

動的解析における地盤の考え方

やま
山はら
原ひろし
浩*

1. はじめに

最近“動的解析”という言葉が流行している。これは構造物が地震力や機械力のように時間的に変化する力を受けたとき、その挙動を動的に求めようとするものである。構造物はすべて地盤に接しているため、構造物の振動現象を考えると、地盤の効果を全く無視するわけにはいかない。その結果、最近地盤の動的解析に関する一般の関心が急速に増してきた。実は、地盤の動的解析に関する研究は案外古くから行なわれ、今日まで非常に多くの研究が発表されてきた。そのような既往の研究や考え方が、さまざまな著書に無秩序にしかも断片的に引用され、それがかえって一般の設計者を困惑させる結果になっている。一見無秩序に見えるこの分野の研究も、歴史的に見れば一つの大きな流れに沿って動いてきた。また今日なお一つの方向に向かって動きつつあり、現在完成されたものとして理論的体系化される段階には至っていない。まず既往の研究を参考に前に、こうした“考え方”の歴史的変遷を大雑ぱにでも理解しておかねばならない。

つぎに現実の問題として、さまざまな構造物を地盤の効果をも含めて解析したいという要求が、最近とくに強まってきている。そのような時代の要求にこたえるためには、少しでも新しい研究の中から実用的方法が開発されていなくてはならない。

そこで本報文においては、地盤の動的解析に関する考え方の歴史的変遷と、そこから派生する実用的方法について論ずることにした。とくに実務に携わる設計者の便宜を考え、繁雑な理論的過程はできるだけ省き、実用性に重点をおくことにした。

2. 地盤の動的解析に関する考え方の変遷

地盤をなんとか理論的にとらえ、計算にのせようとする試みは案外古くからあり、すでに 1934 年頃から各種の研究が発表されている⁽¹⁾。当初は機械基礎などの設計の要求から、この分野の研究が始まった。まず最初の試みは、地盤を“質量のないバネ”に考え、基礎の単位面

積当たりのバネ定数を“地盤係数”と呼ばれた⁽²⁾。この方法は実用面ではもっぱら機械基礎の防振設計に応用され、それまではただ直感にたよっていた設計から考える設計に転換した。このように定義された地盤係数の値は実験によって求めるほかなく、そのため試験基礎や実在建物の振動から地盤係数を求める研究が盛んに行なわれた^{(3)~(6)}。かくして土質の種類、強度、標準貫入試験の N 値などに関連づけて、地盤係数のおよその値を推定することが可能になった。

このようにして地盤のバネ特性を一応理論にのせることができるようになったが、地盤の減衰特性については当時全く見当がつけられなかった。そこで地盤の減衰特性に代り、基礎とともに運動する土ということで“付加質量”という概念が導入された⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。実はこの付加質量という概念もはなはだあいまいで、さまざまな条件において実験的に求めざるを得なかった。このように地盤係数と付加質量という概念を考えることによって、地盤の動的性質に関する研究はむしろ実験的に進められてきた。その結果地盤を含めた構造物の基本振動数だけは、実用精度においてなんとか算定できるようになった。とくに機械基礎などにおいて共振を避けた設計が可能になったことは、実用面での成果として高く評価される。

以上の方法は地盤のある性質を仮定し、それを実験的に求めようとしたのに対し、これとは別に地盤を半無限弾性体として弾性論を使って純理論的に解析する研究が、1936 年頃から始められた。地盤はもともと完全な弾性体ではない。また自然の地盤は性質の異なる多くの地層がときには不規則に重なり合い、決して均質な半無限体とはいえない。しかし静的な力に対してはむしろ塑性的な性質を示す地盤も、変化する速度の速い動的な力に対してはむしろ弾性体としての性質を示す。このような事実は、実験的にも立派に証明されてきた。また地表面におかれた基礎の振動を論ずるとき、基礎幅の 2 ないし 3 倍より深い部分の影響をほとんど受けなくなる。したがって地盤を近似的に半無限体と見なして大きな矛盾はない。そこで理論的取扱いをできるだけ簡略にするため、地盤を“等方等質な半無限完全弾性体”という、いわゆる“理想地盤”として仮定された。

* 清水建設研究所

まず 1936 年に、円形基礎に上下動の調和波形振動を作用させたときの解が発表され、この分野の研究の口火を切った⁽¹⁰⁾。つづいて水平動、回転動さらにネジ（振）り動といった振動モードに関する理論解がつぎつぎに発表された^{(11)~(15)}。この種の研究では、地表面におかれた質量のない円形基礎について接地圧分布を仮定し、その接地圧分布による基礎中心の変位を動的な問題として解析するものである。したがって仮定する接地圧分布の違いによって、結果はいちじるしく変わってくる。接地圧分布として今日まで、図—1 に示すような 3 つのパターンが考えられてきた。

1950 年代の後半になると、円形基礎からク（矩）形基礎へと発展し、いくつかの解が発表された^{(16)~(18)}。かくして約 30 年間続いたこの分野の研究も、理想地盤の線形解として一応完成されるに至った。

これら一連の研究では、動的変位に関する最終解を、次のような形で表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{円形基礎} \quad u = \frac{F}{a\mu} [f_1 + if_2] \\ \text{ク形基礎} \quad u = \frac{F}{\pi^2 bc \mu} [f_1 + if_2] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

式 (1) において $[f_1 + if_2]/a\mu$, $[f_1 + if_2]/\pi^2 bc \mu$ に相当する項をグラウンドコンプライアンス (Ground compliance) と呼ばれ、ちょうど剛性 (Stiffness) の逆数の次元をもっている。グラウンドコンプライアンスが複素数で表わされているということは、基礎が受ける力の中に、外力 F に対して同じ位相の成分と 90° 位相が進んだ成分があるということになる。前者がいわゆるバネによる復元力に相当し、後者が減衰力に相当する。この場合の減衰力は、振動のエネルギーが波動として絶えず地中に逃げることに起因する。そこでこのような減衰を、一般に“地下逸散減衰”と呼んでいる。

