dots\dots(7.17)$$

(7.8)式で定義した安全余裕と同様に $M^* < 0$ は限界状態を超過した状態を示しており、したがって限界状態超過確率及び信頼性指標は、それぞれ(7.9)式、(7.12)式において M を M^* と置き換えて評価することができる。

7.4 2次モーメント法の拡張

確率変数の平均値は確率密度関数の原点周りの1次モーメント、標準偏差は平均値周りの2次モーメントの平方根であり、(7.12)式のように、これら2次までのモーメントを使って信頼性指標を評価する方法を2次モーメント法という。本節では、これを拡張し、基本確率変数が任意分布に従い、限界状態関数も線形ではない場合の取り扱い方法について解説する。

7.4.1 信頼性指標の幾何学的意味

ここではまず、すべての確率変数が正規確率変数かつ互いに無相関で限界状態関数が線形の場合を用いて信頼性指標の幾何学的意味を考える。

図-7.4は、2変数 ((7.7)式において $n_r = n_s = 1$) の場合について、限界状態 ($G(R, S) = R - S = 0$)、及び R と S の結合確率密度関数 $f_{R,S}(r, s)$ の等高線を示したものである。限界状態超過確率は限界状態を超過する領域 ($R - S < 0$) における結合確率密度関数 $f_{R,S}(r, s)$ の体積に等しい。

ここで、次式で表される標準正規変換によって正規確率変数 $R_1, \dots, R_{n_r}, S_1, \dots, S_{n_s}$ を、それぞれ平均値0、標準偏差1の標準正規確率変数 $U_{R_1}, \dots, U_{R_{n_r}}, U_{S_1}, \dots, U_{S_{n_s}}$ に変換することにより、標準正規空間にて基本問題を考える。

$$U_{R_i} = (R_i - \mu_{R_i}) / \sigma_{R_i} \dots\dots\dots(7.18)$$

$$U_{S_j} = (S_j - \mu_{S_j}) / \sigma_{S_j} \dots\dots\dots(7.19)$$

(7.18), (7.19)式の変換により、もとの空間における限界状態関数 $G(\vec{X})$ は、標準正規空間では次式で表される限界状態関数 $g(\vec{U})$ となる (図-7.5参照)。

$$g(\vec{U}) = \sum_{i=1}^{n_r} \sigma_{R_i} U_{R_i} - \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{S_j} U_{S_j} + \left(\sum_{i=1}^{n_r} \mu_{R_i} - \sum_{j=1}^{n_s} \mu_{S_j} \right) \dots\dots\dots(7.20)$$

$R_1, \dots, R_{n_r}, S_1, \dots, S_{n_s}$ は互いに統計的に独立なので、 $U_{R_1}, \dots, U_{R_{n_r}}, U_{S_1}, \dots, U_{S_{n_s}}$ も互いに統計的に独立である。図-7.5は、 $n_r = n_s = 1$ の場合について二つの独立な標準正規確率変数 U_R, U_S の結合確率密度関数 $\phi_2(u_R, u_S)$ の

