



土の構成式入門

5. 弾塑性体理論と適用 (その 1)

まつ 井 たもつ あ べ のぶ はる
松 井 保* 阿 部 信 晴**

5.1 まえがき

弾塑性理論は、この約60年の間に金属の分野を中心にして発展してきたが、その土への適用が約25年前に試みられて以来、その研究は年ごとに盛んになってきた。最近では、金属の分野の種々のモデルにおける概念がほとんどすべて土へ適用されていると感じられるほど多種多様な土の構成モデルが提案されている。このことは、最近行われた土の構成式に関連したいくつかの国際会議等のプロシーディング^{1)~10)}を見れば、一目りょう然であり、土の構成式の主流は弾塑性理論に基づくものであるといっても過言ではない。

弾塑性理論と一口に言っても、必ずしも一つの明確な理論が存在するわけではなく、種々の概念や仮説をもとにして多種多様な理論の展開がなされており、非常に複雑である。さらに、我々の興味を中心とする土の構成式への理論展開をも含めて考えると、その内容は簡単にはとても理解できないほど複雑なものとなっている。この点が、土質工学を専門とする多くの人々にとって弾塑性理論が取付きにくくなっている最大の原因であろう。

本文では、まず、弾塑性理論の基本的な考え方について幾分詳しく述べ、これまでに提案されている土の弾塑性構成式の分類とその概略を示す。つぎに、弾粘塑性理論の基本的な考え方およびそれに基づく土の構成式について述べ、更に若干の適用例を示す。これらの記述においては、比較的新しくなじみの少ない概念や理論については少し詳しく述べるようにしてあるが、幾分むずかしく感じられる部分もあるかもしれない。しかし、適宜既往の解説^{11)~14)}を参照されれば、より一層理解が進むものと思われる。

5.2 基本曲面

弾塑性理論においては、一般に、六次元(あるいは九次元)の応力空間内に以下に述べる四つの曲面が存在するものと仮定する。ただし、簡単のため、これらの曲面は二次元応力面で図示することにする。

① 降伏曲面 図-5.1に示すように、応力空間の原点を含む弾性域とその外側の塑性域を区分する閉曲面である。したがって、弾塑性体は降伏曲面内では負荷の方向に関係

なく純粋に弾性的な挙動を示す。

② 負荷曲面 弾塑性体に継続して塑性変形を生ぜしめるに必要な応力状態を規定する応力空間の閉曲面である(図-5.2参照)。言い換えれば、負荷曲面は与えられた応力増分に対して弾塑性体の負荷、除荷状態を規定することになる。

③ 塑性ポテンシャル曲面 塑性ひずみ増分ベクトルの方向を規定する応力空間の閉曲面である。すなわち、この曲面上の応力点に対して、図-5.3に示すように、外向き法線方向が塑性ひずみ増分ベクトルの方向を与える。

④ 破壊曲面 弾塑性体の破壊状態の応力点が形成する応力空間の曲面である。破壊の定義は必ずしも確立されているとは言えないが、材料がそれ以上のせん断応力に耐えられないような最大のせん断応力がモビライズされている状態を破壊とするのが一般的であろう。しかし、土の場合、いわゆる限界状態(critical state)に至る際に、図-5.4に示すような二つのモードがある。一つは、応力経路 CDE のように、E 点の破壊状態が同時に限界状態となるものである。ほかの一つは、応力経路 FGH のように、G 点で最大せん断応力がモビライズされた後、ひずみ軟化して H 点に至り限界状態に達するものである。この場合の G 点の状態は破断状態(rupture state)と呼ばれることがある。