以上簡単に述べたように、地盤の動的解析に関する研究は、地盤係数にもとづく実験的な研究と、理想地盤による解析的研究がほぼ並行して進められ、わが国ではこの約 10 年間むしろ後者が主流になって、関連した幾多の研究が発表されてきた。

さて既往の研究では、地盤は完全な弾性体として扱われてきた。その結果地盤は線形のパネにおきかえられ、履歴による減衰は無視されてきた。また粘性減衰も地下逸散減衰に比べていちじるしく小さいという理由で、全く無視されてきた。このような考え方は比較的微小変位における挙動を論ずる場合には実用上問題ないが、比較的大きな変形までを考えるとときには問題になるであろう。地盤はもともと弾性体としての性質を備えている反面、塑性体としての条件をも備えている。その復元力特性はかなり非線形的であり、変形が大きくなればむしろ

弾塑性的特性を示す。したがって線形理論としてはほぼ完成された今日の地盤動力学論も、考える変形の領域をさらに拡大し、非線形的あるいは塑性的効果をいかに理論として定着させるかが、今後の研究の方向になるのではないだろうか。

3. 地盤の動的解析に関する方法の選択と実用化

地盤の動的解析法の研究は過去すでに約 30 年間以上も続けられてきたが、今日なお幾多の問題点を残し研究の過程にあるといえる。しかし現実には機械基礎の振動計算や、構造物の地震応答計算において、地盤の効果をなんらかの形で理論に組込むことが要求される。そこでわれわれは、不完全ながらも既往の研究による成果をできるだけ吸収し、実際の構造物の設計に活用しなくてはならない。

地盤係数、付加質量にもとづく考え方は、工学的には非常に理解しやすいのであるが、すべて経験的なものに依存するので、かなり個人差を生ずる。とくに地盤のパネ定数が、基礎の面積に比例するという仮定に問題がある。理想地盤による理論解では、地盤のパネ定数は基礎の面積の平方根に比例する。さらに地盤の減衰効果については全くよりどころがないので、変位計算においてはかなりあいまいなものになってしまう。

地盤を半無限完全弾性体とする理想地盤による解析法によれば、上記の問題点は一応解消するが、新たに次のような難題に当面する。

1) 理想地盤による解析では、接地圧の分布を Fourier-Bessel 積分で表わし、それを境界条件に用いている。そのためグラウンドコンプライアンスに関する計算が非常にむづかしく、一般の技術者のレベルでは容易ではない。

2) もしグラウンドコンプライアンスの素子 f_1 , f_2 があらかじめ計算され、それが図表によって示されたとしても、それらが振動数の関数になっているので、地震応答のように振動数特性が一様でない場合には、そのままでは適用できない。

このような 2 つの事情から、理想地盤による既往の研究は、理論的にはすぐれたものでありながら、実用面ではほとんど利用されてこなかった。そこで、なんとかしてこの方法を実用化することが、かねてからの課題であった。そのためには理想地盤による解析法の基本的なものとはできるだけ保存し、かつ計算を簡略化すると同時に、地盤の振動素子（パネ定数と減衰係数）を振動数に無関係な定数として与えることである。その一つの方法として筆者の研究⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾を次章以降に紹介し、本論文の主題に代えることにした。

さて理想地盤による解析法では、地盤の性質としてラメの定数 μ とポアソン比 ν が必要になる。ここで μ は剛性率（一般に G で表わす）と全く同じものであり、地盤を弾性体とすれば、その密度 ρ と横波速度 V_s との間に次の関係がある。

$$\mu = \rho V_s^2 \dots \dots \dots (2)$$

ポアソン比 ν は、もし地盤が理論解析において仮定しているように“等方等質の完全弾性体”であれば

$$\nu = 0.25 \dots \dots \dots (3)$$

である。しかし自然の地盤のポアソン比は、岩盤のように比較的等方等質の条件に近い場合には $\nu = 0.25$ に近くなるが、一般の測定値では $\nu > 0.25$ になる。一般に圧縮応力が加わったとき体積が膨張することはないので、ポアソン比は必ず $\nu < 0.50$ となる。実際に粘土地盤のように非圧縮性に近い条件を備えているものは、 $\nu = 0.50$ に近くなる。したがって自然の地盤のポアソン比は、 $0.25 < \nu < 0.5$ の範囲に分布し、その結果バネ定数値に最大 12.5%（水平）から 25%（上下、回転、ネジリ）の誤差を与えることになる。このような誤差は実用的には大したことはないが、ポアソン比を使って横波速度 V_s から縦波速度 V_p を求めるときには注意しなくてはならない。すなわち V_s と V_p との間には完全弾性体の場合、

$$V_p/V_s = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} \dots \dots \dots (4)$$

なる関係がある。もし非圧縮性の場合、 $\nu = 0.50$ とすることによって V_p が無限大になるか V_s が 0 になる。したがって弾性計算において、ポアソン比が 0.50 に近いからといってこれを $\nu = 0.50$ とおくと、解が不定になることがあるから注意を要する。

以上のように理想地盤による解析法では、結局、地盤の性質として密度 ρ 、横波速度 V_s 、それにポアソン比 ν の 3 つが必要になる。密度 ρ については全く問題はないが、横波速度 V_s とポアソン比 ν の推定にやや問題がある。この点地盤係数による方法とも共通した難点であるが、地盤係数の推定は全く経験的であるのに比べて、 V_s や ν の推定はかなり客観的に決めることができる。したがって個人差や経験量の多少による誤差は少なくなる。 V_s の値は弾性波試験などによって直接求めることができるし、 V_s と V_p を同時に測定すれば式 (4) によって ν の値を換算することができる。