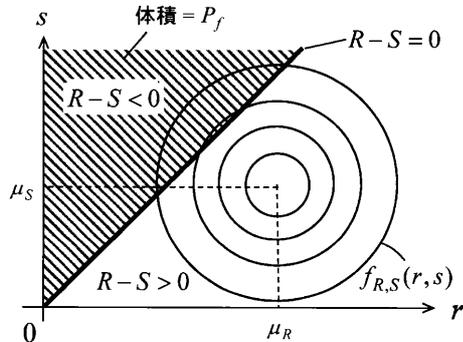


図-7.4 基本空間における限界状態関数と結合確率密度関数

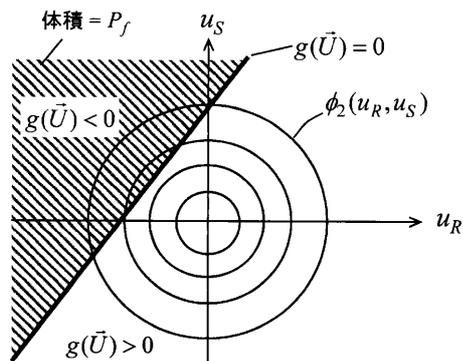


図-7.5 標準正規空間における限界状態関数と結合確率密度関数

等高線を示したものであるが、結合確率密度関数は原点を中心とする同心円で表され、限界状態超過確率は限界状態を超過する領域 ($g(\vec{U}) < 0$) における結合確率密度関数 $\phi_2(u_R, u_S)$ の体積 (基本確率変数 R_i, S_j の数がそれぞれ 1, n_s の場合には $(n_s + 1)$ 次元の結合確率密度関数 $\phi_{n_s+1}(u_R, \vec{u}_S)$ の超体積) に等しい。

この体積を求める前に、まず $P[U_R < u]$ を評価することを考える。2次元の場合、 $\phi_2(u_R, u_S)$ の $(u_R < u)$ となる領域の体積を求めることとなるが (図-7.6参照)、次式のように1次元の標準正規確率密度関数 $\phi(u)$ の面積を求める問題に単純化できる。

$$P[U_R < u] = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(u_R, u_S) du_S du_R = \int_{-\infty}^u \phi(u_R) du_R = \Phi(u) \quad (7.21)$$

このようにして得られた U_R の確率密度関数 ($\phi(u)$) を周辺確率密度関数と呼ぶ。

基本確率変数 S_j の数が n_s の場合にも、 $(n_s + 1)$ 次元の結合確率密度関数 $\phi_{n_s+1}(u_R, \vec{u}_S)$ をすべての u_{S_j} について積分することにより、(7.21)式と同様に単純化できる。

$$P[U_R < u] = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n_s+1}(u_R, \vec{u}_S) d\vec{u}_S du_R = \int_{-\infty}^u \phi(u_R) du_R = \Phi(u) \quad (7.22)$$

ここで、図-7.7に示すような、標準正規空間における限界状態面 $g(\vec{U}) = 0$ の法線ベクトル $\vec{\alpha}^*$ と平行で、原点を通る直線を一つの軸 ($u_0, \vec{\alpha}^*$ の方向を正) とし、この軸と直交し原点を通る直線をもう一つの軸 (u_1) とする座標系とこれらに対応する互いに独立な標準正規確率変数 U_0, U_1 を考える。 U_0, U_1 の結合確率密度関数は U_R, U_S の結合確率密度関数と同一の形状 (原点を中心として等方的) をしており、したがって、原点と $g(\vec{U})$

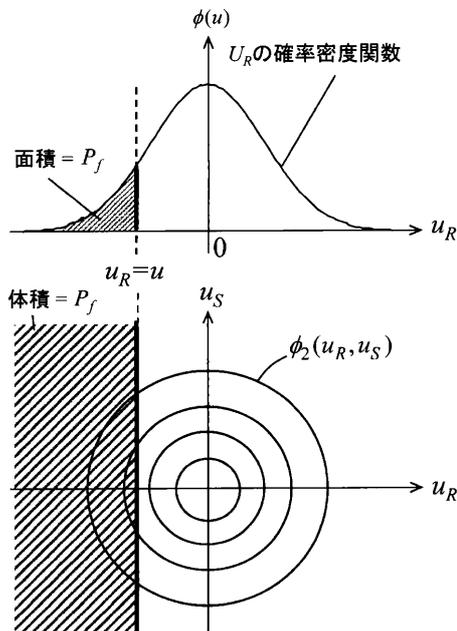


図-7.6 周辺確率密度関数

= 0 との距離を d とすると、(7.21)式より限界状態超過確率は次式で評価される。

$$P_f = P[U_0 < -d] = \Phi(-d) \quad (7.23)$$

(7.9)式と(7.23)を比較すると、信頼性指標 β は、標準正規空間における原点と限界状態面との距離であることが分かる。図-7.3において、 M の平均値 μ_M と限界状態との距離は M の標準偏差 σ_M の β 倍であることを示したが、標準正規空間では原点が平均値で標準偏差が 1 であることから、原点と限界状態面との距離が β となることは理解できよう。