以上の四つの曲面を数学的に表現したスカラー関数がそれぞれ降伏関数(yield function), 負荷関

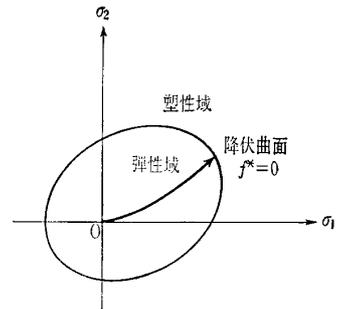


図-5.1 降伏曲面

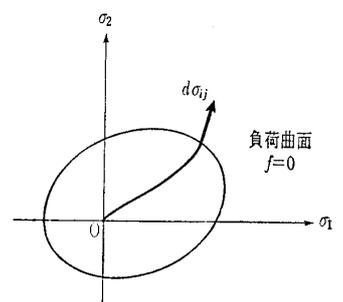


図-5.2 負荷曲面

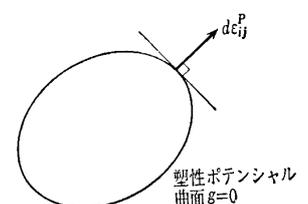


図-5.3 塑性ポテンシャル曲面

*大阪大学助教授 工学部

**大阪大学助手 工学部

講座

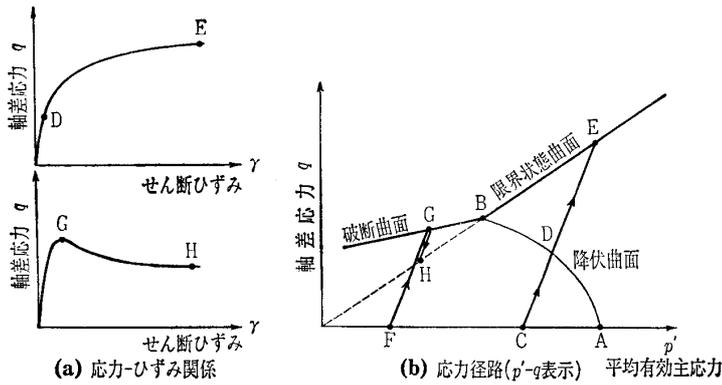


図-5.4 土の破壊モード

数 (loading function), 塑性ポテンシャル関数 (plastic potential function) および破壊規準 (failure criterion) と呼ばれる。降伏曲面, 負荷曲面, 塑性ポテンシャル曲面およびそれらの関数に対して, 以下の数学的展開のために, 取りあえず次に示す条件を課しておくが, これらは後に再び議論される。①これらの曲面は凸面である。②これらの関数は閉曲面の内部で負, 外部で正と定義される。③これらの関数は, 含まれる変数について定義される領域で正則 (連続微分が可能) である。

Q: 降伏関数と負荷関数の区別について。

A: 通常, この両者は特に区別することなく, 「降伏関数」という用語を用いることが多い (逆に英文では「loading function」という用語が多く用いられる)。また, 降伏関数に対して初期降伏関数 (initial yield function), 負荷関数に対して後続の降伏関数 (subsequent yield function) とすることもある。このような事情は, 降伏関数と負荷関数が常に一致し両者を区別しなくとも混乱が生じないことによっている。しかし, ここでは降伏関数と負荷関数を厳密に区別して用いることにした。理由は, その方が次項で述べる構成法則において, それぞれのはたす役割が明確になるからであり, また, 両者が一致しない理論を後に取上げるからである。

5.3 構成法則

本節では, 土に対して広く適用されているポテンシャル理論に基づく塑性硬化弾塑性体の構成法則に関する基本的な概念および増分形構成関係について述べる。

5.3.1 負荷関数と負荷基準 (loading function and criterion of loading)

塑性状態にある弾塑性体に更に負荷を続けると, 一般に硬化が生じて塑性変形が進行し, 新たな塑性状態に移行する。すなわち, 負荷曲面は負荷応力に対して常に応力点とともに応力空間内を移動, 拡大する。したがって, 負荷関数はこのような負荷曲面の移動, 拡大を表現しうるものでなければならない。負荷曲面の位置や形状は硬化の程度に