しかし弾性波試験を行なうには高価な設備と、ある程度の熟練を要するうえ、試験地盤の周囲の条件にもいろいろと制約がある。したがって設計のたびに手軽に行なえるといった簡単なものではない。そこで実際の設計や計算に当たっては、 V_s と ν の値を既往の実験的資料にもとづいて推定することになる。 V_s の値に関しては、各種の地盤について行なった過去の実測資料が比較的豊

富にあるから、それらを参考にしてボーリング調査資料などから大過なく推定できる。参考までに筆者らが公団アパートの固有周期から逆算して求めた V_s 値を、第 7 章に示しておいた。

ν の値に関しては、バネ定数の算定に関する限りその影響が少なく、理論解析において等方等質の仮定を設けているのであるから、地質条件のいかにかわらず $\nu = 0.25$ とすることを推奨したい。比較的大きな変形による静的な力学試験から得られたポアソン比の値が、そのまま微少な動的な変位に当てはまるとはかぎらない。土の動的性質を表わすのに、 V_s と ν という比較的是っきりしない 2 つの量を用いることは、その組合せによってますます複雑になる。そこで ν の方は 0.25 に固定し、それによる誤差を補足する意味で V_s の値を考えれば、むしろ実用的であり間違いも少ない。

以上のようにして、地盤を理想地盤と仮定すれば、その性質は実用的には V_s の値だけで表わすことができる。その結果、地盤のバネ特性と地下逸散による減衰特性だけは理論的に定めることができる。しかしあくまでも地盤が完全弾性体という前提に立っているので、履歴現象による減衰や粘性減衰は無視することになる。今日、動的な荷重条件における土の履歴減衰や粘性減衰に関する研究の蓄積も少なく、これらを理論体系の中に定着されるには至っていない。しかしこれらの減衰効果を全く無視しても、地下逸散減衰だけを考慮した計算値が比較的良く実測値と合うという事実から、それらの減衰効果は実質的にはかなり小さいと考えられる。

最近コンピューターの普及により、地盤を細かく分割し、有限要素法を使って数値計算する方法も行なわれるようになった。しかし研究を目的とした計算ならともかく、日常の設計にまで手軽に応用できるといった簡単なものではない。いずれにせよ近似計算には変りなく、よほど特殊な条件でないかぎり、今日のところ理想地盤による解析法よりすぐれた利点はほとんど持っていない。将来に対する研究の一つの方向ではあろうが、実用化に関しては現在のところ時期尚早といえる。

4. 理想地盤による実用計算法

まず理想地盤すなわち等方等質なる半無限完全弾性体を想定し、その地表面に円形基礎が置かれたとする。円形基礎とする理由は、計算がいちじるしく簡素化されるためである。ク形基礎の場合は第 6 章において述べるように、等価の円形基礎に置き換えて考えることにする。

このような基礎に動的な力が作用したとして基礎の変位を厳密に計算しようとする、計算がいちじるしく複雑になるうえ、バネ定数と減衰係数に相当する項が振動数の関数になり実用的にははなはだ不都合である。そこ

で実用化を目的として、次の2つの仮定を設ける。

1) 静的な荷重による地中応力の分布は、動的な荷重においてもそのまま保存される。

2) 基礎版の振動によって地中に逸散する波動は、基礎版にごく接近したところで平面波状になっている。

このような2つの仮定を設けることによって、地盤のバネ定数は静的な場合の地中応力論から、減衰係数は平面波の地下逸散にともなう接地面の波動応力から、それぞれ独立に計算することができる。本報文においては、途中の計算過程はかえって読者を惑わすことになるであろうし、実用的には必要ないことでもあるので省略し、結果だけを示すことにした。

まず地盤のバネ定数の計算に当たっては、基礎版の接地応力分布を仮定しなくてはならない。この接地応力分布は、上下および水平動に対して図-1に示すような3つの形態が考えられてきた。それぞれ (a) 剛基礎 (Rigid Base), (b) 均等分布 (Uniform Loading), (c) 放物線分布 (Parabolic Loading) と呼ばれる。これらの接地応力分布を回転動およびネジリ動の場合に対応させると、それぞれ図-2 および図-3 に示すようなものになる。この場合、均等分布は三角分布 (Triangular Loading) に対応する。

