No. 1203

せん断，圧縮と構成方程式
SHEAR, COMPRESSION AND CONSTITUTIVE EQUATIONS

金谷健一*

1. はじめに

土のような連続体の変形やそれに必要な力などを記述するには，それを一般的に記述しなければならない。すなわち，実験が特殊な装置で行われたとしても，その結果が有用であるためには用いられた装置によらない一般的性質として土の特性を記述しなければならないはずである。ところが実際には実験者が用いた装置に対するデーターのみを扱った例も多く，ここから幾つかの基礎概念に関して混乱が生じる可能性も少なくない。例えば普通，純粋せん断と単純せん断とはそれぞれ，

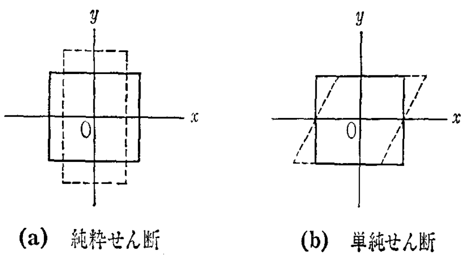
$$\left.\begin{aligned} x'&=kx\\ y'&=k^{-1}y\\ z'&=z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \left.\begin{aligned} x'&=x+2sy\\ y'&=y\\ z'&=z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

で表される変形として定義される[1]（図—1）。

しかし，これは特定の座標系をもとにした定義であり，座標変換に不変な概念ではない。すなわち，式(1)，(2)による純粋せん断，単純せん断も観察者が少し首をかしげてながめると，もはやこの意味での純粋せん断，単純せん断ではない。全く同一の変形が見る方向によって単純せん断になったり，そうでなくなったりするのであるから，例えば地盤の変形が単純せん断であるということは意味のないことである。座標系というものは本来人為的なものであるから，**座標変換に不変な概念**だけが物理的に意味のあるものといえる。そこで，以下特定の座標系を用いて記述したことを座標系によらない不変な形で述べる基本原理を整理してみる。

2. 変形とひずみ，回転

空間に xyz 直交座標をとる。点 (x, y, z) が変形によって点 (x_1, y_1, z_1) に移動したとする。変形が**均一** (homogeneous) であるとはそれらの間に，



図—1 純粋せん断と単純せん断

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+x_0\\ y_1&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+y_0\\ z_1&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+z_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

なるアフィン変換の関係があることである。行列を用いれば，これは，

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0\cdots\cdots\cdots(4)$$

と表せる。$\boldsymbol{r}_0$ は変形前に原点 0 にあった点の変形後の位置である。以下では原点 0 の移動により引き起こされる全体の平行移動を差し引いて考えることにして $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0}$ とする。変形後の位置 $\boldsymbol{r}_1$ のかわりに**変位** (displacement) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}$ を用いれば式(4)は，

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{F}\equiv\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\cdots\cdots\cdots(5)$$

となる。$\boldsymbol{I}$ は単位行列である。$\boldsymbol{F}$ は**変形テンソル** (distortion tensor) と呼ばれる。テンソルであるとは座標変換に関してテンソル変換則に従うことをいう。例えば，xyz 座標のかわりに別の $x'y'z'$ 座標をとり，両者の関係が，

$$\left.\begin{aligned} x'&=r_{11}x+r_{12}y+r_{13}z\\ y'&=r_{21}x+r_{22}y+r_{23}z\\ z'&=r_{31}x+r_{32}y+r_{33}z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)$$

であるとする。この係数を表す行列を $\boldsymbol{R}=[r_{ij}]$ とすると，これは座標系の回転を表すのであるから直交行列である。すなわち，

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{I}\quad \therefore \boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{R}^{-1}\cdots\cdots\cdots(7)$$

である（$\boldsymbol{R}^T$ は $\boldsymbol{R}$ の転置を表す）。もとの座標系でベクトル $\boldsymbol{r}$ で表された点は新しい座標系では $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}$ で表されるのであるから，新しい座標系からみた変位を $\boldsymbol{u}'$ とすれば，

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\cdots\cdots\cdots(8)$$

であり，式(5)に $\boldsymbol{R}$ をかけて $\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{R}\boldsymbol{r})$，すなわち，

