

地下の分布荷重によって生じる地盤内の鉛直応力と変位の一計算

にし だ よし ちか
西 田 義 親*

1. 緒 論

地盤に作用する力のため地中に生じる応力を求める問題は、基礎設計上重要であって、集中荷重を地表面に作用させた場合のボシネスク (Boussinesq) の式が広く用いられている。また分布荷重がはたらく場合についても、すでに多くの計算表や図表が発表され実用に供されている。そしてこれが地表から下の基礎の場合の計算にも拡張応用される例があるが、このことは必ずしも妥当とはいえない¹⁾。クイ基礎、地中構造物の設計、またこれらの基礎のために地盤がうける影響の考察には、地下に作用する力のために地盤内に生じる応力や変形を知る必要が生じる。しかし、地表面に荷重のはたらく場合に比べて、この方面の報告があまり見あたらないのでここに一つの計算を示したい。

2. 地中に生じる応力と変形

半無限の平板の内部に作用する力のため、平板内に生じる二次元的応力やヒズミをあたえる計算式は、集中荷重が1個の場合のメラン (F. Melan, 1952)²⁾ の式、集中荷重が1列の場合のイングル (W. Engl, 1959)³⁾ などの式といくつかの報告がある。しかし、土質工学上重要な三次元的な計算式をあたえたのは、おそらくミンドリン (R.D. Mindlin, 1936)⁴⁾ が最初と思われる。彼は半無限の弾性体の内部の一点において、表面に対し垂直または水平に集中荷重が作用したとき、その固体内部に生じる応力と変位の各成分をあたえる式を導いたのである。最近になって最上教授 (1957) も同じような式を導いており⁵⁾、ケーシー (A. Kezdi, 1958) は以前から自己の計算をもとにして同じような式を発表している⁶⁾。

基礎から作用する荷重はある分布面積をもっていて、必ずしも集中荷重ではないし、また集中荷重であるとする、たとえばミンドリンの公式を用いる時、荷重の作用点の近くでは、無限に大きい応力を生じることになって、実際の計算に応用しにくいことになる。基礎から相当程度はなれた所の地盤内の応力や変位を求める場合には、基礎に作用する分布荷重の合力を、その点に作用する一つの集中荷重と考えて、上に述べた諸公式を適用しても実用上大差ない。分布荷重として計算する場合に比べて、比較的容易である。

しかし、荷重の作用点付近の応力や変位を求める場合、または基礎の弾性沈下を計算する場合には、荷重の作用点に接する直下の土の応力や変位が必要になるが、さきにも述べたとおり、集中荷重そのものを用いる計算式のままではもともと得られないのである。

地中に分布荷重が作用した場合に地盤内に生じる応力を求めるために、ケーシーは自己の式を積分して、円形等分布荷重の中心の下方の鉛直応力を計算し、さらにメラン、ジェリンク (Jelink) の研究から帯状分布荷重の場合の式も示している⁷⁾。またフォックス (E.N. Fox, 1948) はミンドリンの式を応用して、長方形載荷面に等分布荷重のはたらく場合の平均の沈下を計算して、地表面載荷の場合と比較した⁸⁾。鳥海教授 (1964) は深い基礎が水平力をうける場合、地盤に生じる反力と変位を計算したが⁹⁾、これは前二者と趣きをややことにしている。いずれにしてもこの種の計算についてはこれらの他に報告がないようであり、筆者はミンドリンの式を基にして、二、三の計算結果を提示する。

3. 地中で等分布鉛直荷重をうける円形基礎の下方の応力

表面水平な半無限の一樣な地盤を弾性体と考える。地中の一点に集中荷重 (Q) が鉛直に作用したとき、地盤内の任意の点に生じる鉛直応力 ($\Delta\sigma_z$) は図-1を参照してミンドリンは次のようにあたえられている。

$$\Delta\sigma_z = \frac{Q}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{(1-2\mu)(z-t)}{R_1^3} - \frac{(1-2\mu)(z-t)}{R_2^3} \right]$$