それぞれの荷重形態および接地応力分布に対する地盤

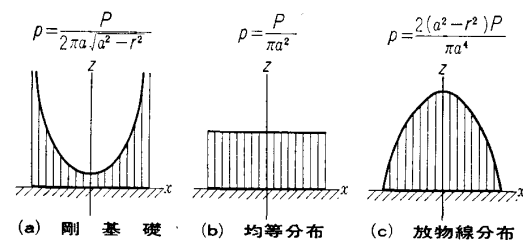


図-1 上下動、水平動における3種の接地応力分布

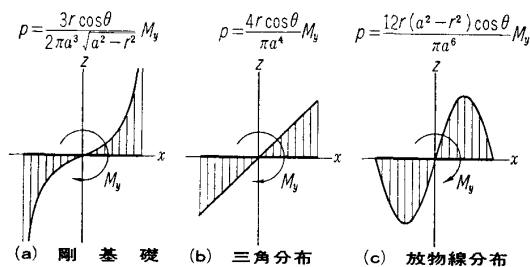


図-2 回転動における3種の接地応力分布

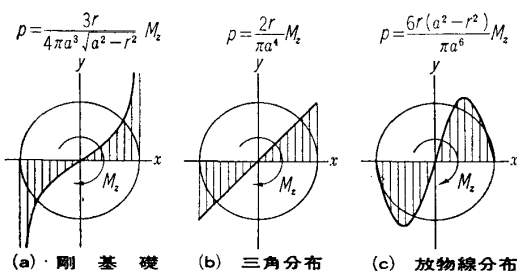


図-3 ネジリ動における3種の接地応力分布

表-1 各種振動形態および接地応力分布における地盤のバネ定数と減衰係数

振動形態	バネ定数 (t/cm)			減衰係数 (ts/cm)
	剛基礎	均等分布 三角分布	放物線分布	
上下動	$\frac{4 a \rho V_s^2}{1-\nu}$	$\frac{\pi a \rho V_s^2}{1-\nu}$	$\frac{3 \pi a \rho V_s^2}{4(1-\nu)}$	$\rho V_p S$
水平動	$\frac{8 a \rho V_s^2}{2-\nu}$	$\frac{2 \pi a \rho V_s^2}{2-\nu}$	$\frac{3 \pi a \rho V_s^2}{2(2-\nu)}$	$\rho V_s S$
回転動	$\frac{8 a^3 \rho V_s^2}{3(1-\nu)}$	$\frac{\pi a^3 \rho V_s^2}{2(1-\nu)}$	$\frac{\pi a^3 \rho V_s^2}{4(1-\nu)}$	$\rho V_p I_y$
ネジリ動	$\frac{8 a^3 \rho V_s^2}{3(1-\nu)}$	$\frac{\pi a^3 \rho V_s^2}{2(1-\nu)}$	$\frac{\pi a^3 \rho V_s^2}{4(1-\nu)}$	$\rho V_s I_z$

のバネ定数を計算し、表-1の一覧表にした。すなわち2つの仮定を設けることによって、地盤のバネ定数も地下逸散による減衰係数もきわめて簡単な式によって表わされるうえ、両者とも振動数に無関係な独立な量として与えられる。したがって構造物の振動計算においては、一般の線形振動の場合となんら変わるところがなく、非常に簡単になる。

さて地盤のバネ定数は表-1からわかるように、仮定する接地応力分布によってかなり変化する。上下動および水平動の場合には、剛基礎：均等分布：放物線分布のバネ定数比は、

$$4 : \pi : 3\pi/4 = 1 : 0.785 : 0.588 \dots\dots\dots (5)$$

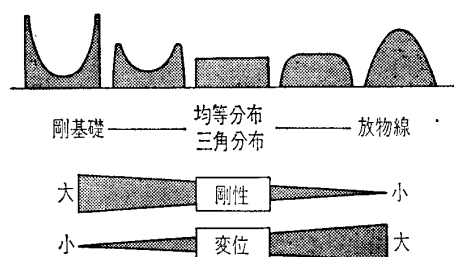
となる。また回転動およびネジリ動の場合には、剛基礎：三角分布：放物線分布によるバネ定数比は

$$8/3 : \pi/2 : \pi/4 = 1 : 0.588 : 0.294 \dots\dots\dots (6)$$

となる。すなわちいずれの場合でも、接地応力分布が剛基礎—均等分布(三角分布)—放物線分布に移るにしたがって、バネ定数は小さくなる。その影響が回転動とネジリ動の場合にいちじるしいことは、接地応力の分布形状から容易に理解されよう。

このように接地応力分布の差が地盤のバネ定数に大きく影響することになると、実際の構造物の動的解析においてどれを選択したらよいかという問題が起こる。もし基礎版が完全な剛体で全く変形しないとすれば、理想地盤においては剛基礎の接地応力分布をとる。反対に地盤に比べて基礎版の剛性が相対的に低くなるにつれて、接地応力分布は均等分布(三角分布)から放物線分布の方へ移行する。また地盤そのものは完全弾性体ではなく、かなり非線形の特徴をもっている。したがって基礎版の変位が大きくなるにつれて、接地応力分布は剛基礎—均等分布(三角分布)—放物線分布の方向に移行する。図-4はそのような傾向を、図で示したものである。以上のような傾向から実際の構造物の動的解析では、およそ次のような基準で考えればよい。

1) 比較的平面規模が小さく剛性が高い機械基礎などで、比較的微小変位を対象とする場合には剛基礎とす



図—4 基礎の変形・剛性の大小による接地応力分布

る。

2) 上記の場合で比較的大きな変位まで問題にするときには均等分布（三角分布）とする。

3) 比較的平面規模が大きい実在建物のような場合には、均等分布（三角分布）または放物線分布とする。

実際の応用に当たってどのような接地応力分布を選択するかは、地盤の堅さ、基礎版の平面寸法および剛性、考える変位、振動の形態などを考慮し、工学的判断によらなくてはならない。

表—1 からわかるように、理想地盤 ($\nu=0.25$) においては上下動のバネ定数 K_z と水平動のバネ定数 K_x の比は、すべての接地応力分布に対して $K_x/K_z=0.88$ になる。またそれぞれ図—2 および図—3 に示す接地応力分布を仮定するかぎり、回転動とネジリ動のバネ定数はいつでも等しくなる。

つぎに地下逸散による減衰であるが、厳密には振動数の関数であって、粘性減衰のように速度だけに比例するものではない。しかし仮定 2) によって逸散波を平面波とすれば、地下逸散による減衰係数は表—1 に示すように振動数に無関係にしかも簡単な式で表わされる。紙面の都合上途中の理論的過程は省略するが、物理的には次のように説明される。