7.4.2 限界状態関数が非線形の場合

限界状態関数が非線形の場合には、標準正規空間における限界状態面上の原点からの最差点 \vec{u}^* で線形化し、原点からの距離を求めることにより、信頼性指標を近似的に評価することができる (図-7.8参照)。この原点からの最差点を「設計点」あるいは「照査点」という。設計点は未知ではあるが、以下のように求めることができる。

設計点 $\vec{u}^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*, \dots, u_n^*\}$ は限界状態面上の原点からの最差点であり、その距離は β であることから次式により表される。

$$\vec{u}^* = -\vec{\alpha}^* \cdot \beta \quad (7.24)$$

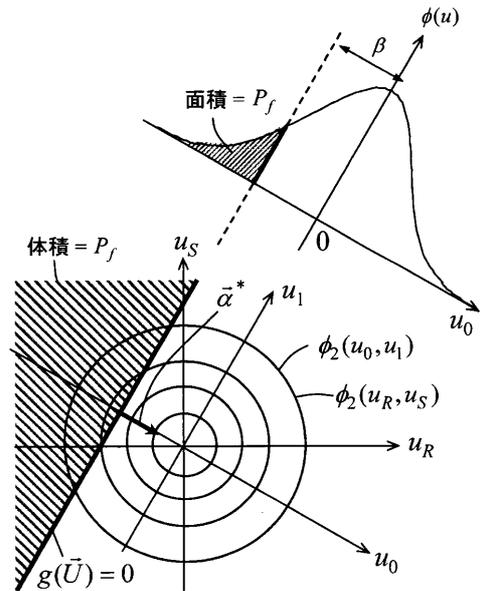


図-7.7 標準正規空間における信頼性指標

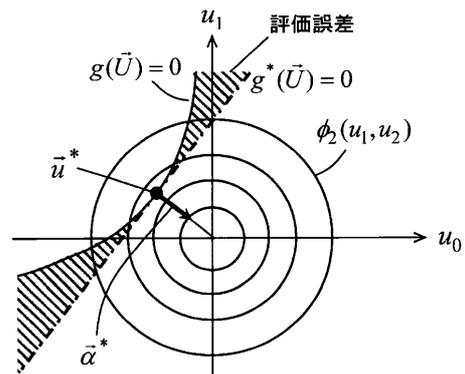


図-7.8 限界状態関数が非線形の場合

初級講座

ここに $\bar{\alpha}^*$ は、限界状態関数の設計点における大きさ1の法線ベクトルであり、各要素 α_k^* ($k=1, \dots, n$) は次式で評価される。

$$\alpha_k^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial u_k}\right) \Big|_{\bar{u}=\bar{u}^*}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right) \Big|_{\bar{u}=\bar{u}^*} \right\}^2}} \quad (k=1, \dots, n) \quad (7.25)$$

(7.25)式中の分母は、ベクトルの大きさを1とするための基準化係数である。ところで、設計点 \bar{u}^* は限界状態面 $g(\bar{U})=0$ 上の点であるから、

$$g(\bar{u}^*)=0 \quad (7.26)$$

(7.24), (7.25), (7.26)式には、全部で $(2n+1)$ 個の未知数がある一方、同じ数の式があり、 $(2n+1)$ 元の非線形連立方程式として解くことで、設計点 \bar{u}^* 、法線ベクトル $\bar{\alpha}^*$ 及び信頼性指標 β を同時に得ることができる。

非線形な限界状態関数を設計点で線形化していることから、この手法は当然ながら誤差を伴う。図-7.8の灰色の領域での $\phi_2(u_0, u_1)$ の体積がこれに相当するが、この誤差の大きさは設計点の近傍における非線形性の程度に依存する。また、安全側あるいは危険側の評価になるかは、曲率の方向に依存し、図-7.8では安全側の評価となっている。