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{F}'\boldsymbol{r}'\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}^T\cdots\cdots\cdots(10)$$

となる。式(9)が式(5)と同じ形であることに注意しよう。式(10)がテンソルの変換則である。これによって変形テンソルという概念が座標変換に不変であることが分かる。

さて，変形テンソル $\boldsymbol{F}$ は次のように対称行列 $\boldsymbol{E}$ と反対称行列 $\boldsymbol{\Omega}$ との和で表される。

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Omega}\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^T)/2,\quad \boldsymbol{\Omega}=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^T)/2\cdots\cdots\cdots(12)$$

*工博 群馬大学 工学部情報工学科

$\boldsymbol{E}$ をひずみテンソル (strain tensor), $\boldsymbol{\Omega}$ を回転テンソル (rotation tensor) と呼ぶ。これらが対称, 反対称とはそれぞれ,

$$\boldsymbol{E}^T=\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\Omega}^T=-\boldsymbol{\Omega} \quad \cdots\cdots(13)$$

となることであり, 定義より明らかである。重要なことは分解(11)が座標変換に不変な概念であることである。すなわち, 別の座標系からみた変形テンソル $\boldsymbol{F}'$ を式(11)のように分解したとする。

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{\Omega}' \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\boldsymbol{E}'=(\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{F}'^T)/2, \quad \boldsymbol{\Omega}'=(\boldsymbol{F}'-\boldsymbol{F}'^T)/2 \quad \cdots\cdots(15)$$

このとき $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{\Omega}'$ はそれぞれ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\Omega}$ をテンソル変換則で変換したものになっており, それぞれ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\Omega}$ と同じ量を記述していることが分かる。すなわち,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&=(\boldsymbol{RFR}^T+(\boldsymbol{RFR}^T)^T)/2\\&=(\boldsymbol{RFR}^T+\boldsymbol{RF}^T\boldsymbol{R}^T)/2\\&=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^T)\boldsymbol{R}^T/2\\&=\boldsymbol{RER}^T \quad \cdots\cdots(16)\end{aligned}$$

であり, 同様に+を−にかえれば,

$$\boldsymbol{\Omega}'=\boldsymbol{R\Omega R}^T \quad \cdots\cdots(17)$$

となることも分かる。

さらに**偏差ひずみテンソル** (strain deviator tensor) $\tilde{\boldsymbol{E}}$ を,

$$\tilde{\boldsymbol{E}}\equiv\boldsymbol{E}-\frac{1}{3}v\boldsymbol{I}, \quad v\equiv\mathrm{Tr}\boldsymbol{E} \quad \cdots\cdots(18)$$

で定義する。Tr は対角和 (トレース) を表す。この式の対角和をとれば $\mathrm{Tr}\tilde{\boldsymbol{E}}=0$ であることが分かる。したがって,

$$\boldsymbol{E}=\tilde{\boldsymbol{E}}+\frac{1}{3}v\boldsymbol{I} \quad \cdots\cdots(19)$$

と書くと, これはひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ を対角和が 0 の部分と単位行列の定数倍との和に表したことになる。これも座標変換に不変な分解である。なぜなら, 別の座標系で同様に,

$$\boldsymbol{E}'=\tilde{\boldsymbol{E}}'+\frac{1}{3}v'\boldsymbol{I} \quad \cdots\cdots(20)$$

とすると, まず,

$$\begin{aligned}v'&=\mathrm{Tr}\boldsymbol{E}'=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{RER}^T)=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{RR}^T\boldsymbol{E})\\&=\mathrm{Tr}\boldsymbol{E}=v \quad \cdots\cdots(21)\end{aligned}$$

であり, v はスカラー不変量であることが分かる (対角和は積の順序を変えてもよい)。次に,

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{E}}'&=\boldsymbol{E}'-\frac{1}{3}v'\boldsymbol{I}\\&=\boldsymbol{RER}^T-\frac{1}{3}v\boldsymbol{I}\\&=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}-\frac{1}{3}v\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}^T\\&=\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{R}^T \quad \cdots\cdots(22)\end{aligned}$$

