No. 455

弾性床上にあるハリ構造物の応力解析

沢田敏男*
長谷川高士**

1. まえがき

土木構造物には，地下構造をもつ建造物やボックスカルバートなど，ラーメン構造中に弾性床上のハリを含むものや，水路，暗キョ，送水パイプなど弾性床上の連続バリ構造などが多く存在し，それらを解くために弾性床上のハリの解法がいろいろ行なわれてきた。ここでは弾性床上のハリの解を用いて，構造物の実用的解析法の一つとしてひろく用いられるタワミ角法の公式を求め，それを用いた解法を示した。タワミ角公式は弾性床上のハリを両端における任意の弾性的支持条件下で解いて求まるものであるから，これを利用すれば各種の構造の解析が一般的に考察できる。なお，弾性床はウィンクラー(Winkler)の仮定，すなわち，$p=ky$ なる関係が外力と地盤の変形の間に成立するものとしている。

2. 基本式の誘導

弾性床上のハリの基礎方程式を用いてタワミ角公式を導く。タワミ角公式は，ハリの端点 A, B におけるタワミ角 φ_A, φ_B，タワミ度 δ_A, δ_B，および荷重による固定端モーメントによってハリの A, B 端におけるモーメント，セン断力を表わせばよい。

そのために，まず弾性床上のハリの一般解を求める。基礎方程式はウィンクラー地盤の仮定から，

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=F(x)-ky$$

である。ただし，

y：タワミ
E：ハリの材料のヤング率
I：ハリの断面2次モーメント
k：地盤係数
$F(x)$：ハリに作用する荷重分布を表わす関数

である。ここで，

$$\alpha x=\xi,\quad f(\xi)=F(x)/EI\alpha^4,\quad \alpha=\left(\frac{k}{4EI}\right)^{1/4}$$

とおいて基礎方程式を書き直せば，

$$\frac{d^4y(\xi)}{d\xi^4}+4y(\xi)=f(\xi) \quad \cdots\cdots(1)$$

となり，(1) 式の一般解は次のように与えられる[1]。

$$y(\xi)=A_1Y_1(\xi)+A_2Y_2(\xi)+A_3Y_3(\xi)+A_4Y_4(\xi)+y_s(\xi) \quad \cdots\cdots(2)$$

ただし，$A_1 \sim A_4$ は積分定数を表わし，

$$Y_1(\xi)=\cosh\xi\cos\xi$$

$$Y_2(\xi)=\frac{1}{2}(\cosh\xi\sin\xi+\sinh\xi\cos\xi)$$

$$Y_3(\xi)=\frac{1}{2}\sinh\xi\sin\xi$$

$$Y_4(\xi)=\frac{1}{4}(\cosh\xi\sin\xi-\sinh\xi\cos\xi)$$

$y_s(\xi)$＝特解

である。したがって，タワミ角 $\varphi(x)$，モーメント $M(x)$，セン断力 $Q(x)$ はそれぞれ次のように求められる。

$$\varphi(x)=\alpha(-4A_1Y_4(\xi)+A_2Y_1(\xi)+A_3Y_2(\xi)+A_4Y_3(\xi)+y_s'(\xi)) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$M(x)=-EI\alpha^2(-4A_1Y_3(\xi)-4A_2Y_4(\xi)+A_3Y_1(\xi)+A_4Y_2(\xi)+y_s''(\xi)) \quad \cdots(4)$$

$$Q(x)=-EI\alpha^3(-4A_1Y_2(\xi)-4A_2Y_3(\xi)-4A_3y_4(\xi)+A_4Y_1(\xi)+y_s'''(\xi)) \quad \cdots\cdots(5)$$

ただし，上式および以下の諸式中特解 y_s の ($'$) は x に関する微分の回数を示す。

さらに，特解 $y_s(\xi)$ は $f(\xi)$ が多項式で与えられる場合には

$$y_s(\xi)=\frac{f(\xi)}{4}\left(1-\frac{1}{4}\frac{d^4}{d\xi^4}+\frac{1}{16}\frac{d^8}{d\xi^8}\cdots\cdots\right)\cdots\cdots(6)$$

である。

(1) タワミ角公式

タワミ角公式を求めるにはすでに述べたように，(2)式に含まれる積分定数 $A_1 \sim A_4$ を次のような境界条件のもとで決定し，それを用いてハリの端点 A, B におけるモーメント，セン断力を求めればよい[2]。

境界条件は

$$\begin{cases}\xi=0 & \text{で}\quad y=\delta_A,\ \varphi=\varphi_A\\ \xi=\alpha l=\phi & \text{で}\quad y=\delta_B,\ \varphi=\varphi_B\end{cases}$$

である。ただし l はハリの長さを表わす。

これから $A_1 \sim A_4$ は次のように決定できる。

$$A_1=\delta_A+A_1'$$

$$A_2=\frac{\varphi_A}{\alpha}+A_2'$$

$$A_3=-\frac{2}{\alpha^2 l}(B_1\varphi_A+B_2\varphi_B+B_3r_A-B_4r_B)+A_3'$$

* 京都大学農学部教授　農博　　** 京都大学農学部助手

$$A_4=\frac{2}{\alpha^3 l^2}(B_3\varphi_A+B_4\varphi_B+B_5 r_A-B_6 r_B)+A_4' \qquad \cdots\cdots(7)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
A_1'&=-y_s(0)\\
A_2'&=-y_s'(0)\\
A_3'&=\frac{2}{\alpha^2 l^2}(B_1\alpha\, l y_s'(0)+B_2\alpha\, l y_s'(\phi)\\
&\quad +B_3 y_s(0)-B_4 y_s(\phi))\\
A_4'&=-\frac{2}{\alpha^3 l^2}(B_3\alpha\, l y_s'(0)+B_4\alpha\, l y_s'(\phi)\\
&\quad +B_5 y_s(0)-B_6 y_s(\phi))
\end{aligned}\right\}\cdots(8)$$