よって変化するが, 通常, 弾塑性体がそれまでに受けてきた塑性負荷履歴に依存すると考えられる。

負荷関数の一般形は次式で与えられる。

$$f = f(\sigma_{ij}, \xi_n) \quad n=1, 2, \dots, N \quad (5.1)$$

ここに, σ_{ij} は応力テンソル, ξ_n は塑性変形の進行に伴って変化する N 個のスカラー量またはテンソル量で, 負荷履歴パラメーター (loading history parameter) と呼ばれる。負荷履歴パラメーターとしては, 通常, 塑性ひずみ ϵ_{ij}^p と硬化パラメーター κ が用いられる。したがって, 式 (5.1) は次式のように表される。

$$f = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa) \quad (5.2)$$

硬化パラメーター κ は硬化の程度すなわち負荷曲面の大きさに関係し, 塑性ひずみとともに変化する。したがって,

$$d\kappa = h_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (5.3)$$

特に, h_{ij} として $h_{ij} = \sigma_{ij}$ とおくと, κ は塑性仕事 (plastic work) に対応し, 物理的な意味をもつ。これを加工硬化パラメーター (work hardening parameter) と呼ぶ。一方, h_{ij} を塑性ひずみ ϵ_{ij}^p やその増分 $d\epsilon_{ij}^p$ とするとき, κ はひずみ硬化パラメーター (strain hardening parameter) と呼ばれる。土のひずみ硬化パラメーターとしては, 次式で表される塑性体積ひずみ v^p が用いられることが多い。

$$d\kappa = d\epsilon_{ij}^p \delta_{ij} = dv^p \quad (5.4)$$

ここに, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ ($i=j$ のとき $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ のとき $\delta_{ij}=0$) である。

弾塑性体が塑性状態にあるとき, 応力点は常に負荷曲面上にある。したがって,

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa) = 0 \quad (5.5)$$

そこで, 塑性状態にある要素に応力増分 $d\sigma_{ij}$ が作用する場合を考えよう。負荷関数の全微分は

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa \quad (5.6)$$

いま, ある時刻で $f=0$, $df < 0$ の状態を考えると, 次の瞬間には $f < 0$ となり, 応力点は負荷曲面の内部に移行する。このような過程を除荷 (unloading) という。このとき, 塑性ひずみは生じないので $d\epsilon_{ij}^p = 0$ であり, 式 (5.3) より $d\kappa = 0$ となる。結局, 除荷の基準は次式で表される。

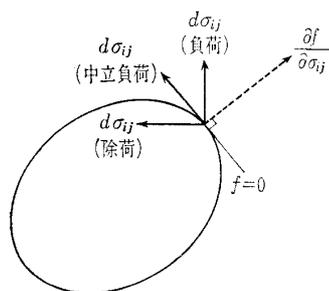
$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad f=0 \quad \text{「除荷」} \quad (5.7)$$

一方, 次のような場合を中立負荷 (neutral loading), 負荷 (loading) という。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad f=0 \quad \text{「中立負荷」} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \quad f=0 \quad \text{「負荷」} \quad (5.9)$$

以上のように, 負荷関数は 応力増分 $d\sigma_{ij}$ に対して負荷基



図—5.5 負荷曲面と負荷, 除荷の関係

準を与える重要な役割をになっており, このことが負荷関数と呼ばれるゆえんである。

これらの基準の幾何学的意味は次のようである。すなわち, 図—5.5に示すように, 応力増分ベクトルの方向が負荷曲面上の応力点に引いた接平面の外側か, 内側か, 接平面上かによっ

て, それぞれ負荷, 除荷, 中立負荷となる。

5.3.2 流れ則 (flow rule)

1) 負荷関数が単一の場合

流れ則は増分理論の応力-ひずみ関係であり, 一般に非関連流れ則 (non-associated flow rule) の形式では次式のようにになる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0 \quad \dots\dots\dots(5.10)$$