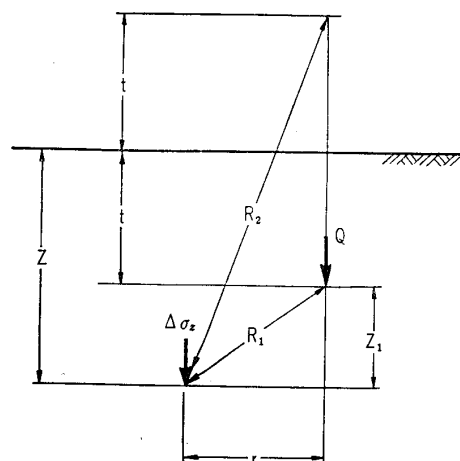


図-1

* 金沢大学工学部、工博

$$+ \frac{3(3-4\mu)z(z+t)^2-3t(z+t)(5z-t)}{R_2^5} + \frac{3(z-t)^3}{R_1^5} + \frac{30tz(z+t)^3}{R_2^7} \Big] \dots\dots\dots (1)$$

ここに μ は地盤のポアソン比, t は荷重 (Q) が作用している深さ, z はもとめようとする応力の位置の深さで, r を Q の位置から $4\sigma_z$ までの水平距離とすると $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-t)^2}$, $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+t)^2}$ である。

いま, 図-2 のように, 地表から t の深さの所に半径 r_0 の円形に q なる等分布荷重が鉛直に作用しているものとする。この円形基礎の下方の任意点 P に生じる鉛直応力 σ_z を求める。図の記号を用いて

$$\angle APO = \alpha, \angle APA_0 = \theta, OP/OA_0 = x, \\ AP = \rho, OA_0 = OA_1 = r_0, A_1P = \rho_0$$

であるから

$$\rho_0 = r_0 \{x \cos \alpha + \sqrt{1-x^2 \sin^2 \alpha}\} \dots\dots\dots (2)$$

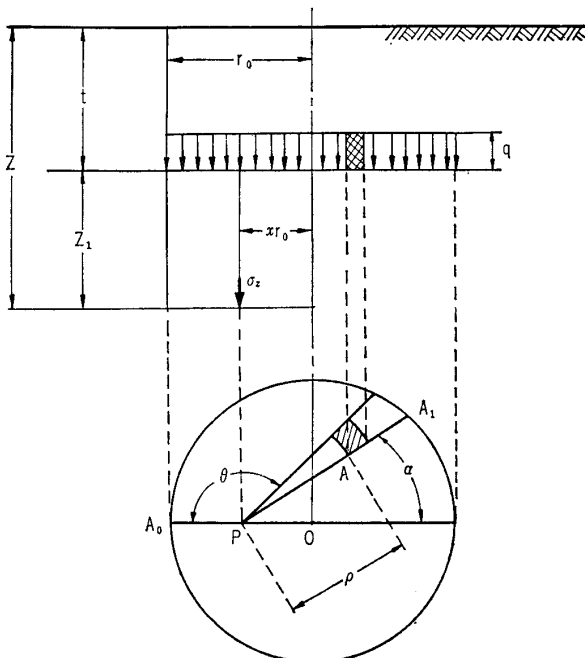


図-2

微小部分 $\rho d\alpha d\rho$ に作用する荷重によって生じる応力は式 (1) において $Q = q \rho d\rho d\alpha$ とおけばよい。ただし, 式 (1) の r は ρ とおきかえて計算する必要がある。したがってこの円形等分布荷重全部のために, P 点に生じる鉛直応力 σ_z は次の二重積分によって求められる。

$$\sigma_z = \frac{2q}{8\pi(1-\mu)} \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{\rho_0} \left[(1-2\mu)(z-t) \cdot \left\{ \frac{1}{(\sqrt{\rho^2 + (z-t)^2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{\rho^2 + (z+t)^2})^3} \right\} + \frac{3(3-4\mu)z(z+t)^2-3t(z+t)(5z-t)}{(\sqrt{\rho^2 + (z+t)^2})^5} + \frac{3(z-t)^3}{(\sqrt{\rho^2 + (z-t)^2})^5} + \frac{30tz(z+t)^3}{(\sqrt{\rho^2 + (z+t)^2})^7} \right] \cdot \rho d\rho d\alpha \dots\dots\dots (3)$$