また上式において

$$r_i=\delta_i/l$$

であり，

$$\left.\begin{aligned}
B_1&=\phi(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)/(\sinh^2\phi-\sin^2\phi)\\
B_2&=\phi(\cosh\phi\sin\phi-\sinh\phi\cos\phi)/(\sinh^2\phi-\sin^2\phi)\\
B_3&=\phi^2(\sinh^2\phi+\sin^2\phi)/(\sinh^2\phi-\sin^2\phi)\\
B_4&=2\phi^2\sinh\phi\sin\phi/(\sinh^2\phi-\sin^2\phi)\\
B_5&=2\phi^3(\sinh\phi\cosh\phi+\sin\phi\cos\phi)/(\sinh^2\phi-\sin^2\phi)\\
B_6&=2\phi^3(\cosh\phi\sin\phi+\sinh\phi\cos\phi)/(\sinh^2\phi-\sin^2\phi)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(9)$$

である。

(7)，(8) 式の $A_1\sim A_4$ を (4)，(5) 式に代入し，

$$M(0)=M_{AB} \qquad -M(l)=M_{BA}$$
$$Q(0)=Q_{AB} \qquad Q(l)=Q_{BA}$$

と表わすと，M_{AB}，M_{BA}，Q_{AB}，Q_{BA} がタワミ角公式である。ここで $M_{BA}=-M(l)$ は B 端のモーメントのタワミ角公式がモーメントの符号と逆符号になっていることを示している。これは一般のタワミ角公式と同じくモーメントの方向について符号を統一したものであって，こうしておけば釣合条件を考える場合に代数的な和をとればよいことになる。セン断力のタワミ角公式はそのまま端点のセン断力を表わすものとしているから，釣合方程式を作る場合，符号を考慮して後記の (25) 式にしたがわねばならない。

したがって，タワミ角公式はそれぞれ次のように求まる。

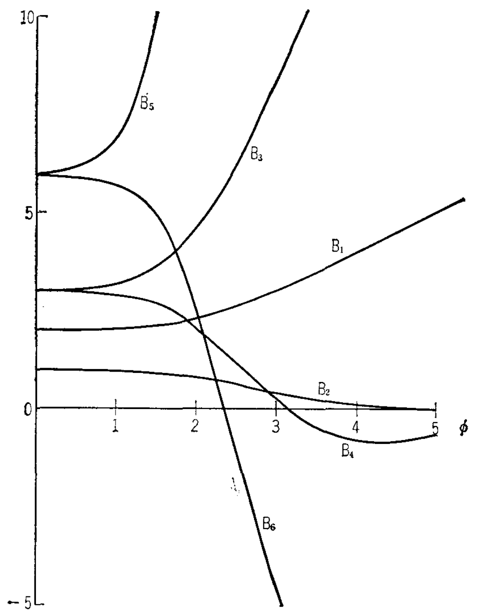
$$\left.\begin{aligned}
M_{AB}&=2EK(B_1\varphi_A+B_2\varphi_B+B_3 r_A-B_4 r_B)-C_{AB}\\
M_{BA}&=2EK(B_2\varphi_A+B_1\varphi_B+B_4 r_A-B_3 r_B)+C_{BA}\\
Q_{AB}&=-2E\frac{K}{l}(B_3\varphi_A+B_4\varphi_B+B_5 r_A-B_6 r_B)+S_{AB}\\
Q_{BA}&=-2E\frac{K}{l}(B_4\varphi_A+B_3\varphi_B+B_6 r_A-B_5 r_B)-S_{AB}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(10)$$

ただし，上式中の $K=I/l$ である。

(10) 式中の C_{AB}，C_{BA}，S_{AB}，S_{BA} は荷重項であって (1) 式の特解 $y_s(\xi)$ を用いて次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
C_{AB}&=2EK(B_1\alpha\, y_s'(0)+B_2\alpha\, y_s'(\phi)+B_3 y_s(0)/l\\
&\quad -B_4 y_s(\phi)/l+l\,\alpha^2 y_s''(0)/2)\\
C_{BA}&=-2EK(B_2\alpha\, y_s'(0)+B_1\alpha\, y_s'(\phi)+B_4 y_s(0)/l\\
&\quad -B_3 y_s(\phi)/l-l\,\alpha^2 y_s''(\phi)/2)\\
S_{AB}&=\frac{2EK}{l}(B_3\alpha\, y_s'(0)+B_4\alpha\, y_s'(\phi)+B_5 y_s(0)/l\\
&\quad -B_6 y_s(\phi)/l-l^2\alpha^3 y_s'''(0)/2)\\
S_{BA}&=-\frac{2EK}{l}(B_4\alpha\, y_s'(0)+B_3\alpha\, y_s'(\phi)+B_6 y_s(0)/l\\
&\quad -B_5 y_s(\phi)/l+l^2\alpha^3 y_s'''(\phi)/2)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(11)$$