ここに, g は塑性ポテンシャル関数, λ は正のスカラーパラメーターである。式(5.10)の表現はポテンシャル理論の基本的な前提であり, 塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$ が関数 g の応力 σ_{ij} に関する勾配として決定されることを意味している。この関係を認めれば, 塑性ひずみ増分の主軸は応力の主軸に一致する。一般に, ベクトル場がスカラー関数の勾配として表されるとき, そのスカラー関数をポテンシャルというが, このことが式(5.10)のスカラー関数 g を塑性ポテンシャルと呼ぶゆえんである。

λ は負荷関数に対する Prager の適応の条件 (consistency condition), すなわち塑性負荷過程にある応力点は常に負荷曲面上にあるという条件から決定される。すなわち,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad \dots\dots\dots(5.11)$$

また, $\kappa = \kappa(\varepsilon_{ij}^p)$ と仮定し, 式(5.10)を用いれば, 式(5.11)より,

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \quad \dots\dots\dots(5.12)$$

式(5.12)において, 次式のようにおき,

$$\frac{1}{H} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad \dots\dots\dots(5.13)$$

それを式(5.12)に代入すれば, 塑性ひずみ増分は次式のようにになる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = H \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dots\dots\dots(5.14)$$

ここに, H は硬化を表す関数であり, 硬化関数 (hardening function) と呼ばれる。負荷となる応力増分 $d\sigma_{ij}$ に対して $(\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} > 0$ となるので, H は正の値をとらな

ければならない。

式(5.14)の表現は Melan¹⁵⁾ によって最初に用いられたが, 関連流れ則 (associated flow rule) の形式では, von Mises¹⁶⁾ によって塑性ポテンシャル理論として示され, また Prager¹⁷⁾ も同様な表現を示している。

Q: 関連流れ則および非関連流れ則とは?

A: 関連流れ則は, 負荷関数と塑性ポテンシャル関数が一致すると仮定する場合の流れ則である。一方, 両者が一致しないと仮定する場合のそれを非関連流れ則という。

2) 負荷関数が複数の場合

弾塑性体に複数の負荷関数が存在する場合の負荷基準や流れ則を考える。正則な負荷関数を $f_p (p=1, 2, \dots, n)$ とする。ある応力点において, 複数の負荷関数 f_p のうちただ一つが 0 でほかを負の場合, 流れ則は式(5.14)となり問題はない。一方, ある応力点で二つ以上の負荷関数が 0 となる場合には, 塑性ひずみ増分ベクトルの方向は唯一に定義されず, この応力点は特異点となる。しかし, たとえこのような特異点においても, 負荷基準が各々の負荷関数に独立に適用できるとするならば, 全塑性ひずみ増分は個々の負荷関数と塑性ポテンシャル関数から決定される塑性ひずみ増分の和として次式で与えられる。

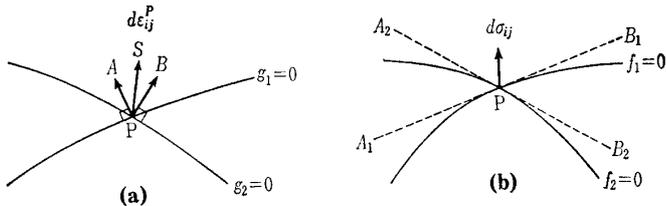
$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{p=1}^n C_p H_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right) \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dots\dots\dots(5.15)$$

ここに, $f_p < 0$ あるいは $(\partial f_p / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} < 0$ に対して $C_p = 0$, $f_p = 0$ および $(\partial f_p / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} \geq 0$ に対して $C_p = 1$, g_p : f_p に対する塑性ポテンシャル関数