したがって一般解は上式を積分して

$$\sigma_z = \frac{q}{4\pi(1-\mu)} \int_{\alpha=0}^{\pi} \left[(1-2\mu)(z-t) \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z+t)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z-t)^2}} + \frac{1}{z-t} - \frac{1}{z+t} \right\} - \left\{ \frac{(z+t)^3}{(\sqrt{\rho_0^2 + (z+t)^2})^3} - 1 \right\} \cdot \frac{3(3-4\mu)z(z+t)^2-3t(z+t)(5z-t)}{3(z+t)^3} + 1 - \frac{(z-t)^3}{(\sqrt{\rho_0^2 + (z-t)^2})^3} + \frac{6tz}{(z+t)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{(z+t)^5}{(\sqrt{\rho_0^2 + (z+t)^2})^5} \right\} \right] d\alpha \dots\dots\dots (4)$$

上式の (4) に含まれる ρ_0 は式 (2) で示されるように $\sin \alpha$ の関数であるから積分は簡単にできないが, 特別な場合について計算した結果をあげると次のようである。

(1) 等分布荷重をうける円形基礎の中心下方の応力

図-2 から明らかなように, 式 (2) において $x=0$ とおけばよく, ρ_0 は α に無関係な定数 r_0 に等しくなるから, 式 (4) を積分すると次の結果をうる。

$$\sigma_z = \frac{q}{4(1-\mu)} \left[(1-2\mu)(z-t) \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (z+t)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (z-t)^2}} + \frac{1}{z-t} - \frac{1}{z+t} \right\} - \left\{ \frac{(z+t)^3}{(\sqrt{r_0^2 + (z+t)^2})^3} - 1 \right\} \cdot \frac{3(3-4\mu)z(z+t)^2-3t(z+t)(5z-t)}{3(z+t)^3} + 1 - \frac{(z-t)^3}{(\sqrt{r_0^2 + (z-t)^2})^3} + \frac{6tz}{(z+t)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{(z+t)^5}{(\sqrt{r_0^2 + (z+t)^2})^5} \right\} \right] \dots\dots\dots (5)$$

ここに r_0 は円形基礎の半径である。したがって, 分布荷重の強さ (q), 地盤のポアソン比 (μ), 基礎の深さ (t), があたえれば, 円形基礎の中心の下方の任意の点の鉛直応力が計算できる。

地盤表面に円形等分布荷重が作用したときは, 上式において $t=0$ とおけばよく, したがって

$$\sigma_z = \frac{q}{4(1-\mu)} \left[-(3-4\mu) \left\{ \frac{z^3}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} - 1 \right\} + 1 - \frac{z^3}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \right] = q \left[1 - \frac{z^3}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \right] \dots\dots\dots (6)$$

となり, ボンネスクの式を積分した結果と一致する。この場合, 応力の大きさには地盤のポアソン比は関係してこない。

さて, 地中に分布荷重が作用した場合の式 (5) で表わされる応力について, 数値計算した結果を示すと次の表のようになる。ただし, $z_1 \equiv (z-t)$ は基礎載荷面から下方への鉛直深さであり, ポアソン比を 3 種類の 0.0, 0.25, 0.50 の場合について計算した。表の中の数値は

i) $\mu=0$ の場合

z_1/r_0	t/r_0	0	1	2	3	∞
0	0	1.00	0.70	0.56	0.54	0.50
1	0	0.64	0.35	0.30	0.27	0.24
2	0	0.28	0.17	0.13	0.12	0.10
4	0	0.09	0.06	0.05	0.04	0.03

ii) $\mu=0.25$ の場合

z_1/r_0	t/r_0	0	1	2	3	∞
0	0	1.00	0.71	0.58	0.53	0.50
1	0	0.64	0.46	0.39	0.29	0.26
2	0	0.28	0.18	0.15	0.13	0.11
4	0	0.09	0.07	0.06	0.04	0.03

iii) $\mu=0.50$ の場合

z_1/r_0	t/r_0	0	1	2	3	∞
0	0	1.00	0.75	0.59	0.54	0.50
1	0	0.64	0.45	0.38	0.35	0.34
2	0	0.28	0.22	0.18	0.15	0.14
4	0	0.09	0.08	0.07	0.04	0.04

σ_z/q の値である。

ポアソン比 $\mu=1/3$ の場合についてはケーシーが図表をあたえている。上述の計算によると、相当深い基礎の底面の中心における応力 ($z_1/r_0=0$ のとき) は、基礎の分布荷重の半分であることが興味深い。