となって偏差ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ もテンソル変換則に従うことが分かる。以上により, 変形テンソル $\boldsymbol{F}$ が,

$$\boldsymbol{F}=\tilde{\boldsymbol{E}}+\frac{1}{3}v\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Omega} \quad \cdots\cdots(23)$$

と三つの部分に分解され, かつこの分解が座標変換に不変である, すなわち分解してから座標変換しても, 座標変換してから分解しても同じであり, 物理的に同じ現象を記述していることが分かった。ところで回転テンソル $\boldsymbol{\Omega}$ は反対称であるから, その成分は,

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(24)$$

と書かれているはずである。ゆえに $\boldsymbol{r}$ をかけると,

$$\boldsymbol{\Omega r}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_2 z-\omega_3 y\\ \omega_3 x-\omega_1 z\\ \omega_1 y-\omega_2 x\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(25)$$

となるが, これは $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を成分とするベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすれば**ベクトル積**を用いて $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ と表される。したがって変位 $\boldsymbol{u}$ は式(5), 式(23)より,

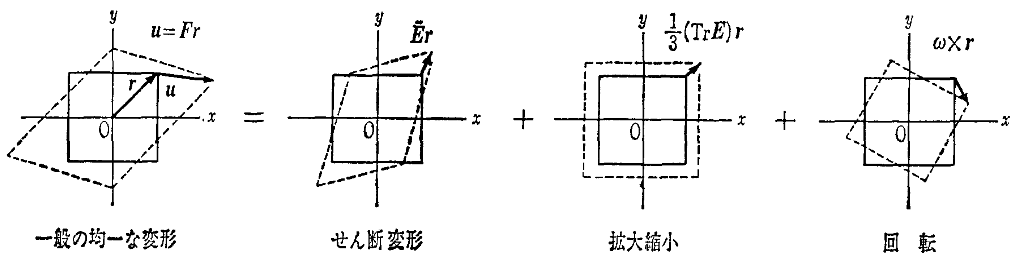
$$\boldsymbol{u}=\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{r}+\frac{1}{3}v\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \quad \cdots\cdots(26)$$

と書かれる。最後の項は回転軸が $\boldsymbol{\omega}$, 回転角が $\|\boldsymbol{\omega}\|$ $(=\sqrt{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2+(\omega_3)^2})$ の回転を表している。第 2 項は原点からの距離に比例した変位であるから, 一様な拡大あるいは縮小を表す。変形が微小なら v は体積増加率に等しいことが分かる (付録参照)。したがって偏差ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ は回転と拡大縮小とを除いた変形を表す(図—2)。ゆえに, せん断変形とは偏差ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ で表される変形にほかならず, このように定義して初めて座標変換に不変な概念となるのである。これ以外の定義は特定の座標系から見たときのみ意味を持つ表面的な定義となってしまう。

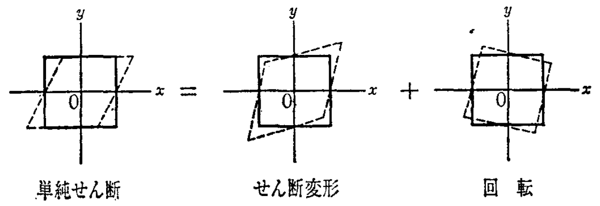
初めにあげた式(1), (2)にこのような分解をほどこしてみる。式(1)は,

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k-1 & & \\ & k^{-1}-1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(27)$$

となるが, 対角和は $k+k^{-1}-2$ であり k が 1 に近いときは



図—2 変 形 の 不 変 分 解



図—3　単純せん断の不変分解

2次の微小量であり，ほぼ0と考えてよい。したがってこのままでせん断変形を表している（付録参照)。式(2)は，

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2s&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&s&\\s&0&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-s\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdots\cdots(28)$$

となり，せん断変形と z 軸を中心とする角度 s だけの右回りの回転との重ね合わせであることが分かる（図—3)。

3.　テンソルの不変分解とせん断応力，静圧力

前節で述べたことをまとめると次のようになる。$\boldsymbol{A}$ を n 次元の（2階の）テンソルとするとき，これを**対称部分** $\boldsymbol{A}_1$ と**反対称部分** $\boldsymbol{A}_2$ とに分解できる。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2 \cdots\cdots(29)$$

$$\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)/2,\ \boldsymbol{A}_2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)/2 \cdots\cdots(30)$$