(10)，(11) 式中の係数 $B_1\sim B_6$ は式 (9) のように表わされるから，地盤係数，ハリの断面形状などにより変化し，それらは ϕ の変化にたいして **図―1** に示すような値をとる。また，



図―1 タワミ角公式係数値グラフ

表―1

荷　　重	$F(x)=a_0$	$F(x)=a_1x$	$F(x)=a_2x^2$	$F(x)=a_3x^3$
C_{AB}	$\frac{a_0l^2}{2\phi^4}(B_3-B_4)$	$\frac{a_1l^2}{2\phi^3}(B_1+B_2-B_4)$	$\frac{a_2l^2}{2\phi^2}(2B_2-B_4+1)$	$\frac{a_3l^2}{2\phi}(3B_2-B+3)$
C_{BA}	$\frac{a_0l^2}{2\phi^4}(B_3-B_4)$	$-\frac{a_1l^2}{2\phi^3}(B_1+B_2-B_3)$	$-\frac{a_2l^2}{2\phi^2}(2B_1-B_3+1)$	$-\frac{a_3l^2}{2\phi}(3B_1-B_3-3)$
S_{AB}	$\frac{a_0l}{2\phi^4}(B_5-B_6)$	$\frac{a_1l}{2\phi^3}(B_3+B_4-B_6)$	$\frac{a_2l}{2\phi^2}(2B_4-B_6)$	$\frac{a_3l}{2\phi}(3B_3-B_5-3)$
S_{BA}	$\frac{a_0l}{2\phi^4}(B_5-B_6)$	$-\frac{a_1l}{2\phi^3}(B_3+B_4-B_5)$	$-\frac{a_2l}{2\phi^2}(2B_3-B_5)$	$-\frac{a_3l}{2\phi}(3B_4-B_6+3)$

$$\lim_{\phi\to 0} B_i$$

を求めればこれらが一般のハリにたいするタワミ角公式の係数値と一致することがわかる。

ハリの一端がヒンジのものや，自由支持のものに対しても同様の操作をすれば，タワミ角公式が求められる。

いま，ハリの $x=l$ 端がヒンジであるとすれば，境界条件は次のようである。

$$\begin{cases}\xi=0 & y=\delta_A \quad \varphi=\varphi_A \\ \xi=l\,\alpha=\phi & y=0 \quad M=0\end{cases}$$

したがって，これから，(2) 式の $A_1\sim A_4$ を決定すれば，この場合には，

$$\left.\begin{aligned}A_1&=l\,r_A+A_1{}'\\A_2&=\frac{\varphi_A}{\alpha}+A_2{}'\\A_3&=-\frac{2}{\alpha^2 l}(D_1\varphi_A+D_2r_A)+A_3{}'\\A_4&=\frac{2}{\alpha^3l^2}(D_2\varphi_A+D_3r_A)+A_4{}'\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(12)$$

で，

$$\left.\begin{aligned}A_1{}'&=-y_s(0)\\A_2{}'&=-y_s{}'(0)\\A_3{}'&=\frac{2}{\alpha^2 l}(D_1\alpha\, y_s{}'(0)+D_2y_s(0)/l\\&\quad -D_4y_s(\phi)/l+D_5y_s{}''(\phi)/l)\\A_4{}'&=\frac{2}{\alpha^3l^2}(D_2\alpha\, y_s{}'(0)+D_3y_s(0)/l\\&\quad +D_6y_s(\phi)/l-D_7y_s{}''(\phi)/l)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

となる。これを用いてタワミ角公式を表わせば，

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=2\,EK(D_1\varphi_A+D_2r_A)-C_{AB}\\Q_{AB}&=-2\,E\frac{K}{l}(D_2\varphi_A+D_3r_A)+S_{AB}\end{aligned}\right\}\cdots(14)$$

である。ただし上式中の係数 $D_1\sim D_3$ および荷重項は次のようである。

$$\left.\begin{aligned}D_1&=\phi(\sin^2\phi+\sinh^2\phi)/(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)\\D_2&=\phi^2(\sin\phi\cos\phi+\sinh\phi\cosh\phi)/\\&\qquad(\sinh\phi\cos\phi-\sin\phi\cos\phi)\\D_3&=2\,\phi^3(\cos^2\phi+\sinh^2\phi)/\\&\qquad(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)\\D_4&=\phi^2(\cosh\phi\sin\phi+\sinh\phi\cos\phi)/\\&\qquad(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)\\D_5&=\phi^2(\cosh\phi\sin\phi-\sinh\phi\cos\phi)/\\&\qquad(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)\\D_6&=2\,\phi^3\cosh\phi\cos\phi/(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)\\D_7&=\phi^3\sinh\phi\sin\phi/(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\left.\begin{aligned}C_{AB}&=2\,EK(D_1\alpha y_s{}'(0)+D_2y_s(0)/l-D_4y_s(\phi)/l\\&\quad +D_5y_s{}''(\phi)/2\,l+l\,\alpha^2y_s{}''(0)/2)\\S_{AB}&=2\,E\frac{K}{l}(D_2\alpha\, y'_s(0)+D_3y_s(0)/l\\&\quad +D_6y_s(\phi)/l--D_7y_s{}''(\phi)/l-l^2\alpha^3y_s{}''(0)/2)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