(2) 等分布荷重をうける円形基礎の周縁下方の応力

この場合には、式 (2) において $x=1.0$ とおけばよい。このとき、図-2 は図-3 のようになる。式 (2)、式 (4) に含まれる α のかわりに計算の便宜上 θ を用いたがって式 (4) は

$$\sigma_z = \frac{q}{8\pi(1-\mu)} \int_{\theta=0}^{\pi} \left[(1-2\mu)(z-t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{4r_0^2 \sin^2 \theta + (z+t)^2}} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{\sqrt{4r_0^2 \sin^2 \theta + (z-t)^2}} + \frac{1}{z-1} \right\} \right. \\ \left. - \frac{(z+t)^3}{(4r_0^2 \sin^2 \theta + (z+t)^2)^{3/2}} - 1 \right] \times \left\{ \frac{3(3-4\mu)z(z+t)^2 - 3t(z+t)(5z-t)}{3(z+t)^3} \right\} + 1 \\ - \frac{(z-t)^3}{(4r_0^2 \sin^2 \theta + (z-t)^2)^{3/2}} + \frac{6tz}{(z+t)^2} \left\{ 1 - \frac{(z+t)^5}{(4r_0^2 \sin^2 \theta + (z+t)^2)^{5/2}} \right\} \right] d\theta \dots \dots \dots (8)$$

この式を積分するために $m_1 = \frac{2r_0}{z-t}$, $m_2 = \frac{2r_0}{z+t}$, $k = \frac{m_1^2}{1+m_1^2}$, $k_2 = \frac{m_2^2}{1+m_2^2}$ とおくと、

$$\sigma_z = \frac{q}{8\pi(1-\mu)} \left[(1-2\mu)(z-t) \left\{ \frac{1}{z-t} - \frac{1}{z+t} \right\} \pi + (1-2\mu) \frac{2(z-t)}{(z+t)\sqrt{1+m_2^2}} F_1\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ \left. - (1-2\mu) \frac{2}{\sqrt{1+m_1^2}} F_1\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) - 2 \times \frac{(3-4\mu)z(z+t)^2 - t(z+t)(5z-t)}{(z+t)^3 \sqrt{1+m_2^2}} E_2\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ \left. + \frac{(3-4\mu)z(z+t) - t(5z-t)}{(z+t)^2} \pi + \pi - \frac{2}{\sqrt{1+m_1^2}} E_2\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{6tz}{(z+t)^2} \pi - \frac{12tz}{3(z+t)^2(1+m_2^2)^{5/2}(1-k_2^2)^2} \right. \\ \left. \cdot \left\{ 2(2-k_2^2)E_2\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) - (1-k_2^2)F_1\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right] \dots \dots \dots (9)$$

ここに $F_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ は第一種完全ダ円分であって、 $\int_0^{\pi/2} (1/\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}) d\theta$ を表わし、 $E_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ は第二種完全ダ円積分であって $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$ を表わす。このようにして、地表から t なる深さに等分布荷重 q が働く場合に、地表面から深さ $(t+z_1)$ にある円形基礎

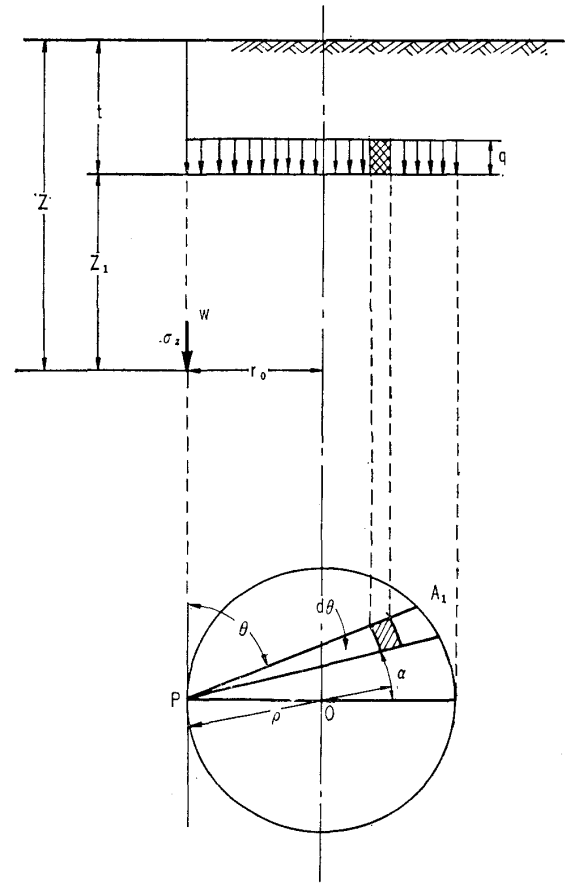


図-3

ると、式 (2) は次のようになる。

$$\rho_0 = r_0 \{2\sqrt{1-\sin^2 \alpha}\} = 2r_0 \sin \theta \dots \dots \dots (7)$$