地表面におかれた基礎版が振動するとき、基礎版は変位に比例したバネ反力のほか、基礎版は地盤に対する波動源としてある力を受ける。その力は接地面における波動応力に等しい。いま基礎から地中にふく射される波動変位を u_t とすれば、疎密波の場合

$$u_t = u_0 \exp \{i\omega(t - z/V_p)\}$$

で表わされる。接地面における波動応力 $(p_t)_{z=0}$ は

$$(p_t)_{z=0} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_t}{\partial z} \right)_{z=0} = -iu_0 \omega \rho V_p e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。一方基礎の変位 u は

$$u = u_0 e^{i\omega t}$$

であり、その速度は

$$\dot{u} = i\omega u_0 e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。式 (7) (8) より

$$S(p_t)_{z=0} = -\rho V_p S \dot{u} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。すなわち基礎は逸散波の波動源として、 $\rho V_p S \dot{u}$

なる力を受けることになる。この場合の $\rho V_p S$ に相当する係数は普通の粘性減衰係数と同じ次元をもち、交流理論のリアクタンスに式の形の上で似ているので、これを波動リアクタンスと呼ぶ。また等価減衰係数と呼ぶこともある。

かくして地盤を線形のパネとダッシュポットに置き換えられるから、あとは振動理論によって任意の解析を行うことができる。

5. 精解値との比較

前章において示したように、2つの仮定を設けることによって、地盤をとにかく線形のパネとダッシュポットに置き換えることができた。しかしこれは一つの近似解であるがゆえに、このような方法が適用される条件と近似の程度をあらかじめ認識しておかなくてはならない。そこで本方法による結果を既往の研究による精解値と比較し、近似解としての精度を調べることにしよう。

円形基礎に関して動的な場合として求めた既往の研究では、基礎の変位についての解は、

$$u = \frac{F_0}{a\mu} [f_1 + if_2] e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

なる形で与えられる。これを等価の意味のパネ定数 K_E と減衰係数 C_E に置き換えるとすれば、

$$f_1 + if_2 = \frac{1}{K_E + ia_0 C_E} \quad \dots\dots\dots (11)$$

なることから

$$K_E = \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}, \quad C_E = \frac{-f_2}{a_0(f_1^2 + f_2^2)} \quad \dots\dots (12)$$

となる。ここで a_0 は無次元化振動数である。

1例として水平動に関する Arnold⁽¹⁵⁾ の結果から、式 (12) によって K_E および C_E を計算すると図—5 の実線のようにになる。一方、本方法による基礎の変位に関する解は、

$$u = \frac{F_0}{K + i\omega C_e} e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (13)$$

なる形で表わされる。水平動の場合には

$$K_x = 8a\mu/(2-\nu), \quad C_{ex} = \rho V_p S$$

を式 (13) に代入し

$$u = \frac{F_0}{a\mu} \frac{1}{\frac{8}{2-\nu} + ia_0\pi} e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (14)$$

なる形に書きかえられる。式 (14) を式 (11) と比較すれば、本方法による K_E および C_E はそれぞれ次のようになる。

$$K_E = \frac{8}{2-\nu}, \quad C_E = \pi \quad \dots\dots\dots (15)$$

$\nu=0.25$ とすれば、式 (15) は $K_E=4.57$, $C_E=3.14$ となり、ともに a_0 に無関係な定数になる。図—5 の破線はこのようにして求められた K_E および C_E を示した

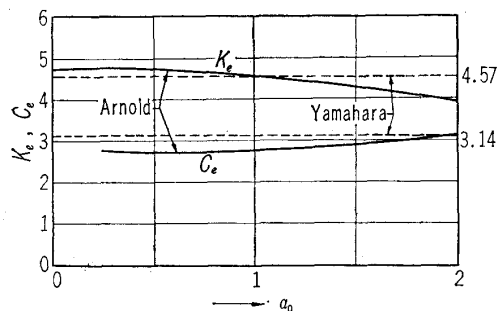


図-5 水平動に関する Arnold の結果との比較

ものである。同図から、両者は a_0 が 0~2 の範囲においては、かなり良く合っていることがわかる。

つぎに上下動については、本方法による結果から逆にグラウンドコンプライアンスを求め、精解値と比較してみることしよう。式 (13) から次のように書き換えられる。

$$u = F_0 \left[\frac{K}{K^2 + \omega^2 C_e^2} - i \frac{\omega C_e}{K^2 + \omega^2 C_e^2} \right] e^{i\omega t} \\ = \frac{F_0}{a \mu} [f_1 + i f_2] e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (16)$$

よって

$$f_1 = a \mu \frac{K}{K^2 + \omega^2 C_e^2}, \quad f_2 = -a \mu \frac{\omega C_e}{K^2 + \omega^2 C_e^2} \\ \dots\dots\dots (17)$$

となる。上下動の場合には

$$K_z = 4 a \mu / (1 - \nu), \quad C_e = \rho V_p S$$

を式 (17) に代入し整理すると

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{4(1-\nu)}{16 + \pi^2 a_0^2 2(1-\nu)^3 / (1-2\nu)} \\ -f_2 &= \frac{\pi a_0 (1-\nu)^2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}}{16 + \pi^2 a_0^2 2(1-\nu)^3 / (1-2\nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