これは座標変換に不変な分解である。次に対称部分 $\boldsymbol{A}_1$ が**偏差部分** $\tilde{\boldsymbol{A}}_1$ と**スカラー部分** $(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}_1/n)\boldsymbol{I}$ とに分解できる。

$$\boldsymbol{A}_1=\tilde{\boldsymbol{A}}_1+\frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{I} \cdots\cdots(31)$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_1\equiv\boldsymbol{A}_1-\frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{I} \cdots\cdots(32)$$

これも座標変換に不変な分解である。全体として，

$$\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{A}}_1+\frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_2 \cdots\cdots(33)$$

となる（$\boldsymbol{A}_2$ は反対称であり，対角成分が 0 であるから $\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}_2=0$，ゆえに $\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)=\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}_1$ である)。これをテンソル $\boldsymbol{A}$ の**不変分解** (invariant decomposition) という。この分解の重要な点は，単にそれが座標変換に不変であるだけでなく，三つの部分が互いに**直交**することである。ただしテンソル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ の成分を $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ とするとき，それらの**内積**を，

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=\sum_{ij}a_{ij}b_{ij}(=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})) \cdots\cdots(34)$$

で定義する。これも座標変換に不変である。すなわち，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}':\boldsymbol{B}'&=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}')=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^T\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^T)\\&=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^T)=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\\&=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} \cdots\cdots(35)\end{aligned}$$

例えば $\tilde{\boldsymbol{P}}$ をある偏差テンソル（$\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{P}$ かつ $\mathrm{Tr}\tilde{\boldsymbol{P}}=0$)，$\boldsymbol{Q}$ を反対称テンソル（$\boldsymbol{Q}^T=-\boldsymbol{Q}$）としよう。すると，

$$\tilde{\boldsymbol{P}}:\boldsymbol{Q}=\sum_{ij}\tilde{p}_{ij}\,q_{ij}=\sum_{ij}\tilde{p}_{ji}(-q_{ji})=-\tilde{\boldsymbol{P}}:\boldsymbol{Q}$$

$$\therefore\tilde{\boldsymbol{P}}:\boldsymbol{Q}=0 \cdots\cdots(36)$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}:c\boldsymbol{I}=\mathrm{Tr}(c\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{I})=c\mathrm{Tr}\tilde{\boldsymbol{P}}=0 \cdots\cdots(37)$$

$$\boldsymbol{Q}:c\boldsymbol{I}=\mathrm{Tr}(c\boldsymbol{Q}\boldsymbol{I})=c\mathrm{Tr}\boldsymbol{Q}=0 \cdots\cdots(38)$$

となる。すなわち分解された三つの部分は互いに直交する。いいかえればテンソルの全体を T，偏差テンソルの集合を D，スカラーテンソル（単位行列の定数倍）の集合を S，反対称テンソルの集合を a とすれば，これらはすべてベクトル空間であり，次元（＝独立成分の数）はそれぞれ n^2，$n(n+1)/2-1$，1，$n(n-1)/2$ である。式(33)より T は，

$$T=D\oplus S\oplus a \cdots\cdots(39)$$

と直和分解され，かつ，これは直交分解でもある。

$$D\perp a,\ D\perp S,\ a\perp S \cdots\cdots(40)$$

このような性質は当然応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ にもあてはまる。ただし，モーメントのつり合い条件より $\boldsymbol{\sigma}$ は対称テンソルであるから，反対称部分はない。これを偏差部分とスカラー部分とに分けると次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-p\boldsymbol{I} \cdots\cdots(41)$$

$$p\equiv-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma},\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\equiv\boldsymbol{\sigma}+p\boldsymbol{I} \cdots\cdots(42)$$