また，一端が自由支持のハリにたいしても次のような境界条件下で (2) 式の積分定数が決定できる。

$$\begin{cases}\xi=0 & y=r_A \quad \varphi=\varphi_A \\ \xi=l\,\alpha=\phi & M=0 \quad Q=0\end{cases}$$

これから，この場合の $A_1\sim A_4$ は

$$\left.\begin{aligned}A_1&=lr_A+A_1{}'\\A_2&=\frac{\varphi_A}{\alpha}+A_2{}'\\A_3&=-\frac{2}{\alpha^2 l}(D_1\varphi_A+D_2r_A)+A_3{}'\\A_4&=\frac{2}{\alpha^3l^2}(D_2\varphi_A+D_3r_A)+A_4{}'\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(17)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}A_1{}'&=-y_s(0)\\A_2{}'&=-y_s{}'(0)\\A_3{}'&=\frac{2}{\alpha^2 l}(D_1\alpha\, y_s{}'(0)+D_2y_s(0)/l\\&\quad +D_4y'''(\phi)/2\,l-D_5y_s{}''(\phi)/l)\\A_4{}'&=-\frac{2}{\alpha^3l^2}(D_2\alpha y_s{}'(0)+D_3y_s(0)/l\\&\quad +D_5\alpha\, y_s{}'''(\phi)-D_6y_s{}''(\phi)/l)\end{aligned}\right\}\cdots(18)$$

となる。これを用いれば，一端自由支持の材にたいするタワミ角公式を次のように求めることができる。

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=2\,EK(D_1\varphi_A+D_2r_A)-C_{AB}\\Q_{AB}&=-2E\frac{K}{l}(D_2\varphi_A+D_3r_A)+S_{AB}\end{aligned}\right\}\cdots(19)$$

ただし，この場合の係数および荷重項は次のようである。

$$\left.\begin{aligned}D_1&=\phi(\sinh\phi\cosh\phi-\sin\phi\cos\phi)/(\cosh^2\phi+\cos^2\phi)\\D_2&=\phi^2(\sinh^2\phi+\sin^2\phi)/(\cosh^2\phi+\cos^2\phi)\\D_3&=2\,\phi^3(\sinh\phi\cosh\phi+\sin\phi\cos\phi)/\\&\qquad(\cosh^2\phi+\cos^2\phi)\\D_4&=\phi^2(\cosh\phi\sin\phi+\sinh\phi\cos\phi)/\\&\qquad(\cosh^2\phi+\cos^2\phi+\cos^2\phi)\\D_5&=\phi^2\cosh\phi\cos\phi/(\cosh^2\phi+\cos^2\phi)\\D_6&=\phi^3(\cosh\phi\sin\phi-\sinh\phi\cos\phi)/(\cosh^2\phi+\cos^2\phi)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$$\left.\begin{aligned}C_{AB}&=2\,EK(D_1\alpha y_s{}'(0)+D_2y_s(0)/l\\&\quad +D_4y_s{}'''(\phi)/2\,l-D_5y_s{}''(\phi)/l+l\,\alpha^2y''(0)/2)\\S_{AB}&=2\,E\frac{K}{l}(D_2\alpha\, y_s{}'(0)+D_3y_s(0)/l\\&\quad +D_5\alpha\, y_s{}'''(\phi)-D_6y_s{}''(\phi)/l-l^2\alpha^3y'''(0)/2)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

このようにして弾性床上のハリのタワミ角公式が求まったが，各場合の係数 $A_1\sim A_4$ を (2)～(5) 式に適用すれば任意点のタワミ，タワミ角，モーメント，セン断力は全て求まる。

次に，簡単な関数形にたいする荷重項を表わす。

いま，

$$\left.\begin{aligned}F(x)_1&=a_0\\F(x)_2&=a_1x\\F(x)_3&=a_2x^2\\F(x)_4&=a_3x^3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

とすれば，(6) 式から (1) 式の特解はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}y_s(\xi)_1&=a_0/k\\y_s(\xi)_2&=a_1\xi/k\,\alpha\\y_s(\xi)_3&=a_2\xi^2/k\,\alpha^2\\y_s(\xi)_4&=a_3\xi^3/k\,\alpha^3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

である。したがって (23) 式とその高次導関数を (2) 式，(11) 式，(16) 式などに代入すれば求める荷重項が得られる。

(22) 式で表わされる荷重分布にたいし (11) 式の C, S を求めたものを **表—1** に示した。

なお，ここで荷重を表わす関数として (22) 式のような簡単な場合のみを取り扱ったが，荷重形が有理整式で近似できる場合にはいずれの場合にも (6) 式によっては特解が求まるから荷重項は決定できる。しかし，一般に簡単な荷重分布でも全分布区間について単一の多項式で表わしにくい場合が多く，そのような荷重形にたいする荷重項を求めることが必要となる。。ここではその操作は解法に含めることにする。すなわち，独立したハリ構造を解く場合であれば，荷重を (22) 式で表わすよう分割し，各区間から成る連続バリとみなしてそれぞれの区間にタワミ角公式を適用する。ラーメン構造のように，一つの部材にたいし一つのタワミ角公式が与えられているほうが便利であれば，あらかじめ分割した区間にたいする釣合方程式を解き，接合部の φ，r を消去して，端点の M，Q を端点の φ，r のみで表わすようにすればよい。