7.4.3 基本確率変数が非正規確率変数の場合

基本確率変数 X_k ($k=1, \dots, n$) が正規確率変数でない場合には、次式により標準正規確率変数 U_k に変換する。

$$U_k = \Phi^{-1}(F_{X_k}(X_k)) \quad (7.27)$$

(7.27)式の逆変換は次式で表される。

$$X_k = F_{X_k}^{-1}(\Phi(U_k)) \quad (7.28)$$

ここに、 $F_{X_k}^{-1}(x)$ は X_k の確率分布関数 $F_{X_k}(x)$ の逆関数である。

(7.28)式を(7.7)式の左辺に代入することにより、標準正規空間における限界状態関数は次式で表される。

$$g(u_1, \dots, u_n) = G(F_{X_1}^{-1}(\Phi(u_1)), \dots, F_{X_n}^{-1}(\Phi(u_n))) \quad (7.29)$$

(7.27)式は非線形変換であり、もともとの限界状態関数が線形であっても、標準正規空間では(7.29)式は非線形となるが、7.4.2節で既に述べたとおり、設計点にて限界状態関数を線形化することにより、信頼性指標は近似的に評価できる。

7.4.4 基本確率変数の間に相関がある場合

これまで、基本確率変数は互いに統計的に独立であると仮定してきたが、互いに相関がある場合もありうる。このような場合には、無相関な標準正規確率変数へ変換することによりこれまで述べた方法を適用して、信頼性指標を評価することができる。なお、互いに無相関な正規確率変数は互いに独立である。

基本確率変数ベクトル \bar{X} が、正規確率変数ベクトルの場合には、次式により、独立な標準正規確率変数ベクトル \bar{U} に変換することが出来る。

$$\bar{U} = \mathbf{L}^{-1}(\bar{X} - \bar{\mu}_X) \quad (7.30)$$

ここに、 $\bar{\mu}_X$ は、 \bar{X} の平均値ベクトル、 \mathbf{L}^{-1} は、 \bar{X} の共

分散行列 \mathbf{C}_X を次式のようにコレスキー分解して得られた下三角行列 \mathbf{L} の逆行列である。

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (7.31)$$

(7.30)式は線形変換なので、 \bar{X} が正規確率変数ベクトルならば、 \bar{U} も正規確率変数ベクトルとなる。また、 \bar{U} の平均値ベクトル $\bar{\mu}_U$ はゼロベクトルとなり、また、共分散行列 $\mathbf{C}_U = E[(\bar{U} - \bar{\mu}_U)^T \cdot (\bar{U} - \bar{\mu}_U)]$ が単位行列となることは比較的簡単に示すことができる。なお、ここに、 $E[X]$ は X の期待値を表す。

基本確率変数 X_k が非正規確率変数の場合には、(7.27)式によって相関のある標準正規確率変数 Z_k に変換してから、(7.30)式により独立な標準正規確率変数 U_k へ変換する。なお、 Z_k は標準正規確率変数であるから、(7.31)式に用いる \bar{Z} の共分散行列は \bar{Z} の相関係数行列となるが、これは基本確率変数ベクトル \bar{X} の相関係数行列とは異なる値となるので注意が必要である。文献7)には、様々な分布にしたがう1組の確率変数を1組の正規確率変数へ変換する際の、変換前後の相関係数の関係が示されている。

7.5 耐力係数、荷重係数の算定法

ここでは、(7.6)式中の耐力係数及び荷重係数の算定法について述べる。なお、(7.6)式は、耐力係数 $\tilde{\phi}_i$ 、荷重係数 $\tilde{\gamma}_j$ をそれぞれ耐力・荷重の公称値に乗ずる形式となっているが、以下ではそれぞれの平均値に乗ずる耐力係数 ϕ_i 、荷重係数 γ_j を示す。なお、 $\tilde{\phi}_i$ と ϕ_i 及び $\tilde{\gamma}_j$ と γ_j との関係は次式のとおりである。

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i \cdot \frac{\mu_{R_i}}{R_{N_i}}, \quad \tilde{\gamma}_j = \gamma_j \cdot \frac{\mu_{S_j}}{S_{N_j}} \quad (7.32)$$