の円縁の下方の任意の点の鉛直応力が計算できる。

地盤の表面に円形等分布荷重が作用する場合には、上の各式において $t=0$ とおけばよく、

$$m_1 = m_2 \equiv m, \quad k_1 = k_2 \equiv k, \quad F_1\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = F_1\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right), \\ E_2\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = E_2\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) = E_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

となり式 (9) は次のようになる。

$$\sigma_z = q \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi \sqrt{1+m^2}} E_2 \left(k, \frac{\pi}{2} \right) \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし $m=2r_0/z$, $k=m^2/(1+m^2)$ である。この式はボシネスクの式から直接計算した結果と一致する。また応力の大きさに地盤のポアソン比が関係しなくなることも同様である。

さて、式 (9) によって、応力を計算した結果を示すと次の表のようになる。ただし、 $z_1=(z-t)$ は基礎載荷面から下方へ鉛直の深さである。計算はポアソン比が 0.0, 0.25, 0.5 の場合の 3 種類について行なった。表の中の数値は σ_z/q の値である。

i) $\mu=0$ の場合

$z_1/r_0 \backslash t/r_0$	0	1	2	3	∞
0	0.50	0.33	0.30	0.28	0.25
1	0.34	0.21	0.18	0.17	0.13
2	0.20	0.12	0.10	0.09	0.07
4	0.12	0.05	0.04	0.03	0.01

ii) $\mu=0.25$ の場合

$z_1/r_0 \backslash t/r_0$	0	1	2	3	∞
0	0.50	0.38	0.31	0.28	0.25
1	0.34	0.24	0.18	0.15	0.13
2	0.20	0.13	0.11	0.09	0.08
4	0.12	0.06	0.05	0.03	0.02

iii) $\mu=0.50$ の場合

$z_1/r_0 \backslash t/r_0$	0	1	2	3	∞
0	0.50	0.40	0.32	0.28	0.25
1	0.34	0.29	0.21	0.19	0.16
2	0.20	0.17	0.13	0.11	0.10
4	0.12	0.07	0.06	0.05	0.04

この計算結果によれば、円形基礎周縁の応力は $z_1/r_0=0$ のときには、分布荷重の 1/2 (地表面で) から 1/4 (非常に深い所) であることが興味深い。もちろん、基礎の半径 r_0 に比べて、応力を求める点の深さ z が非常に大きい場合は、 $z/r_0 \rightarrow \infty$ とおけばよく、このときは $E(k, \pi/2)=\pi/2$, $F(k, \pi/2)=\pi/2$ となり $\sigma_z/q \rightarrow 0$ となることは明らかである。

以上の二つの特別の場合の計算例から、非常にたわみやすい円形基礎の上に等分布荷重をかけた場合、この基礎の下面に接して生じる鉛直応力は、上の分布荷重より小さく、中心部以外は決して等しくないことに注意すべきである。

4. 地中に等分布鉛直荷重をうける円形基礎の下方の変位

表面水平な地盤内地中の一点に集中荷重 Q が鉛直に作用したとき、地盤内の任意の点に生じる鉛直の変位 Δw を、図—1 と同じ座標を用いて、ミンドリンは次のようにあたえている。

$$\Delta w = \frac{(1+\mu) Q}{8 \pi E(1-\mu)} \left\{ \frac{a_1}{R_1} + \frac{a_2}{R_2} + \frac{a_3}{R_1^3} + \frac{a_4}{R_2^3} + \frac{a_5}{R_2^5} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに E は地盤のヤング係数、 μ は地盤のポアソン比、で

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 3-4\mu \\ a_2 &= 5-12\mu+8\mu^2 \\ a_3 &= (z-t)^2 \\ a_4 &= (3-4\mu)(z+t)^2-2tz \\ a_5 &= 6tz(z+t)^2 \\ R_1 &= \sqrt{r^2+(z-t)^2}, R_2 = \sqrt{r^2+(z+t)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