(2) 釣合方程式

釣合方程式は一般に

$$\Sigma H=0,\ \Sigma V=0,\ \Sigma M=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

を満足すればよい。$\Sigma H=0$ は水平方向力の釣合方程式，$\Sigma V=0$ は垂直方向力の釣合方程式であり，$\Sigma M=0$ はモーメントの釣合方程式である。

垂直方向力の釣合方程式は各階で柱に伝達される軸方向力を N_r とすれば，最下層では次のようになる。

$$N=\sum_{r=1}^{a}N_r$$

ただし，a は層の数を示す。

したがって，セン断力のタワミ角公式を用いて，

$$Q_{m,m-1}-Q_{m,m+1}=N_m\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

と表わすことができる。上式中 m は軸力 N_m が作用する点を表わし，$m-1$，$m+1$ はそれぞれ m の左側，右側の節点を示すものである。

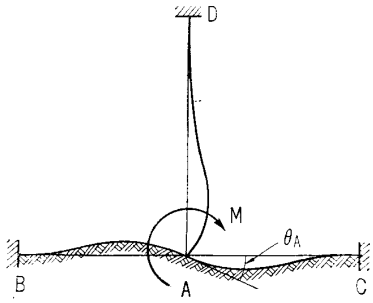
3. モーメント分配法による解法

タワミ角公式が求まれば，ハリの組合わせ構造を解くにはそれを適用し，多元連立方程式を解くことになる。

ラーメン構造が複雑な場合には，電子計算機を使用すればよいが，簡単で系統的な実用解法も時には必要である。ここではモーメント分解法の基本的方法の適用[3),4)]について簡単に述べておく。

(1) モーメント分配率および伝達率

図—2 の節点 A に M なるモーメントが作用したものとすれば，モーメントの釣合条件から次のようにモーメント分配率を決定できる。

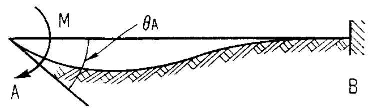


図—2

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=MB_1K_{AB}/(B_1K_{AB}+B_1'K_{AC}+2\,K_{AD})\\M_{AC}&=MB_1'K_{AC}/(B_1K_{AB}+B_1'K_{AC}+2\,K_{AD})\\M_{AD}&=M\,2\,K_{AD}/(B_1K_{AB}+B_1'K_{AC}+2\,K_{AD})\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

ただし，B_i，B_i' はそれぞれ AB，AC 区間のハリにたいするタワミ角公式の係数を表わす。

また，図—3 のような材端条件にたいするモーメント伝達率は，



図—3

$$C_d=\frac{B_1}{B_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

である。

(2) 適用の操作

① 節点移動を拘束した状態のモーメントを分配法の手順にしたがって求める。

② 節点移動のない状態の支点反力を求める。

これは (10) の各式において $r_i=0$ の状態である。したがって，それらから φ_A，φ_B を消去し Q と M の関係を求めれば，

$$\left.\begin{aligned}Q_{AB}&=(fM_{BA}-bM_{AB})/l\\Q_{BA}&=(bM_{BA}-fM_{AB})/l\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

となる。ただし，$b=(B_1B_3-B_2B_4)/(B_1{}^2-B_2{}^2)$，$f=(B_2B_3-B_1B_4)/(B_1{}^2-B_2{}^2)$。(28) 式と (25) 式とを用いれば支点反力は求まる。

③ 各節点に順次単位の沈下を起こした状態でのモーメントを求める。

④ ③を起こすに必要な節点荷重を求める。

⑤ ②と④から実際に生ずる r を求める。

④で求めた節点荷重を H とすれば，m 点に生ずる r_m は②の支点反力を N とすれば，

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = r_1 H_{11} + r_2 H_{21} + \cdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ N_m = r_1 H_{1m} + r_2 H_{2m} + \cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

なる連立方程式を解いて求められる。ただし，上式中 H_{nm} は n 点の $\Delta r=1$ により m 点に生ずる力を示している。

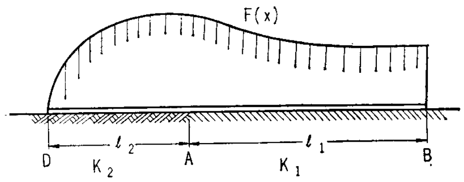
⑥ 節点移動によるモーメントを求める。

⑦ ①と⑥から全体のモーメントを求める。

4. 弾性床上のハリの解法

弾性床上のハリの解には，(10)，(14)，(19) などの諸式をそのまま適用すればよい。こういった種類の構造物では断面形状が変化したり，地盤の性質が変化したりすることや，また **2**. の荷重項のところで述べたような解法上の便宜から，単一の区間からなるものでなく，多くの区間からなる，すなわち連続バリとみなしうる場合が多い。これを解く一般的な方法では，各接合点にて，タワミ，タワミ角，モーメント，セン断力の四つにつき，それぞれの連続条件が必要であって，n 区間に分割されるものとすれば $4n$ 元の連立方程式を解き，(2) 式の積分定数を決定することになる。一方，タワミ角公式を用いて解く場合には，各接合点でモーメント，セン断力の釣合条件を考えればよく，したがって $2n$ 元の連立方程式を解き φ，r を求めて積分定数を決定する。