となる。 $\nu=0.25$ として式 (18) を計算し、Arnold の結果⁽¹⁵⁾と比較すると図-6 のようになる。同図から a_0

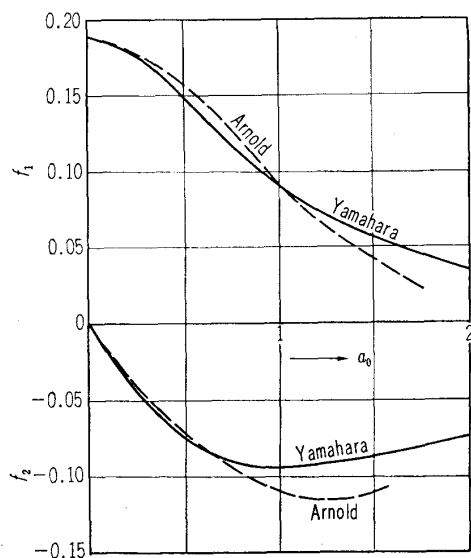


図-6 上下動に関する Arnold の結果との比較

の比較的小さい範囲 ($0 < a_0 < 1.5$) において、両者は良く合っていることがわかる。

さて、ここで a_0 とは無次元化振動数で、次のように定義される。

$$a_0 = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \frac{\omega a}{V_s} \quad \dots\dots\dots (19)$$

実際に、機械基礎の振動計算などでは ω は大きくても a が小さく、建物の地震応答計算などでは a は大きくても ω が小さく、 a_0 が 2 を越すことはまれであるとされている。既往のすべての研究においても、 $0 < a_0 < 1.2 \sim 2.0$ の範囲について解が与えられている。したがって a_0 の実用的範囲で論ずるかぎり、本方法による結果は精解値と実用上支障ない程度に良く一致することが立証された。このようなことは、冒頭に設定した 2 つの仮定から、ある程度予測されたことでもある。

6. ク形基礎の計算法

この種の理論は、基礎を円形にすることによって数学的に非常にらくになるので、多くの場合円形基礎として解析が進められてきた。しかし実際の構造物ではク形基礎による場合が圧倒的に多い。ク形断面とすることによって計算がいちじるしく複雑になるので、実用的にはク形断面を等価の円形基礎におきかえて考えることができれば、はなはだ便利である。

Thomson & Kobori⁽¹⁷⁾ は正方基礎について求めた解を円形基礎に関する Sung⁽¹³⁾ の解と比較し、正方断面の等価半径として次のように提案している。

$$a_e = 1.13 C \quad \dots\dots\dots (20)$$

また田治見⁽¹⁸⁾ も円形基礎とク形基礎による解を比較し、等価半径を次のように示している。

$$a_e = 1.1 \sqrt{S} / 2 = 0.55 \sqrt{S} \quad \dots\dots\dots (21)$$

式 (20) と (21) はほぼ同じものであり、これらはまた

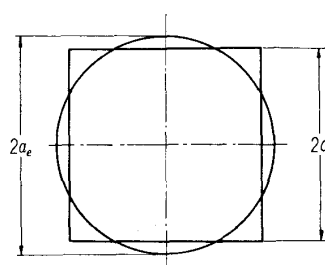


図-7 正方断面の等価半径

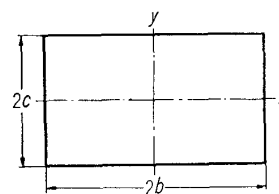


図-8 ク形基礎の記号

円形断面と正方断面の面積を等しくする条件でもある。したがってク形基礎の断面が比較的正方形に近い場合には、式 (21) によって等価の円形基礎におきかえて計算しても、実用上ほとんど問題はない。

ク形基礎が比較的細長くなると、式 (21) によって円形断面に近似したときの誤差が大きくなる。とくに回転動

の場合にその誤差がいちじるしくなる。参考までに剛基礎とした場合の、厳密な等価半径の式をつぎに示しておく。

(上下動および水平動)

$$a_e = \frac{2}{\pi} b \left\{ \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \frac{c}{b} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \dots\dots\dots (22)$$

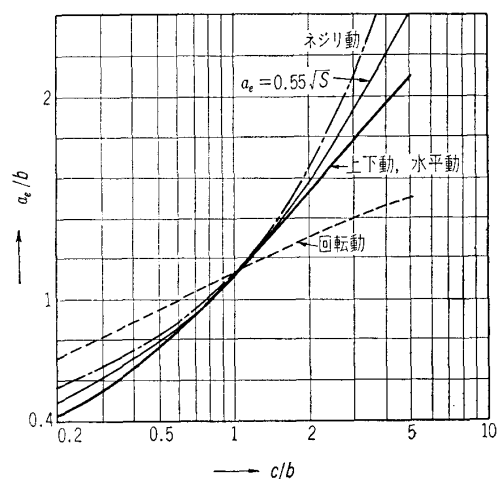
(回転動)

$$a_e^3 = \frac{4}{\pi} b^3 \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \frac{b}{2c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} - \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (23)$$

(ネジリ動)

$$a_e^3 = \frac{1}{\pi} b^3 \left[\frac{c}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (24)$$

設計者の便宜のため、式(22),(23),(24)を計算し図—9にグラフで示しておいた。同図から回転動を考えないとき、または無視できる場合には、 c/b のかなり広い範囲($0.2 < c/b < 5$ ぐらい)にわたって式(21)による換算が実用上適用できることがわかる。しかし回転動に対する式(21)の適用は、せいぜい $0.7 < c/b < 1.4$ の範囲ぐらいに限定しないと誤差が大きくなる。



図—9 ク形基礎の等価円半径

7. V_s 値の推定

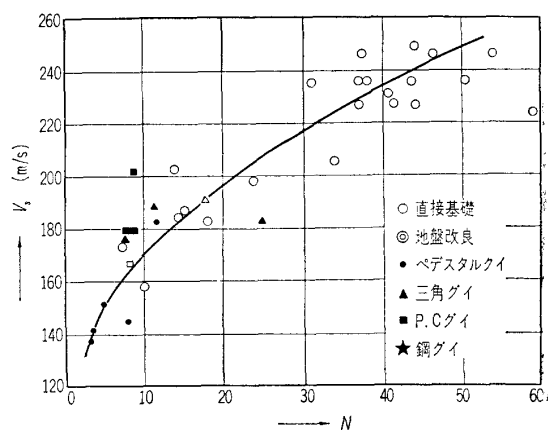
第4章において述べた方法によって、地盤を等価のバネとダッシュポットに置きかえ振動計算を行なうことができる。この場合、地盤の性質として密度 ρ 、波動速度 V_s