ここに p は**静圧力** (hydrostatic pressure) であり，平均主応力に等しい。$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ は**偏差応力テンソル** (stress deviator tensor) である。静圧力をこのように定義すれば，これが座標変換に不変であることは当然である。そして偏差応力テンソル $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ で表される応力状態（すなわち $p=0$ の状態）がせん断応力状態である。従来，単にせん断と呼んで，せん断変形とせん断応力状態との区別ができず，誤解が生じる場合がしばしばあったが，これらははっきり区別するべきである。なぜなら，金属のように線形弾性論の範囲ではせん断応力状態によって必ずせん断変形のみが引き起こされるが，土のような非線形材料ではせん断応力状態でも必ずしもせん断変形のみが生じるわけではないからである（例えばダイレイタンシー）（次節参照)。

さて，応力状態が $\boldsymbol{\sigma}$ であるときに $\boldsymbol{F}$ なる変形が生じたとすれば，なされた仕事 W は，

$$W=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{F}\ (=\sum_{ij}\sigma_{ij}F_{ij}) \cdots\cdots(43)$$

である。，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{F}$ をそれぞれ式(41)，(23)のように不変分解して代入すると直交性(36)，(37)，(38)より，

$$W=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\tilde{\boldsymbol{E}}-pv \cdots\cdots(44)$$

となる。すなわち，直交分解(39)をいいかえれば次のようになる。せん断応力（＝偏差部分）$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ はせん断変形（＝偏差部分）$\tilde{\boldsymbol{E}}$ に対してのみ仕事をし，拡大縮小（＝スカラー部分）$v\boldsymbol{I}$ および回転（＝反対称部分）$\boldsymbol{\Omega}$ に対しては仕事をしない。また静圧力（＝スカラー部分）$-p\boldsymbol{I}$ は拡大縮小（＝スカラー部分）$v\boldsymbol{I}$ に対してのみ仕事をし，せん断変形（＝偏差部分）$\tilde{\boldsymbol{E}}$ および回転（＝反対称部分）$\boldsymbol{\Omega}$ に対して

は仕事をしない。以上のことは座標変換不変性より，任意の座標系で成立する命題であることが分かる。

4. 構成方程式および等方性，線形性

応力が $\boldsymbol{\sigma}$ であるときのひずみを $\boldsymbol{E}$ とするとき，物質が弾性域にあろうが塑性域にあろうが，降伏したかどうかに関係なく，いま考えている状態に対して $\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{\sigma}$ の式で表すもの，あるいは逆に $\boldsymbol{\sigma}$ を $\boldsymbol{E}$ の式で表すものは**構成方程式** (constitutive equation) と呼ばれている注1)。ところで $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{E}$ はそれぞれ線形代数で知られる**ハミルトン・ケイリー** (Hamilton-Cayley) **の定理**を満たす。例えば $\boldsymbol{\sigma}$ について，

$$\boldsymbol{\sigma}^3-J_1\boldsymbol{\sigma}^2+J_2\boldsymbol{\sigma}-J_3\boldsymbol{I}=0 \quad \cdots\cdots(45)$$

となる。ここに $J_1(=\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma})$, J_2, $J_3(=\det\boldsymbol{\sigma})$ はそれぞれ応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の第1，第2，第3 不変量であり，これらは $\boldsymbol{\sigma}$ の**スカラー不変量の完全な組**をつくる。すなわち $\boldsymbol{\sigma}$ の任意のスカラー不変量はこれらの関数によって表される。主応力成分を σ_1, σ_2, σ_3 とすれば，これらも不変量の完全な組であり，

$$\begin{aligned}
J_1&=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\\
J_2&=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\\
&=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2/2-(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2)/2\\
J_3&=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\\
&=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^3/6-(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2)/2\\
&\quad+(\sigma_1{}^3+\sigma_2{}^3+\sigma_3{}^3)/3 \quad \cdots\cdots(46)
\end{aligned}$$

となる。ゆえに，

$$\left.\begin{aligned}
J_1&=\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}\\
J_2&=(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma})^2/2-\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}^2/2\\
J_3&=(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma})^3/6-(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma})(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}^2)/2+\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}^3/3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(47)$$