式(5.15)は, Koiter¹⁸⁾ が関連流れ則を仮定して導いた式を形式的に非関連流れ則による表現としている。

図—5.6 は式(5.15)の幾何学的意味を二つの負荷関数 ($p=2$) の場合について示したものである。図—5.6(a)に示されるように, 塑性ひずみ増分ベクトルは, 塑性ポテンシャル関数 g_1, g_2 の交点 P におけるそれぞれの外向き法線ベクトル PA, PB によって形成される扇形状の領域 APB 内の PS 方向に唯一に定義される。また, 図—5.6(b)において, 負荷関数 f_1, f_2 の交点 P における接線をそれぞれ A_1B_1, A_2B_2 とすれば, 扇形 A_2PB_1 は $f_1=0, f_2=0$ の外側領域であり, この扇形内の応力増分は負荷関数 f_1, f_2 に対して負荷となり, 両者による塑性ひずみ増分が図—5.6(a)の PS 方向に生じることになる。これに対し, 扇形 A_1PA_2 および B_1PB_2 内の応力増分はそれぞれ一つの負荷関数 f_1 および f_2 に対して負荷となり, 図—5.6(a)の PA および PB 方向に塑性ひずみ増分が生じる。Sander¹⁹⁾ によれば, 前者の領域 (A_2PB_1) は全負荷領域 (region of total loading), 後者の領域 (A_1PA_2 および B_1PB_2) は部分負荷領域 (region of partial loading) と呼ばれる。また, 扇形 A_1PB_2 内の応力増分では除荷が生じる。

講 座



図—5.6 二つの負荷曲面が存在する場合の負荷，除荷の関係

複数の負荷関数を用いた土のモデル化は広く行われており，俗に Koiter 流の負荷関数族を用いたモデルと呼ばれる。最近，Poorooshasb^{20), 21)}はこのような負荷曲線族を交差降伏曲面族 (intersecting yield surfaces) と呼んでいる。

5.3.3 硬化則 (hardening rule)

塑性ひずみ増分 $dε_{ij}^p$ は，式(5.13)および式(5.14)から明らかのように，塑性変形の進行に伴う負荷曲面および塑性ポテンシャル曲面の変化を規定することによって最終的に決定される。このような負荷曲面の変化を規定するものが硬化則である。硬化則は材料の挙動を十分反映したものであることは当然であるが，その表現は具体的な解析を可能にするために簡潔でなければならない。最近，繰返し挙動や負荷経路が急激に変化する挙動にも適用可能な硬化則の必要性が高まっており，硬化則に関する研究は著しい進展を見せている。以下では，広く用いられている基本的な硬化則について述べよう。

1) 等方硬化則 (isotropic hardening rule)

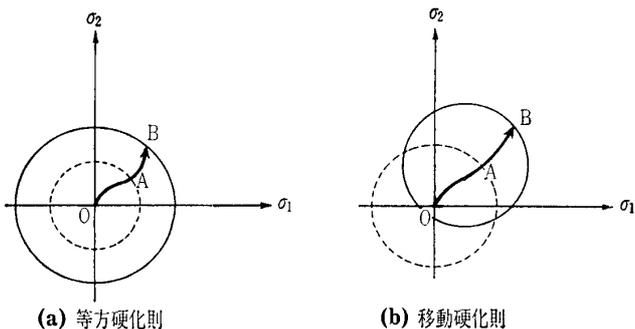
この硬化則では，図—5.7(a)に示すように，負荷曲面の大きさは硬化に伴って増大するが，その形状および中心は変化しない。したがって，負荷関数 $f(σ_{ij}, ε_{ij}^p, κ)$ は塑性ひずみ $ε_{ij}^p$ に独立となり，次式の形で与えられる。