と V_p 、ポアソン比 ν が必要になる。密度 ρ の推定に関してはほとんど問題はない。ポアソン比 ν については第3章で述べたように、等方等質の仮定にしたがって $\nu=0.25$ に固定する。実際の地盤は一般にこれよりも大きなポアソン比をもつだろうが、あいまいな数値を仮定するよりも、理想地盤の仮定にしたがった方が筋が通る。そこでポアソン比は固定し、それによる誤差を補足する意味での V_s の値を考えれば、実用的でもあり個人差も少なくなる。 V_p の値は等価減衰係数を求めるときに必要なになり、 $\nu=0.25$ と置くことによって式(4)から

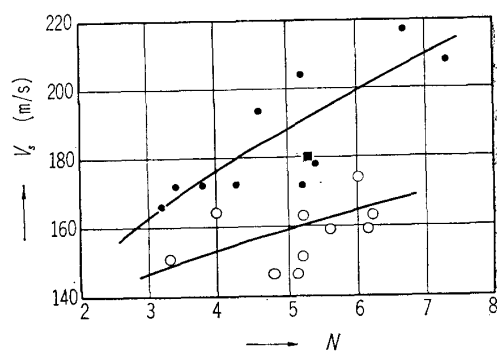
$$V_p = \sqrt{3} V_s \dots\dots\dots (24)$$

となる。

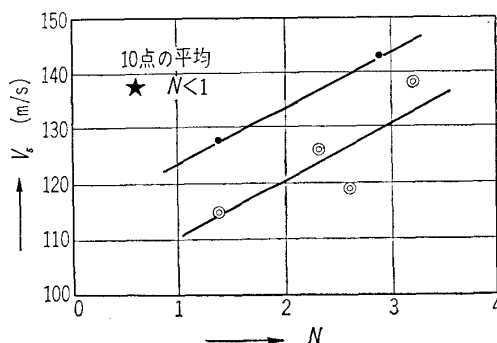
結局、地盤の性質として横波速度 V_s だけを、なんとか推定すればよいことになる。実際の設計に先立っていちいち弾性波試験を行なうわけにはいかないので、ポー



図—10 砂質土の V_s 値



図—11 関東ロームの V_s 値



図—12 粘土およびシルトの V_s 値

表—2 地盤および地業別標準 V_s 値

地 盤	地 業	V_s 値 (m/s)
軟弱な粘土・シルト ($N < 5$)	地 盤 改 良	110~140
同	ク イ 基 礎	130~150
関 東 ロ ー ム	直 接 基 礎	150~180
同	ク イ 基 礎	160~220
ゆ る い 砂 ($N = 5 \sim 10$)	直 接 基 礎	140~170
	ク イ 基 礎	170~200
中 位 の 砂 ($N = 10 \sim 30$)	直 接 基 礎	170~220
	ク イ 基 礎	190~240
締 ま っ た 砂 ($N > 30$)	直 接 基 礎	220~260
砂 レ キ ($N > 50$)	直 接 基 礎	250~300
風 化 岩 ($N \geq 50$)	直 接 基 礎	500~800

リング調査資料などからなんとか大過なく推定する方法があれば非常に便利である。そこで筆者らは関東地方に散在する多くの鉄筋コンクリート造アパートの固有周期を測定し、本方法による理論式から V_s の値を逆算し、地盤条件との相関を調べてみた⁽²¹⁾。その結果を図—10 (砂質土)、図—11 (関東ローム)、図—12 (粘土およびシルト) に示した。

これらの図はすべて、各種の基礎地業による効果を含めた見かけの V_s 値を意味している。また図中の N 値は地表から深さ約 10 m までの平均値として与えてある。このような調査結果と筆者らが行なった幾多の実設計の経験から、地盤の V_s 値をおよそ表—2 に示すような標準で推定すれば大きなあやまちはない。

実際の構造物は、クイやその他の地業を施すことが多い。このような場合、クイによる効果を厳密に計算することは非常に面倒である。どうせ多くの理想化された仮定を設けるのであるから、一つの近似解であることには変わらない。クイその他の地業による効果は、結局は地盤を補剛することになるのであるから、 V_s 値が見かけ上大きくなったとして実用上ほとんど問題ない。そこで基礎地業を含めて V_s 値を考えれば、十分実用目的を達することができる。

筆者らの研究によれば、地盤が軟弱なほど基礎地業による補剛効果が大きく、良質な地盤ほどその効果は少ない。クイによる補剛効果は、およそ表—3 に示す程度に考えればよい。たとえば $V_s = 150$ m/s 程度のローム層に普通のクイ打ちを施した場合、クイによる補剛効果を 20% として $V_s = 180$ m/s 程度に考えればよい。もちろんクイの種類、寸法、打込み間隔なども補剛効果に影響するから、実際の適用に当たっては工学的判断も必要である。

このようにして求められた V_s 値は、実は弾性波試験などの物理的方法によって得られる横波速度とは、微妙な違いがある。たとえばきわめて良質な地盤であっても、構造物の工事の際に基礎に接する地盤が相当に乱されたり、砂や砂利を敷くことが多い。とくに地盤のパネ