となり，$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}$, $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}^2$, $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}^3$ も不変量の完全な組をつくる。ひずみ $\boldsymbol{E}$ についても同様である。さて，物質が等方性であり，ひずみ $\boldsymbol{E}$ は応力 $\boldsymbol{\sigma}$ にのみより，その他の方向性を持つ量（例えば重力場，構造異方性 (fabric)）によらないとする。ひずみ $\boldsymbol{E}$ が応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の解析関数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\sigma})$ で表されるとすると，これは $\boldsymbol{\sigma}$ の無限級数 $\boldsymbol{E}=c_0\boldsymbol{I}+c_1\boldsymbol{\sigma}+c_2\boldsymbol{\sigma}^2+\cdots\cdots$ に展開されるが，ハミルトン・ケイリーの定理(45)により $\boldsymbol{\sigma}^3$ 以上の項は $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^2$ と $\boldsymbol{\sigma}$ の不変量とによって表される。ゆえに，

$$\boldsymbol{E}=\alpha_1\boldsymbol{I}+\alpha_2\boldsymbol{\sigma}+\alpha_3\boldsymbol{\sigma}^2 \quad \cdots\cdots(48)$$

となる。ただし α_1, α_2, α_3 は $\boldsymbol{\sigma}$ の不変量，例えば $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}$, $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}^2$, $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}^3$ の関数である。$\boldsymbol{\sigma}$ について表せば，

$$\boldsymbol{\sigma}=\beta_1\boldsymbol{I}+\beta_2\boldsymbol{E}+\beta_3\boldsymbol{E}^2 \quad \cdots\cdots(49)$$

となり，β_1, β_2, β_3 は $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{E}$, $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{E}^2$, $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{E}^3$ の関数である注2)。式(48)，(49)が**等方性を持つ非線形材料の構成方程式の一般の形**であり，これも座標変換に不変である。したがって，例えばダイレイタンシーのような非線形効果もこの形で表されなければならない注3)。

特に応力 $\boldsymbol{\sigma}$ とひずみ $\boldsymbol{E}$ との関係が線形であるとすれば，式(49)において $\beta_3=0$ であり，β_2 は定数，β_1 は一次の不変量 $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{E}$ の定数倍でなければならない。すなわち，

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{E})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{E} \quad \cdots\cdots(50)$$

という形になり，式(48)も同様に，

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2\mu}\left[-\frac{\nu}{1+\nu}(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\sigma}\right] \quad \cdots\cdots(51)$$

と表される。式(50)，(51)が線形弾性論における構成方程式であり，λ, μ はラーメ (Lamé) の定数，ν はポアソン (Poisson) 比と呼ばれる。μ はせん断剛性率とも呼ばれる。式(50)，(51)を比較すれば $\nu=\lambda/2(\lambda+\mu)$ であることが分かる。式(50)あるいは式(51)において両辺の偏差部分とスカラー部分をとってみると，次のことが分かる。

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=2\,\mu\tilde{\boldsymbol{E}},\ p=-\kappa v \quad \cdots\cdots(52)$$

ただし $p=-\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma}/3$, $v=\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{E}/3$ であり，$\kappa=(2\,\mu+3\,\lambda)/3$ とおいた。κ は体積圧縮率と呼ばれている。以上より次のことが分かった。すなわち等方性を持つ線形材料ではせん断応力（＝偏差部分）$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ によってはせん断変形（＝偏差部分）$\tilde{\boldsymbol{E}}$ のみが引き起こされ，静圧力（＝スカラー部分）$p\boldsymbol{I}$ によっては拡大縮小（スカラー部分）$v\boldsymbol{I}$ のみが引き起こされる。これも座標変換に不変な命題である。またダイレイタンシーが非線形効果であることもこれより分かる。式(52)を仕事の式(44)に代入すると，

$$W=2\,\mu\|\tilde{\boldsymbol{E}}\|^2+\kappa v^2 \quad \cdots\cdots(53)$$

となる。ただし $\|\tilde{\boldsymbol{E}}\|^2=\tilde{\boldsymbol{E}}:\tilde{\boldsymbol{E}}(=\mathrm{Tr}\,\tilde{\boldsymbol{E}}^2)$ である。これが任意の変形で正である必要十分条件は，