この解法については普通のとおりるであるから，ここでは一例をあげるにとどめておく。



図—4

両端自由支持のハリが長さ方向に2区間に分けて考えられる異なった地盤係数をもつ地盤上にあるものとすれば，(19)式のタワミ角公式をそれぞれの区間に適用して釣合方程式を作り，次のような連立方程式を得る。

$$\left.\begin{array}{l} 2EK_1\{(D_1+\nu D_1')\varphi_A-(D_2-\nu D_2')r_A\} \\ \qquad = C_{AD}-C_{AB} \\ 2EK_1\{(D_2-l\nu D_2')\varphi_A-(D_3+l\nu D_3')r_A\} \\ \qquad = l_1(S_{AB}-S_{AD}) \end{array}\right\}$$

ただし，$\nu=K_2/K_1$，$l=l_1/l_2$ とし，K_2，l_2，($'$) は AD 区間の係数値を表わす。他の記号は全て **2**. のものにしたがう。これから

$$\varphi_A=\{(D_3+l\nu D_3')(C_{AD}-C_{AB})$$
$$\qquad -l(D_2-\nu D_2')(S_{AB}-S_{AD})\}/2EKL$$
$$r_A=\{l_1(D_1+\nu D_1')(S_{AB}-S_{AD})$$
$$\qquad -l(D_2-l\nu D_2')(C_{AD}-C_{AB})\}/2EKL$$

ただし，

$$L=(D_1+\nu D_1)(D_3+l\nu D_3')$$
$$\qquad -(D_2-\nu D_2')(D_2-l\nu D_2')$$

となる。これを (17)，(18) 式に代入し A_1～A_4 を求めれば (2)～(5) 式によってタワミや断面力が求まる。なお，この例題を普通に解けば，8元連立方程式を解くことになる。

5. クイの曲げ応力解析

クイの曲げ応力を解析するには，チャン (Chan) の方法が用いられる。これは (1) 式の同次解を求めたものである。ここでは (14)，(19) 式などをクイの解析に適用するが，クイは上部構造と関連して存在する場合が多く，クイ頭の挙動に注目すれば，タワミ角公式を用いると考察が容易である。いま，クイを有限長のものとして考えれば，下端の支持条件は複雑である。したがってまず，下端の支持条件がクイ頭の挙動に影響を与える範囲を考える。半無限長を有するハリ，すなわち，原点から $x>0$ なる全域に存在するハリのタワミ角公式を求めると，

$$\left.\begin{array}{l} M_0=2EI(\alpha\varphi_0+\alpha^2\delta_0) \\ Q_0=-2EI(\alpha^2\varphi_0+2\alpha^3\delta_0) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

である。一方，(14)，(19) 式は

$$M_0=2EK(D_1\varphi_0+D_2r_0)$$

$$Q_0=-2E\frac{K}{l}(D_2\varphi_0+D_3r_0)$$

であるから，それぞれの係数を比較すれば，

$$D_1/l,\ D_2/l^2,\ D_3/l^3 \fallingdotseq \alpha,\ \alpha^2,\ 2\alpha^3$$

の範囲においては，クイの長さの影響は無視しうる。(15)，(20) 式を考えて，

$$D_1/\phi,\ D_2/\phi^2,\ D_3/\phi^3 \to 1$$

なる条件は

$$\frac{\sin^2\phi,\ \cos^2\phi,\ \sin\phi\cos\phi}{\sinh^2\phi,\ \cosh^2\phi,\ \sinh\phi\cosh\phi}=\varepsilon \ \cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

とすれば，この ε が 1 に比べて十分小なる範囲を考えればよく，これを

$$\varepsilon \leqq 0.1 \sim 0.01$$

程度の値を考えるものとすれば，(31) 式から

$$\phi=\alpha l \geqq 2 \sim 4$$

となる。したがって，$\alpha l \leq 4$ ではクイ頭の挙動は長さの影響をうけることになる。また，この場合において，上端が水平変位にたいして拘束されたクイの曲げと角変位の関係は，(14)，(19) 式から

$$M_0=2EKD_1\varphi_0$$

であり，上端が曲げにたいして拘束されたクイの水平力と水平変位の関係は，

$$H_0=2EKD_3y_0/l^2$$

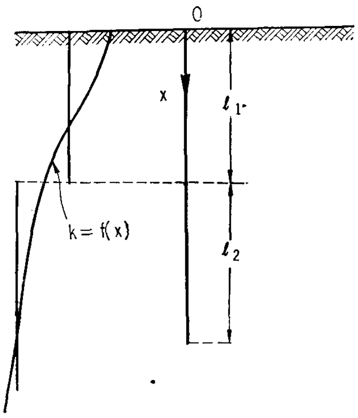
となる。すなわち短グイではチャンの解より $D_1/l, D_3/l^3$

だけ異なった値になる。さらに，クイ頭の水平変位量，角変位量はクイ頭に作用する水平力，モーメントによって

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= l(D_1 l H_0 - D_2 M_0)/2EK(D_1 D_3 - D_2^2) \\ \varphi_0 &= (D_3 M_0 - D_2 l H_0)/2EK(D_1 D_3 - D_2^2) \end{aligned}\right\} \cdots(33)$$

となる。ただし，上式中の H_0 はクイ頭に作用する水平力を表わし，$y>0$ なる変位を起こさせる方向に作用するものを（＋）にとる。他の記号は全て **2.** にしたがうものとする。