である。

いま、図—2 のような地中の円形等分布荷重によって、その基礎の下方の任意の点 P に生じる鉛直変位 w は、式 (2) の記号を用いて、式 (12) の R_1, R_2 において $r=\rho$ とおきかえ、また $Q=q \rho d \rho d \alpha$ において円全体について積分すればよいから次のようになる。

$$\begin{aligned} w &= 2 \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{\rho_0} \Delta w \\ &= \frac{(1+\mu)q}{4 \pi E(1-\mu)} \int_{\alpha=0}^{\pi} \left[a_1 \{ \sqrt{\rho_0^2+(z-t)^2} - (z-t) \} \right. \\ &\quad + a_2 \{ \sqrt{\rho_0^2+(z+t)^2} - (z+t) \} \\ &\quad + a_3 \left\{ \frac{1}{z-t} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+(z-t)^2}} \right\} + a_4 \left\{ \frac{1}{z+t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+(z+t)^2}} \right\} - \frac{1}{3} a_5 \left\{ \frac{1}{(\sqrt{\rho_0^2+(z+t)^2})^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(z+t)^3} \right\} \left. \right] d\alpha \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

式 (13) のなかにある ρ_0 は $\sin \alpha$ の関数で式 (2) で示されるものである。特別の場合として次の二例について積分してみる。

(1) 等分布荷重をうける円形基礎の中心下の鉛直変位

図—2 に明らかなようにこの場合は式 (2) において $x=0$ とおけばよい。したがって式 (13) を積分した結果

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1+\mu) q}{4 E(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \{ \sqrt{r_0^2+(z-t)^2} - (z-t) \} \right. \\ &\quad + (5-12\mu+8\mu^2) \{ \sqrt{r_0^2+(z+t)^2} - (z+t) \} \\ &\quad + (z-t) - \frac{(z-t)^2}{\sqrt{r_0^2+(z-t)^2}} \\ &\quad - \frac{(3-4\mu)(z+t)^2-2tz}{\sqrt{r_0^2+(z+t)^2}} \\ &\quad + \frac{(3-4\mu)(z+t)^2-2tz}{z+t} - \frac{2tz(z+t)^2}{(\sqrt{r_0^2+(z+t)^2})^3} \\ &\quad \left. + \frac{2tz}{(z+t)} \right] \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

地表面に円形等分布荷重が作用したときは上式で $t=0$ とおけばよいから

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1+\mu)q}{E} \left[2(1-\mu) \{ \sqrt{r_0^2+z^2} - z \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{z^2}{\sqrt{r_0^2+z^2}} + z \right] \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

したがって地表面にある基礎の中心の変位は $z=0$ と
して

$$w_0 = \frac{2q(1-\mu^2)}{E} r_0 \dots \dots \dots (16)$$

となりボシネスクの式から計算した結果に一致する。

基礎の沈下は基礎底面に接した土の鉛直の変位に等しいと考えれば、式 (14) において $z=t$ とおいて求められる。この時は

$$w = \frac{(1+\mu)q}{4E(1-\mu)} \left[(3-4\mu)r_0 - 4(1-2\mu)^2 t + (5-12\mu+8\mu^2)\sqrt{4t^2+r_0^2} - \frac{2(5-8\mu)t^2}{\sqrt{4t^2+r_0^2}} - \frac{8t^4}{(\sqrt{4t^2+r_0^2})^3} \right] \dots \dots \dots (17)$$

基礎の半径 r_0 に比べて深さ t が非常に深いときは $t/r_0 \rightarrow \infty$ として上式の第二項以下は整理計算すると 0 になるから (または $r_0/t \ll 1$ で、 r_0/t の 2 次以上の項は省略できるから)、

$$w_\infty = \frac{q(1+\mu)(3-4\mu)r_0}{4E(1-\mu)} \dots \dots \dots (18)$$

となる。基礎の鉛直変位は地盤材料のヤング係数に反比例し、載荷半径と荷重に比例することは式 (16) または式 (18) から容易にわかるから、一般の場合として、式 (17) を次の形に表わしてみる。

$$w = \frac{qr_0}{E} I_0 \dots \dots \dots (19)$$

I_0 は無次元数であって、 μ と (t/r_0) の関数である一つの影響値である。ポアソン比を 0.0, 0.25, 0.5 の 3 種にかえて、種々の深さについて I_0 を計算した結果を示すと次の表のようである。