$$\mu\geqq0,\ \kappa\geqq0 \quad \cdots\cdots(54)$$

である。すなわち，せん断変形はせん断応力の方向に生じ，圧縮力によっては体積が減少することである。

5. ま と め

前節までにおいてテンソルの不変分解を中心にして，座

注1) 一般に，力学の諸法則（質量，運動量，角運動量，エネルギーの保存則等）のみからは導かれず，実験や測定によって定まるそれぞれの物質独自の性質を表す方程式がすべて構成方程式と呼ばれている。本文の場合は，関係するテンソル量が $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{E}$ のみの場合を考えている。なお，これらのほかに温度，間隙率，含水率等のスカラー量が含まれていても以下の議論に変わりはない。しかし，時間が含まれている場合，すなわち現在の $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{E}(t)$ 以外に過去の状態のテンソル $\boldsymbol{\sigma}(t')$, $\boldsymbol{E}(t')$ が関係する場合は別の定式化が必要である。

注2) $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{E}$ の関係に温度，間隙率，含水率などのスカラー量が含まれている場合は式(48)，(49)における α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 がそれらをも含む関数として表される。式(48)，(49)の形は不変であって，最も一般なものである。

注3) ダイレイタンシーは土の内部の離散構造に基づくものであるから連続体力学では扱えないと考えるのは誤りである。金属も結晶からなっているのであり，あらゆる連続体は微視的には離散構造である。それを連続体とみなす限り，本文のような一般論のわく組に入るのである。流体力学でも，高分子溶液の高分子相互作用のためせん断流によって静圧力が発生する現象（ワイセンベルク(Weissenberg)）効果，あるいは法線応力効果 (normal stress effect)）が存在するが，これもテンソルにより不変な形に表現される。あるいは剛体粒子の流れにおける粒子同士の衝突による体積増加も連続体力学のわく内で記述できる[3]。なお，ダイレイタンシーは等方線形構成方程式で表せないので異方性の結果であると考えるのも誤りである。異方性材料でダイレイタンシーが顕著であるかもしれないが，均一な砂にも生じるのであるから，等方性のわく内で扱えるはずである。

標変換不変な概念とその表現法を土質力学に即して述べたつもりである。異なる実験者による異なる装置を用いた実験の結果を比較し得るためには，結果をこのような座標変換に不変な形でまとめなければならないことはいうまでもない。特に重要なことは，これまでの議論が特定の材料，特定の実験状況に全くよらずに，ただ**物理現象が人為的な座標系によらないという要請**のみから導かれたことである。したがって，これまでの結果はいかなる場合にも絶対に従うべき論理のわく組を与えているといえる。なお，ここでは一様な変形を直交座標で記述することのみを扱ったが，変形が一様でない場合，曲線座標系を用いる場合，異方性を表現する場合等についても同様な，しかし，より高度な考察ができる[4),5)]。

参考文献

1) 小田匡寛：純粋せん断，単純せん断，土と基礎，Vol. 27, No. 9, pp. 55–56, 1979
2) 金谷健一：粒状体の流動の基礎理論（第1報，非圧縮性の流れ），日本機械学会論文集，Vol. 45, No. 392, pp. 507–514, 1979
3) 金谷健一：粒状体の流動の基礎理論（第2報，発達した流れ），日本機械学会論文集，Vol. 45, No. 392, pp. 515–522, 1979
4) 金谷健一：粒状体の速度場の理論―関連流動則と特性曲面―，土質工学会論文報告集，Vol. 19, No. 4, pp. 103–112, 1979
5) 金谷健一：粒状体の速度場の理論―弾塑性理論と不連続波動―，土質工学会論文報告集，Vol. 19, No. 4, pp. 113–120, 1979
6) 金谷健一：粒状体の粒子モデルと仮想仕事の原理，土質工学会論文報告集，Vol. 20, No. 3, pp. 111～116, 1980