$$F=f(σ_{ij})-k(κ)=0 \dots\dots\dots(5.16)$$

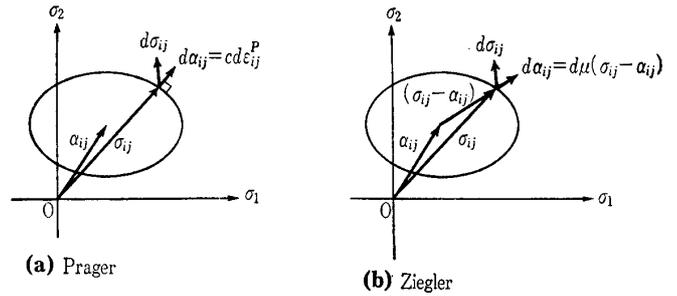
ここに， $k(κ)$ は $κ$ の単調増加関数である。この等方硬化則は Bauschinger 効果を表現できないので，反転負荷 (reverse loading) には適用し難い。

2) 移動硬化則 (kinematic hardening rule)

この硬化則では，図—5.7(b)に示すように，負荷曲面の大きさおよび形状は硬化に伴って変化しないが，その中心が移動する。負荷曲面の中心を $α_{ij}$ とすると，この場合の負荷関数は次式の形で与えられる。



図—5.7 硬化則



図—5.8 移動硬化則

$$F=f(σ_{ij}-α_{ij})-k^*=0 \dots\dots\dots(5.17)$$

ここに， k^* は定数である。この硬化則によれば，Bauschinger 効果や異方性を考慮することができる。

負荷関数の決定は $α_{ij}=0$ の時の形状と $α_{ij}$ の硬化に伴う変化を規定しなければならない。後者を規定する方法については基本的に二つの考え方がある。

i) Prager²²⁾の考え方 図—5.8(a)に示すように， $dα_{ij}$

は塑性ひずみ増分 $dε_{ij}^p$ に比例すると仮定する。すなわち，

$$dα_{ij}=cdε_{ij}^p \dots\dots\dots(5.18)$$

ここに， c は定数である。このような Prager 流の移動硬化則は Ishilinskiy²³⁾によっても提案されている。一方， c を定数としない非線形の移動硬化則が Kadashevich・Novozhilow²⁴⁾， Eisenberg・Phillips²⁵⁾らによって，さらに一般的な非線形硬化則が Mroz²⁶⁾， Backhaus²⁷⁾らによって提案されている。

ii) Ziegler²⁸⁾の考え方 図—5.8(b)に示すように，中心の移動は中心 $α_{ij}$ と負荷応力 $σ_{ij}$ を結ぶ方向に生じると仮定する。すなわち，

$$dα_{ij}=dμ(σ_{ij}-α_{ij}) \dots\dots\dots(5.19)$$

ここに， $dμ$ は正のスカラーパラメーターである。

3) 複合硬化則 (combined hardening rule)

一般に，複合硬化則としては，硬化に伴う負荷曲面の等方的な拡大や平行的な移動，さらにその回転と変形を考慮することになる。しかし，通常，複合硬化則と言えば，負荷曲面の等方的な拡大と平行的な移動を考慮した硬化則，すなわち上述の1), 2)の硬化則を組合せたものをさすことが多い。この場合の負荷関数は次の形で与えられる。

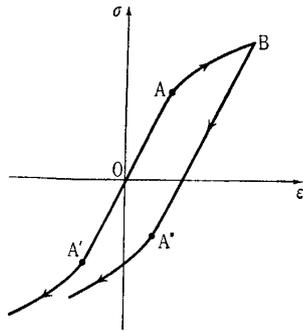
$$F=f(σ_{ij}-α_{ij})-k(κ)=0 \dots\dots\dots(5.20)$$

Q: Bauschinger 効果とは？

A: 図—5.9に示すように，初期降伏点をそれぞれ A, A' とする。A から B まで荷重を増加させて塑性変形がある程度進行した後，荷重を逆方向に加えて反転負荷を与えると，後続の降伏点 A'' が現れる。この降伏応力 (A'') は初期降伏応力 (A, A') よりも小さくなる。この現象を Bauschinger 効果という。