表—3 クイによる補剛効果

地 盤	補剛効果
軟 弱 地 盤	30~50%
中 位 の 地 盤	10~30%
良 質 地 盤	0~10%

特性には、地中応力の高い浅い部分の土の影響を大きく受ける。したがって基礎に接する部分にわずかでもゆるい土があると、その影響によって見かけの V_s 値はもとの地盤よりかなり小さくなる。反対にきわめて軟弱な地盤であっても、実際には必ず地表に近い部分を良質の土でおきかえたり、転圧したりして改良されるため、見かけの V_s 値はかなり改善される。したがって構造物の振動計算を行なう場合の V_s 値は、各種文献に示されているような値より、良質地盤と軟弱地盤との間の較差がかなり縮小されたものになっている。このような意味で本章に示す V_s 値は、工学的であるといえる。

結局、地盤の動的解析を行なうとき、工学的な意味での V_s 値をいかに適切に評価するかが最も重要なポイントになる。このような V_s 値は土質分類や標準貫入試験の N 値などから、ただ機械的に決まるというものではない。また弾性波試験による測定値が、必ずしも妥当であるともいえない。ある程度工学的判断を加えて評価しなくてはならない。幾多の経験を積むことによって、ボーリング調査資料などからかなり妥当な V_s 値が推定できるようになるはずである。本章に示した諸資料や考え方を参考にして、工学的な意味での V_s 値の実体の把握に早く慣れることを期待したい。

記 号

- C_E : グランドコンプライアンスから求まる等価の意味での無次元化減衰係数
- C_θ : 波動リアクタンス (等価減衰係数) $t \cdot \text{sec/cm}$
- F, F_0 : 動的荷重, 動的荷重振幅 t
- $K_x, K_z, K_\phi, K_\theta$: 地盤の水平, 上下, 回転, ネジリのパネ定数 t/cm または $t \cdot \text{cm}$
- K_E : グランドコンプライアンスから求まる等価の意味での無次元化パネ定数
- S : 基礎の接地断面積 cm^2
- V_s, V_p : 横波速度, 縦波速度 cm/sec
- a : 円形基礎の半径 cm
- a_0 : 式 (19) で定義される無次元化振動数
- b, c : ク形基礎の断面寸法 (図—8 参照) cm
- f_1, f_2 : 式 (1) で定義されるグランドコンプライアンスの素子
- i : $\sqrt{-1}$, t : 時間 sec
- p_t : 地中に生ずる波動応力 t/cm^2
- $(p_t)_{z=0}$: 地表面における波動応力 t/cm^2
- u, u_0 : 動的変位, 動的変位振幅 cm
- u_t : 波動変位 cm
- x, y, z : 直角座標
- μ, λ : ラーメの定数
- ρ : 地盤の密度 $t \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$

ν : 地盤のポアソン比

ω : 角振動数 1/sec

参 考 文 献

- (1) H. Lorenz: "New Results of Dynamic Investigations of Foundation Soils" Zeitschrift des vereins deutscher Ingenieure, Mar. 24, 1934
- (2) 大築志夫「防振基礎の設計法」オーム社, 1959
- (3) 久田俊彦・中川恭次「実大建物の耐力試験から得た地盤係数」建築学会研報, No. 22, 1953
- (4) 久田俊彦・中川恭次・木村栄一「地盤の動力学的性質に関する研究」建築学会研報, No. 22, 1953
- (5) 中川恭次「建物並びに模型基礎の振動実験から求めた地盤係数」建築学会論報 No. 67, 1961
- (6) W.K. Newcomb: "Principle of Foundation Design for Engines and Compressor" Trans. of the ASME, Apr. 1951
- (7) A. Paw: "A Dynamic Analogy for Foundation Systems" Symp. on Dynamic Testing of Soil, ASTM, 1953
- (8) H.A. Balakrishna: "A New Method for Predicting the Natural Frequency of Foundation Soil System" The Structural Engineering, Oct. 1960
- (9) D.D. Barkan: "Field Investigation of the Theory of Vibration of Massive Foundation under Machines" 1st International Conference on S.M. and F.E., 1936
- (10) E. Reissner "Stationäre axialsymmetrische durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes" Ingenieur Archiv, Vol. 7, 1936
- (11) E. Reissner: "Freie und erzwungene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes" Ingenieur Archiv, Vol. 8, 1937
- (12) E. Reissner and H.F. Sagoci: "Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space" Journal of Applied Physics, Vol. 15, 1944
- (13) T.Y. Sung: "Vibration in Semi-Infinite Solids Due to Periodic Surface Loading" ASTM Symp. on Dynamic Testing of Soils, No. 156, 1953
- (14) 鳥海 勲 "Vibrations in Foundations of Machines" Technology Report of Osaka Univ, Vol. 5, No. 146, 1955
- (15) R.N. Arnold, G.N. Bycroft, G.B. Warburton: "Forced Vibration of a Body on an Infinite Elastic Solid" Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, Trans. ASME, Vol. 77, 1955
- (16) 小堀鐸二 "Dynamic Response of Rectangular Foundation of an Elastic-Space" Proc. of Japan National Symp. on Earthquake Engineering, 1962
- (17) W.T. Thomson and T. Kobori: "Dynamic Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space" Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, 1963
- (18) 田治見宏 "Basic Theories on Aseismic Design of Structures" Report of the Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, Vol. 8, No. 4, 1959
- (19) 山原 浩「弾性地盤上の基礎および構造物の振動性状に関する研究(その1)」建築学会論報 No. 115, 1965
- (20) 山原 浩「弾性地盤上の基礎および構造物の振動性状に関する研究(その2)」建築学会論報 No. 120, 1966
- (21) 山原 浩・木原秀幸「鉄筋コンクリート造アパートの固有周期」コンクリートジャーナル, Vol. 8, No. 5, 1970

(原稿受理 1971.4.13)