7.5.1 基本変数がすべて正規変数の場合

基本確率変数がすべて正規確率変数の場合、(7.5)式及び(7.12)式より設計条件式は次式となる。

$$\mu_M \geq \sigma_M \beta_T \quad (7.33)$$

(7.33)式中の σ_M は(7.11)式で与えられるが、これを(7.34)式のように変形する

$$\begin{aligned} \sigma_M &= \frac{\sigma_{R_1}^2 + \dots + \sigma_{R_n}^2 + \sigma_{S_1}^2 + \dots + \sigma_{S_m}^2}{\sigma_M} \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \alpha_{R_i} \cdot \sigma_{R_i} + \sum_{j=1}^m \alpha_{S_j} \cdot \sigma_{S_j} \quad (7.34) \end{aligned}$$

ここに、

$$\alpha_{R_i} = \frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_M}, \quad \alpha_{S_j} = \frac{\sigma_{S_j}}{\sigma_M} \quad (7.35)$$

である。 α_X は分離係数と呼ばれ、設計点における限界状態関数の法線ベクトル $\bar{\alpha}^*$ の各要素の絶対値に等しい。(7.10)式、(7.34)式を(7.33)式に代入すると、設計条件式は次式となる。

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \mu_{R_i} - \sum_{j=1}^m \mu_{S_j} \\ &\geq \beta_T \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_{R_i} \cdot \sigma_{R_i} + \sum_{j=1}^m \alpha_{S_j} \cdot \sigma_{S_j} \right\} \quad (7.36) \end{aligned}$$

(7.36)式において耐力及び各荷重の項をまとめると、次式の荷重耐力係数形式の設計条件式となる。

$$\sum_{i=1}^{n_R} (1 - \alpha_{R_i} \beta_T V_{R_i}) \mu_{R_i} \geq \sum_{j=1}^{n_S} (1 + \alpha_{S_j} \beta_T V_{S_j}) \mu_{S_j} \quad \dots\dots (7.37)$$

したがって、 ϕ_i 及び γ_j は、次式で表される。

$$\phi_i = (1 - \alpha_{R_i} \beta_T V_{R_i}) \quad \dots\dots (7.38)$$

$$\gamma_j = (1 + \alpha_{S_j} \beta_T V_{S_j}) \quad \dots\dots (7.39)$$

(7.38), (7.39)式から明らかなように、例えば、目標信頼性指標が高い場合や、ばらつき (変動係数 V_X) が大きな場合には、耐力係数 ϕ_i は小さな値 (荷重係数 γ_j はより大きな値)、すなわち、より大きな安全率となる。個々の基本確率変数のばらつきの大きさが個別に反映できることから、調査・研究等によりある荷重の不確実性が減じられたり、品質管理により耐力の不確実性が減じられるなど、個々の努力を別々に安全率に反映させることが出来る。

7.5.2 基本確率変数が非正規変数の場合

(7.26)式に(7.24)式を代入すると、限界状態関数を用いた設計条件式が得られる。

$$g(-\bar{\alpha} \beta_T) \geq 0 \quad \dots\dots (7.40)$$

(7.27)式の標準正規変換を用いて(7.7)式を標準正規空間における限界状態関数に変換し、これを(7.40)式に代入することにより、次式の設計条件式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n_R} F_{R_i}^{-1}(\Phi(-\alpha_{R_i} \beta_T)) - \sum_{j=1}^{n_S} F_{S_j}^{-1}(\Phi(\alpha_{S_j} \beta_T)) \geq 0 \quad \dots\dots (7.41)$$

ここに、

$$\alpha_{R_i} = \alpha_{R_i}^*, \quad \alpha_{S_j} = -\alpha_{S_j}^* \quad \dots\dots (7.42)$$