また，地盤係数 k は一般に深さ方向に変化することが考えられる。その影響を解に導入するため，この変化を階段的な変化におきかえて考えれば，いくつかの区間からなる連続バリと考えられる。したがって，それぞれの区間にタワミ角公式を適用して解けばよい。しかし，上部構造と関連して解くためには，階段的変化を表わした一つのタワミ角公式をあらかじめ求めておくことが望ましい。これには，上部区間に (10) 式，下部区間に (14) または (19) 式を用いて接合点における φ，r を消去し，上端におけるタワミ角公式を修正すればよい。



図—5

変化が2区間で表わされる場合につき，このようにして求まったタワミ角公式を示せば

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 2E_1K_1(J_1\varphi_0 + J_2 r_0) \\ Q_0 &= -2E_1\frac{K_1}{l_1}(J_3\varphi_0 + J_4 r_0) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

となる。ただし，E_1, K_1, l_1 はそれぞれ上部区間の値を表わし，l_2 は下部区間の長さ，B, D はそれぞれ (10) および (14) または (19) 式の係数を表わしており $r=E_2I_2/E_1I_1$ とすれば

$$J_1 = B_1 + m_1 B_2 - m_2 B_4$$
$$J_2 = B_3 + m_3 B_2 - m_4 B_4$$
$$J_3 = B_3 + m_1 B_4 - m_2 B_6$$
$$J_4 = B_5 + m_3 B_4 - m_4 B_6$$

であり，

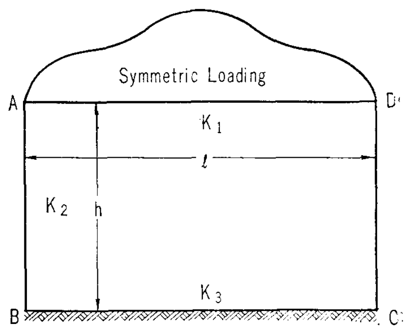
$$m_1 = hl_2\{B_2(B_5 l_2^3 + r D_3 l_1^3) - B_4 l_2(B_3 l_2^2 - r D_2 l_1^2)\}$$
$$m_2 = hl_2^2\{B_2(B_3 l_2^2 - r D_2 l_1^2) - B_4 l_2(B_1 l_2 + r D_1 l_1)\}$$
$$m_3 = hl_2\{B_4(B_5 l_2^3 + r D_3 l_1^3) - B_6 l_2(B_3 l_2^2 - r D_2 l_1^2)\}$$
$$m_4 = hl_2^2\{B_4(B_3 l_2^2 - r D_2 l_1^2) - B_6 l_2(B_1 l_2 + r D_1 l_1)\}$$
$$h = 1/\{(B_3 l_2^2 - r D_2 l_1^2)(B_3 l^2 - r D_2 l_1^2) - (B_1 l_2 + r D_1 l_1)(B_5 l_2^3 + r l_1^3 D_3)\}$$

である。

区間の多い場合には最下部の2区間から順に上部に同じ操作を繰返せば上端の φ，r によるタワミ角公式は求まるが，これは (34) 式の係数 J の D の項を順次それより下の部分の J でおきかえていくことになる。

6．ラーメン構造にたいする適用

この項では，簡単な例にタワミ角公式を適用して基礎式について考察する。例として任意の対称荷重をうけるボックス型ラーメンを考える。



図—6

対称性を考えて (10) 式を適用すれば，

$$\left.\begin{aligned} (\nu_1+2)\theta_A + \theta_B &= C_{AD} - C_{AB} \\ \theta_A + (2+\nu_2\beta_1)\theta_B + \nu_2\beta_2 R_B &= C_{BA} \\ \nu_2\beta_2\theta_B + \nu_1\beta_3 R_B &= Vl \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(35)$$

なる連立方程式ができる。

ただし，$\nu_1 = K_1/K_2$，$\nu_2 = K_3/K_2$，$K_2 = 1$ とし，$\beta_1 = (B_1 - B_2)$，$\beta_2 = (B_3 - B_4)$，$\beta_3(B_5 - B_6)$，$\theta_i = 2E\varphi_i$，$R_i = 2Er_i$ であって，V は B 点に作用する垂直力である。

これを解き A 点，B 点のモーメントを求めれば，

$$\left.\begin{aligned} M_A =& \Bigl(\nu_1\frac{\beta_2}{\beta_3}Vl - \Bigl(2\nu_2\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_3}+3\Bigr) \\ &\cdot\Bigl(C_{AD} - \nu_1\Bigl(2+\nu_2\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_3}\Bigr)C_{AB} - \nu_1 C_{BA}\Bigr)\Bigr/ \\ &\Bigl/\Bigl((\nu_1+2)\Bigl(2+\nu_2\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_3}\Bigr)-1\Bigr) \\ M_B =& \Bigl\{\nu_2\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_3}(C_{AD}-C_{AB}) - (2\nu_1+3)\frac{\beta_2}{\beta_3}Vl \\ &-(\nu_1+2)\nu_2\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_2}C_{BA}\Bigr\}\Bigr/ \\ &\Bigl/\Bigl((\nu_1+2)\Bigl(2+\nu_2\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_3}\Bigr)-1\Bigr) \end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