付録　無限小変形と有限変形との相違

本文で述べたことは実は微小変形，正確には**無限小変形**を前提にしている。例えば式(23)のようにテンソルを和に分解することが概念的には無限小変形を意識しているといえる。すなわち式(4)にもどれば（$\boldsymbol{r}_0=0$ として）変形を表すものは元来変換 $\boldsymbol{A}$ である。例えば $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ で表される変換を次々に合成すれば，これは結果として積 $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$ なる変換を加えたことに等しい。しかし，それぞれが恒等変換に近いとして $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_3$ とおき，変形テンソル $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ が微小だとすれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_3)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_2)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_1)\\&=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3)+(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2,\ \boldsymbol{F}_3\ \text{の2次以上の項})\end{aligned}\quad\cdots\cdots(\text{付}1)$$

となり，高次の微小量を無視すれば合成された変換の変形テンソル $\boldsymbol{F}$ が和として $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ と表せるのである。すなわち無限小変形に限って変形テンソルは重ね合わせの法則が成立し，その全体がベクトル空間となり，直交直和分解が概念的に変形そのものと幾何学的に対応するのである。このことを正確に述べれば式(23)の不変分解は $\boldsymbol{F}$ をそれぞれせん断変形，拡大縮小，回転を**生成する無限小作用素** $\tilde{\boldsymbol{E}}$, $(1/3)v\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{\Omega}$ に分解しているのである。ここに無限小作用素 $\boldsymbol{L}$ の生成する変形とは変形の時間変化が微分方程式，

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{r}\quad\cdots\cdots(\text{付}2)$$

で表される変換のことである。この解は，

$$\boldsymbol{r}=e^{t\boldsymbol{L}}\boldsymbol{r}(0)\quad\cdots\cdots(\text{付}3)$$

である。ただし，行列の指数関数は，

$$e^{t\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{L}+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{L}^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k_1}\boldsymbol{L}^k\quad\cdots\cdots(\text{付}4)$$

である。したがって偏差部分 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ の生成する変形は $\exp(t\tilde{\boldsymbol{E}})$ であり，これは体積変化が0の有限のせん断変形を表す。なぜなら，体積変化は行列式で表され，

$$\det e^{t\tilde{\boldsymbol{E}}}=e^{t\mathrm{Tr}\tilde{\boldsymbol{E}}}=1\quad\cdots\cdots(\text{付}5)$$

となるからである。同様にスカラー部分 $v\boldsymbol{I}$ の生成する変形は $\exp(tv\boldsymbol{I})=(\exp tv)\boldsymbol{I}$ であり，体積 V が，

$$V(t)=V(0)\exp(tv)\quad\cdots\cdots(\text{付}6)$$

となる有限の拡大縮小であって，$v(=\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{E})$ は体積変化率

$$v=\dot{V}/V\ (=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\log V)\quad\cdots\cdots(\text{付}7)$$

となっているのである。また反対称部分 $\boldsymbol{\Omega}$ の生成する変形は $\exp(t\boldsymbol{\Omega})$ と表され，これは有限の回転を表す直交行列である。なぜなら，

$$(e^{t\Omega})^T(e^{t\Omega})=e^{t\Omega^T}e^{t\Omega}=e^{-t\Omega}e^{t\Omega}=\boldsymbol{I}\quad\cdots\cdots(\text{付}8)$$

となるからである。これらは**連続群論**において**リー群**（Lie group）と**リー代数**（Lie algebra）との関係として知られているものである。

以上のことをまとめると，無限小変形の立場では変形の合成は和で表され，せん断変形は偏差部分，拡大縮小はスカラー部分，回転は反対称部分で表されるといえるが，有限変形の立場をとれば変形の合成は積で表され，せん断変形は行列式1の変換，拡大縮小は恒等変換の定数倍，回転は直交行列による変換で表されることになる。本文の内容自体は数学的形式としてどちらの立場からみても厳密に正しいのであるが，有限変形の立場から理解するためには $\boldsymbol{F}$ を変形速度と解釈すべきであり，$\boldsymbol{u}$ を速度とみなし，式(26)は速度をせん断変形の速度と拡大縮小の速度と回転の速度とに分解したものと考えなければならない。同様に式(43)，(44)は仕事率 W の表現と解釈しなければならないことになる。土質力学においては通常，微小変形のみを考えれば十分であると思われるので，本文ではこの点にふれなかったが，有限変形の実験結果をまとめる場合にはこのような概念上の相違に十分注意を払う必要があると思われる。

（原稿受理　1980. 3. 27）