(7.41)式を荷重耐力係数設計式の形式となるよう整理すると、次式で表される荷重係数、耐力係数が得られる。

$$\phi_i = \frac{F_{R_i}^{-1}(\Phi(-\alpha_{R_i} \beta_T))}{\mu_{R_i}} \quad \dots\dots (7.43)$$

$$\gamma_j = \frac{F_{S_j}^{-1}(\Phi(\alpha_{S_j} \beta_T))}{\mu_{S_j}} \quad \dots\dots (7.44)$$

7.5.3 基本確率変数が対数正規変数の場合

基本確率変数が対数正規変数の場合には、確率分布関数は、標準正規確率分布関数 $\Phi(\bullet)$ を用いて次式で表される。

$$F_X(x) = \Phi \left(\frac{\ln x - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}} \right) \quad \dots\dots (7.45)$$

したがって、(7.43)式または(7.44)式、及び(7.17)式から、荷重係数、耐力係数は次式で表される。

$$\phi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + V_{R_i}^2}} \cdot \exp(-\alpha_{R_i} \beta_T \cdot \sigma_{\ln R_i}) \quad \dots\dots (7.46)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\sqrt{1 + V_{S_j}^2}} \cdot \exp(\alpha_{S_j} \beta_T \cdot \sigma_{\ln S_j}) \quad \dots\dots (7.47)$$

このように、基本確率変数が非正規変数の場合にも荷重係数、耐力係数を解析的に表すことはできるものの、分離係数ベクトル $\bar{\alpha}$ の解析的表現ができない。前節で示した解析方法により $\bar{\alpha}$ を求めることは可能であるが、実設計では煩雑である。そこで、文献3)や文献6)では、いくつかの目標信頼性指標を想定した荷重係数、耐力係数の表を用意しているほか、(7.46)式、(7.47)式を用いた略算法⁸⁾も示されている。

7.6 目標信頼性の考え方

未来は不確定であるため、構造物がその供用期間中に様々な外乱によって損傷を受けたり、倒壊してしまう可能性をゼロにすることはできない。構造設計は、このような不確実性の下で構造物の全体あるいはその部分に付与すべき性能水準 (目標性能水準) を定める意思決定といえる。目標性能水準は、安全に対する社会的認識、限界状態を超過する可能性と超過した場合の社会的影響、構造物の重要度、用途、荷重種別、構造種別、経済性、性能向上に要する費用や時間・労力を考慮して定められる。

以下に、その具体的な方法について、いくつか述べる。その他、文献6)には、各国の諸基準における荷重係数あるいは目標信頼性指標が参考資料として示されている。

7.6.1 コード・キャリブレーション

設計基準を大きく変更する時、新しい基準で用いる数値を従前の基準を用いた場合に達成される値に定めることをコード・キャリブレーションといい、欧米では設計法の連続性と実務設計での急激な変化が受け入れられにくいことを反映してよく用いられている⁶⁾。

目標信頼性指標の目安として、現行基準にしたがって設計された部材の信頼性指標を評価し、これを参考とする方法がある。キャリブレーションの具体的な方法については、文献11)等に詳しく述べられている。

7.6.2 総期待費用最小化の原理

構造物性能水準を高めることによって、構造物が限界状態を超過する可能性を減ずることは可能であるが、ただし、そのためにはそれ相応の費用が必要となる。すなわち被害低減と費用との間には、いわばトレードオフの関係があり、構造物の供用期間中に生じるであろう費用の総額の期待値 (総期待費用、ライフサイクルコスト (LCC)) を最小とする構造物性能水準を、目標性能水準とするという考え方が提案されている。このような考え方を総期待費用最小化の原理という⁹⁾。

図-7.9は、総期待費用最小化の原理の概念図を示したものである。構造物の初期性能水準を高くすると初期建設費用 C_i は高くなるが、外乱によって限界状態を超過する可能性は減少し、したがって、この確率に限界状態を超過した場合の修理費や建替えの費用 C_F を乗じた期待損失費用 ($C_F \times P_f$) も減少する (破線)。一方、初期性能水準を低くすると初期建設費用は低く抑えること