$t/r_0 \backslash \mu$	0.50	0.25	0.00
0	1.5000	1.8750	2.0000
1	1.2000	1.3297	1.2482
2	1.0175	1.1086	1.0220
3.5	0.9080	0.9949	0.9089
5	0.8616	0.9472	0.8619
10	0.8061	0.8905	0.8062
20	0.7781	0.8619	0.7781
50	0.7575	0.8387	0.7550
100	0.7500	0.8333	0.7500
1,000	0.7500	0.8333	0.7500

(2) 等分布荷重をうける円形基礎の周縁下の鉛直変位

この場合、図-2 において $x=1.0$ とおけば、式 (2) のかわりに式 (7) を用いることになる。したがって図-3 と同じ座標を用いるとき、 α のかわりに便宜上 θ を用いて式 (11) を円全体について積分すると、式 (13) は次のようになる。

$$w = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2r_0 \sin \theta} \Delta w = \frac{(1+\mu)q}{8\pi E(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \cdot \left\{ 2\sqrt{(z-t)^2+4r_0^2} E_2\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) - \pi(z-t) \right\} \right.$$

$$+ (5-12\mu+8\mu^2) \left\{ 2\sqrt{(z+t)^2+4r_0^2} \cdot E_2\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) - \pi(z+t) \right\} - \frac{2(z-t)^2}{\sqrt{4r_0^2+(z-t)^2}} \cdot F_1\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) + \pi(z-t) + \{(3-4\mu)(z+t)^2-2tz\} \cdot \left\{ \frac{\pi}{z+t} - \frac{2}{\sqrt{4r_0^2+(z+t)^2}} F_1\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) \right\} + 2tz \cdot \left\{ \frac{\pi}{z+t} - \frac{2}{\sqrt{4r_0^2+(z+t)^2}} E_2\left(k_2, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right] \dots \dots \dots (20)$$

ここに $F_1(k, \pi/2)$ は第一種完全ダ円積分 $\int_0^{\pi/2} (1/\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}) d\theta$ を示し、 $F_2(k, \pi/2)$ は第二種完全ダ円積分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$ を示し、 $k_1 \equiv 2r_0/\sqrt{4r_0^2+(z-t)^2}$ 、 $k_2 \equiv 2r_0/\sqrt{4r_0^2+(z+t)^2}$ である。

基礎の沈下はこれに接した土の鉛直変位であると考えて、式 (20) において $z=t$ とおけばよい。円形基礎が等分布荷重をうけるとき、その周縁部下方の地盤の鉛直変位は次のように求められる。

$$w = \frac{(1+\mu)q}{4\pi E(1-\mu)} \left[2(3-4\mu)r_0 - 2(1-2\mu)^2 \pi t - (5-8\mu) \frac{t^2}{\sqrt{t^2+r_0^2}} F_1\left(\frac{r_0}{\sqrt{t^2+r_0^2}}, \frac{\pi}{2}\right) + \left\{ 2(5-12\mu+8\mu^2)\sqrt{t^2+r_0^2} - \frac{t^2}{\sqrt{t^2+r_0^2}} \right\} \cdot E_2\left(\frac{r_0}{\sqrt{t^2+r_0^2}}, \frac{\pi}{2}\right) \right] \dots \dots \dots (21)$$

ここに F_1, F_2 はそれぞれ第一種完全ダ円積分、第二種完全ダ円積分であることは前と同様である。

地表面にある円形基礎の周縁の鉛直変位は上式で $t=0$ とすれば、

$$w_0 = \frac{4q(1-\mu^2)r_0}{\pi E} \dots \dots \dots (22)$$

また半径 r_0 に比べて基礎の深さ t が非常に大きいときは、第 2 項以下を整理すると 0 になるから、式 (21) は次のようになる。

$$w_\infty = \frac{q(1+\mu)(3-4\mu)r_0}{2\pi E(1-\mu)} \dots \dots \dots (23)$$

基礎の鉛直変位は地盤材料のヤング係数と半径に関係するから、式 (19) と同じように、一般の式 (21) を

$t/r_0 \backslash \mu$	0.50	0.25	0.00
0	0.9549	1.1937	1.2732
1	0.8485	0.9406	0.8998
2	0.7098	0.7626	0.7016
5	0.5858	0.6401	0.5848
10	0.5314	0.5838	0.5291
20	0.4987	0.5458	0.4896
50	0.4775	0.5305	0.4778
100	0.4775	0.5305	0.4775
1,000	0.4775	0.5305	0.4775