となる。

上式に含まれる係数は地盤の性質，ハリの断面形状によって変化するが，まず $\phi\to 0$ なる状態についてその挙動をみれば

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\phi\to 0}\frac{\beta_2}{\beta_3} &= \frac{1}{6} \\ \lim_{\phi\to 0}\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_3} &= 1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

となる。この時には (36) 式は

$$\left.\begin{aligned} M_A =& \Bigl(\frac{\nu_1}{6}Vl - (2\nu_2+3)C_{AD} - \nu_2(2+\nu_2)C_{BA} \\ &-\nu_1 C_{BA})/((\nu_1+2)(\nu_2+2)-1) \end{aligned}\right.$$

$$M_B=(\nu_2(C_{AD}-C_{AB})-(2\nu_1+3)\frac{Vl}{6}-(\nu_1+2)\nu_2C_{BA})/((\nu_1+2)(\nu_2+2)-1) \quad \cdots\cdots(38)$$

となる。

いま，反力を等分布と考えれば対称荷重にたいしては，

$C_{BD}=Vl/6$

となることは容易にわかる。したがって，これは反力を上載荷重と釣合う等分布と仮定した解となっていることがわかる。

次に，$\phi\to\infty$ の場合については

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\phi\to\infty}\frac{\beta_2}{\beta_3}=0\\&\lim_{\phi\to\infty}\frac{\beta_1\beta_3-\beta_2^2}{\beta_3}=\infty\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(39)$$

となり，これから (36) 式は

$$\left.\begin{aligned}M_A&=\frac{2C_{AD}+\nu_1C_{AB}}{\nu_1+2}\\M_B&=\frac{C_{AD}-C_{AB}-(\nu_1+2)C_{BA}}{\nu_1+2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(40)$$

となり，これは両脚固定の門型ラーメンの解となっている。これらのことから次のような考察ができる。

$\phi\to0$ またはそれに近い状態では R が非常に大きくなる。すなわち，構造物全体の剛体的変位が大で，そのためハリの弾性変形による反力の変化分が相対的に小さくなり，ハリの長さ方向についての反力の変化が少なく，直線的な反力分布を示す。ここで (9) 式の変化や，(37) 式の変化状態を見ると，

$0\leq\phi\leq1$

においてそれぞれの値は一定であるから，上の状態が起こる範囲は

$$k\leq4\,EI/l^4 \quad \cdots\cdots(41)$$

と考えられる。したがって，ハリの形状と地盤係数の間に (41) 式の関係が成立すれば，構造および荷重条件が複雑であっても，反力分布は適当な直線分布で近似しうる。

一方，$\phi\to\infty$ の状態はハリの剛性に比べて地盤の剛性が相対的に大になることを意味し，構造物全体の剛体的変位は拘束され，ハリの弾性変形も $\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{k}{EI}y=0$ で表わされるハリの性質から完全に拘束された状態となる。したがって，両脚固定の門型ラーメンの解となる。なお，この場合にはウィンクラーの仮定からハリにたいする地盤の反力は発生せず，上下方向の力の釣合は柱部材の軸方向力によって成立しているものと考えねばならない。

7. むすび

この報文で求めた結果をまとめると次のようである。

(1) 異なった材端条件をもつ三つのタワミ角公式を示した。

(2) タワミ角公式は弾性床上のハリ一般を解くのに用いれば便利である。

(3) クイの曲げ応力解析に適用してみると $l\leq4/\alpha$ 程度において短グイの性質があらわれることをこの解は示している。これは実験結果を参照していわれる根入れ長 $l\fallingdotseq5/\alpha$ と比較していくぶん小さめである。

(4) 地盤の性質の違いによって示される解の性質をみれば，

$k<4\,EI/l^4$

では，反力は直線分布で近似される。また，k が大きくなればかえって結果的にみればハリが空間に固定された剛体ハリのような状態を示すことになる。

以上であるが，ここではあくまでもウィンクラーの仮定が成立するものとして考えものである。しかし，ウィンクラー型地盤にはよく知られた欠点があって必ずしも実際の地盤の挙動を表わしているとはいえない。ウィンクラー型地盤のもつ第1の欠点，すなわち等分布載荷すれば等変位が起こる，という点を改良するためにパスターナクはウィンクラー型地盤モデルにセン断層を表わす要素を加えてパスターナク型地盤モデルを作っている[5]。これによると地盤上におかれたハリにたいする基礎方程式は

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}-G\frac{d^2y}{dx^2}+ky=f(x)$$

となるので，取扱いも比較的簡単であって，より実際に近い挙動を与える解が求まるから，必要に応じてこの基礎方程式の解を用いればよいであろう。

参考文献

1. H.W. Stolle "Zur Berechnung von Rohmentragwerken, dreren Träger elastisch gebettet sind" Die Bautechnik 37 Jar. Heft 5, Mai 1960
2. 沢田，長谷川，農業土木大会京都支部講演集 昭37年9月
3. 沢田，長谷川，農業土木大会講演集 昭38年
4. J. Penzien "Discontinuity Stresses in Beam on Elastic Foundation" Jor. of A.S.C.E. Vol. 86, ST. 4 Apr. 1960
5. A.D. Kerr "Elastic and Viscoelastic Foundation Models" Jor. of A.S.M.E., Vol. 31, SerE, No. 3 Sept. 1964

(原稿受付，1965.6.8)

※ ※ ※