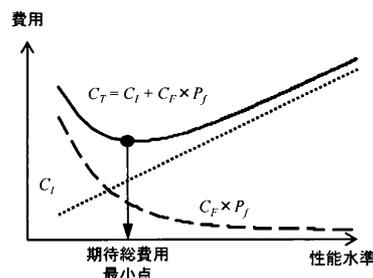


図-7.9 総期待費用最小化の原理の概念図

初級講座

ができるが、限界状態超過確率が高くなり、結果として期待損失費用が高くなる。最も単純なモデルでは、総期待費用 C_T はこの初期建設費用と期待損失費用の和として次式で表され、これが最小となる点が、最適な性能水準であるとするものである。

$$C_T = C_1 + C_r P_f \dots \dots \dots (7.48)$$

近年では、総期待費用に、定期的な点検・補修の費用や、限界状態超過による社会への波及費用などを加えることもある。また、費用を最小化するというネガティブな観点でなく、建てられる建物からどれだけの効用（収益）が得られるかといった、総期待収益最大化といったポジティブな面を強調した考えもある。一方、環境問題に対応するために、費用だけでなく、CO₂の排出量にも着目し、建物の建て替え時の廃棄に必要なCO₂も含めた、総期待CO₂（ライフサイクルCO₂, LCCO₂）も重要な判断基準となっている。その他、総期待エネルギー使用量、総期待最終廃棄物排出量なども考えられる。

7.6.3 リスクに基づく方法

近年、金融リスク、災害リスクあるいはリスクマネジメントなど、様々な場面で「リスク」という言葉が使われる。リスクマネジメントとは、端的に言えば、限られた資源を有効に活用しリスクを適切に制御しながら上手く付き合うことであり、構造設計も一つのリスクマネジメントといえる。

リスクの定義は、様々な学問分野で少しずつ異なっているが、いずれにせよ、ある行動に伴う「望ましくないことが起こる可能性」と「結果（被害の大きさ）」の二つの軸で考える点は共通している。その表現方法には、リスク曲線、期待値、PMLといったものがあり、目的に応じて使い分けている。

リスク曲線は、図-7.10にその概念図を示すとおり、基準期間中に損失がある大きさ（横軸の値）を超える確率（超過確率）を示すもので、損失の確率分布関数の補関数に相当する。リスク曲線からは、どの程度の被害がどの程度の可能性で生じるかといった、リスクの全体像を読み取ることが出来る。曲線が全体的に右上の方向へ移動するほどリスクは大きくなるが、図-7.10の実線と破線のようなリスク曲線の場合、どちらがより望ましくないかの判断は必ずしも容易ではなく、何らかの指標を用いた方が比較しやすい場合もある。

リスクの指標の代表的なものにリスクの期待値がある。期待値は、発生し得るすべての損失に各々の損失の発生確率を乗じて総和をとったもので、「平均的」に予想される損失の大きさであり、前節で述べた総期待費用は単一の事象を対象としたリスクの期待値である。リスク曲線を積分すると、すなわち、リスク曲線と両方の軸で囲まれる面積を求めると、これが損失の期待値となる。このリスクの期待値は理解しやすいものであるが、図-7.10の実線と点線で示す二つのリスク曲線のように、リスクの全体像は異なる場合でも同じ値となることがあり、万能ではない。また、期待値とは、多くのサンプルがある場合にその近傍に落ち着くことが期待される値であり、