$$w = \frac{q r_0}{E} I_1 \dots\dots\dots (24)$$

の形に表わす。 I_1 は μ と t/r_0 との関数であって無次元であり一種の影響値である。 I_1 を計算した結果を示すと前ページの表のようになる。

5. 結 論

上述の計算は円形基礎の中心や周縁の下方の地盤内の鉛直方向の応力と変位を解析的にもとめたものであるが、その他の任意の点の場合には、 x に適当な値を入れて計算すればよい。

一般に、地下に設けられた基礎のために生じる応力や変位の計算にはボシネスクの式を用いると、過大の値をあたえる。この報告にあるように、根入の深さがほぼ直径と同じ程度より深くなると、鉛直応力や鉛直変位は、地表面にある場合の約半分になる。これ以上深くなってもあまり減少はしないようである。分布荷重であっても、基礎からある程度離れた点の応力や変位は、荷重全体を集中荷重と考えて計算をすすめてもよいと思う。基礎に近い点や基礎の底面の応力、変位の計算が必要な場合には、式 (4)、式 (13) において $z=t$ として積分すればよい。しかしこれは簡単でないで、数値積分の形にして電子計算機を用いなければならない。本文は基礎の応力や変位の計算に最も基本的な点である中心部と周縁部について解析的な計算結果を示した。これによっておおよその反力分布の形が判明すると思う。なお、 x が任意の場合については、2230 N ARC-Computer を用いてプログラムを作り、任意の数値をあたえて必要な場合の値が得られるように計算中であるので次の機会に結果を報告したい。

なお、基礎はある程度の剛性がある、荷重分布は等分布と考え難い場合が多く、底面直下の鉛直変位は一樣と考える方が妥当な場合が多い。剛性基礎の直下の反力

分布を理論に求める計算は、地表面に基礎がおかれた場合についてすでに報告がみられるが、地下深くにある場合については、まだあまりみあたらないようである。上に述べた等分布荷重をうけた基礎の応力と鉛直変位の計算が、中心部と周縁部以外の任意の点であたえられると、これを用いて、深い剛性基礎の圧力分布曲線が数値的に計算することができる。これについても、次の機会にあわせて報告する。

本文は文部省科学研究試験補助金¹⁰⁾による研究結果の一部であって、計算に協力された吉村元宏（横浜市）、藤井昌弘（大阪市）、野田隆男（石川県）の各氏に謝意を表明する。

参 考 文 献

- 1) Mindlin, R.D. : Discussion, Trans. ASCE Vol. 108, p 147 (1943)
- 2) Melan, E. : Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innernbeanspruchten Halbscheibe, Zeitsch. Angew. Math. Mech., Bd. 12, H. 6 (1932)
- 3) Engl, W. : Der Spannungszustand einer Reihe von Kräften, die in der unendlichen Halbebene angreifen, Zeitsch. Angew. Math. Mech Bd. 39, H. 5/6, S. 192 ~198 (1959)
- 4) Mindlin R.D. : Force at A Point in The Interior of A Semi-Infinite Solid, Physics, Vol. 7, No. 5, p 195 ~202 (1936)
- 5) 最上武雄 : 半無限弾性体内の一点に力が作用するときの応力を求める数値表, 鹿島建設技術研究所, pp. 58, (1957)
- 6) Kézdi, Á. : Beiträge zur Berechnung der Spannungsverteilung im Boden, Der Bauingenieur, 33 Jah., H. 2, S. 54~58, (1958)
- 7) Kézdi, Á. : ditto. -(6)-
- 8) Fox, E.N. : The Mean Elastic Settlement of A Uniformly Loaded Area at A Depth below The Ground Surface, Proc 2nd International Conf. Soil Mech. Found. Eng., Vol. 1, p. 129~131 (1948)
- 9) 鳥海 勲 : 水平力を受ける深い基礎の地盤反力と変位について, 土と基礎, 12 巻 1 号, p 27~32 (1964)
- 10) 科学試験研究 (No. 54014) : 地盤と杭の支持力の実例的研究 (代表 金沢大学 西田義親)

(原稿受付 1965.5.31)