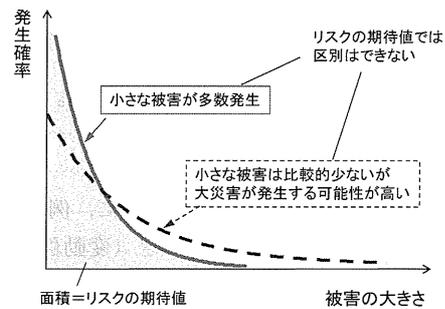


図-7.10 リスク曲線と期待値の概念図

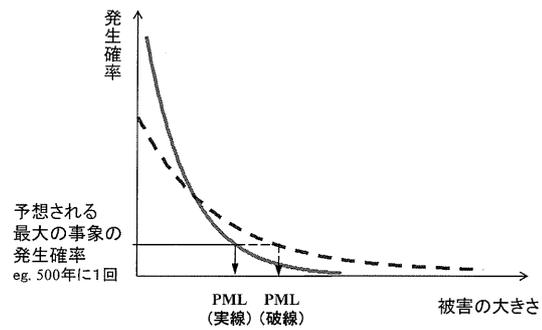


図-7.11 PMLの概念図

ある1棟の建造物の所有者にとっての災害のように供用期間中に1度起こるか起こらないかといった事象が起こったときに被害の大きさを表すものではない。

PMLとは Probable Maximum Loss（予想最大損失）の頭文字をとったもので、我が国では主に地震被害を対象として不動産投資の際に実施されるデュー・デリジェンス（Due Diligence）の一環として地震リスクを表す数値として最も多く用いられている。PMLは、文字どおり訳せば「災害により発生するかもしれない最悪の損失」であるが、最悪といっても実際には100%の可能性で予測はできないので、「対象施設あるいは施設群に対して最大の損失をもたらす再現期間475年相当の地震動が発生したときの、物的損失額の再調達価格に対する割合¹²⁾などと、極めてまれな事象が発生した場合の損失の大きさを表す。また、損失は金額そのものではなく、現時点でその建物を最初から建設しなおすのに必要な費用（再調達価格）の何%に対応するかを用いて示される。

適切なリスク表現はリスク情報の利用目的によって変わり、例えば、保険金額や災害準備金額を検討するには、最悪のケースを考えたときの損失の大きさを示すPMLが適当であり、一方、中立的にリスクを比較したいときには期待値の比較が、逆に予算の上限が決まっているプロジェクトの採否を考えるときには、ある大きさ以上の損失を被る確率でリスクを表現した方がよからう。適切なリスク表現をするには、そもそもリスクをどうしたいのか、どういう事態を防ぎたいのかに立ち戻って考えることが重要である¹⁰⁾。

7.7 まとめ

本章では、建造物の信頼性の解析的な評価方法と、実用的な限界状態設計法として、荷重耐力係数設計法、及

び荷重係数，耐力係数の評価方法について述べた。さらに，目標性能水準の考え方として，総期待費用最小化やリスクに基づく設定方法について概説した。今後，社会が多様化していく中で，構造物にも様々なレベルの性能が期待されることとなろう。これを合理的に実現する上で，限界状態設計法は有用なツールの一つである。

参 考 文 献

- 1) Ellingwood, B., MacGregor, J. G., Galambos, T. V. and Cornell C. A., "Probability-based Load Criteria: Load Factors and Load Combinations," *J. of ST, ASCE*, Vol. 108, No. ST5, 1982, pp. 978~997.
- 2) 神田 順編：限界状態設計法のすすめ，建築技術，1993.
- 3) 日本建築学会：建築物の限界状態設計指針，2002.
- 4) ISO, *ISO2394 —General Principles on Reliability for Structures*, 1998.
- 5) CEN, *EN 1997-1 Eurocode 7: Geotechnical Design —Part 1: General Rules*, 2004.
- 6) 日本建築学会：建築物荷重指針・同解説，2004.
- 7) Der Kiureghian, A. and Liu, P. L. "Structural Reliability under Incomplete Probability Information." *J of Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 112, No. 1, 1986. 1, pp. 85~104.
- 8) 森 保宏：限界状態設計法における荷重・耐力係数の実用的算定法，日本建築学会構造系論文集．第559号，2002.9., pp. 39~46.
- 9) 神田 順・平川倫生：限界状態設計における設計荷重のための最適信頼性指標，日本建築学会構造系論文集，1999.9, pp. 39~46.
- 10) 日本建築学会編：事例に学ぶ建築リスク入門，技法堂出版，2007.7.
- 11) Takada, T. and Wong, M.: Code Calibration for Implementation of Limit State Design in Japan, *JCOS-SAR2003論文集*, 2003, pp. 969~974.
- 12) 日本建築学会編：Excel で学ぶ地震リスク評価，技法堂出版，2011.8.