5.3.4 Drucker の仮説

前節において，降伏曲面，負荷曲面，塑性ポテンシャル



図—5.9 Bauschinger 効果

曲面およびそれらの関数に対して、数学的展開のために取りあえずいくつかの条件を課しておいた。しかし、これらの曲面（関数）に対して、本来、弾塑性体としての挙動を正しく記述するために課すべき条件が存在すると考えられる。このような条件の一部をなすものが Drucker の仮説である。

Drucker²⁹⁾は単軸引張り状態下の弾塑性体の挙動の安定性に対する考察から、その安定な挙動についての一般的な意味づけを行い、それに基づいて弾塑性体の構成関係を規定した。この Drucker の仮説は次の2点に要約される。

- ① 応力に変化が生じるとき、付加された外力のなす仕事は負にならない。これは局所的安定条件（唯一性条件）である。
- ② 任意の応力状態から応力が変化して再び元の応力状態に帰るサイクルを考えると、そのような変化を起こす原因となった外力のなした正味仕事は負にならない。これは大局的安定条件で、最大塑性仕事の原理と呼ばれる。

これらの仮説はそれぞれ次式で表現できる。

$$d\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \dots\dots\dots(5.21)$$

$$(\sigma_{ij}^f - \sigma_{ij}^o)d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \dots\dots\dots(5.22)$$

ここに、 σ_{ij}^f と σ_{ij}^o はそれぞれ負荷曲面上と元の応力状態である。

式(5.21)、式(5.22)で表される条件から、負荷曲面（降伏曲面）と塑性ひずみ増分に関する重要な性質が次のように導き出される。

- ① 負荷曲面は凸曲面でなければならない。
- ② 負荷曲面の滑らかな（正則な）部分では、塑性ひずみ増分は負荷曲面の外向き法線ベクトルでなければならない。すなわち、

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \lambda > 0 \dots\dots\dots(5.23)$$

これを塑性ひずみ増分の直交則（normality rule）という。一方、負荷曲面の特異点では、その点に集っている曲面の外向き法線によって囲まれる扇形（一般には錐体）の内部に含まれるベクトルでなければならない。

- ③ 塑性ひずみ増分は応力増分の一次関数で表せなければ

ならない。

5.3.5 Drucker の仮説を満足しない弾塑性理論

前項で述べた Drucker の仮説を満足しない弾塑性理論も種々考えられている。表—5.1は、降伏関数 f^* と塑性ポテンシャル関数 g が負荷関数 f に一致すると仮定するか否かによって、それらを四つのグループに分類したものである。

(I)のグループは Drucker の仮説から規定される弾塑性理論そのものである。すなわち、凸面性を有する負荷関数 f を降伏関数 f^* 、塑性ポテンシャル関数 g に等しいとすれば、Druckerの仮説は満足される。また、このタイプの弾塑性理論に基づく構成関係式を用いるかぎり、変分原理や弾塑性境界値問題に対する解の唯一性は保証される³⁰⁾。

(II)のグループは、負荷関数と塑性ポテンシャル関数が異なる、いわゆる非関連流れ則に基づく弾塑性理論であり、実験結果に基づく土のモデル化に広く用いられている。

(III)、(IV)のグループは、負荷曲面と異なる降伏曲面によって弾性域を規定するという概念に基づく弾塑性理論である。このような考え方はPhillipsら^{31)、32)}によって初めて示され、さらにGreenstreet・Phillips³³⁾はこの概念を発展させて、弾性域が一点に縮退した弾塑性理論、すなわち降伏関数が存在せずに反転負荷の始めから塑性ひずみの発生する弾塑性理論を展開した。この考え方は繰返し負荷を取扱う場合には重要であり、Pender³⁴⁾、Mrozら³⁵⁾、Dafalias³⁶⁾をはじめとして、多くの土の繰返しモデルに用いられている。

Q：降伏曲面と負荷曲面が一致しない弾塑性モデルとは？、

A： $f^* \neq f$ の意味を一次元応力状態を例として考える。

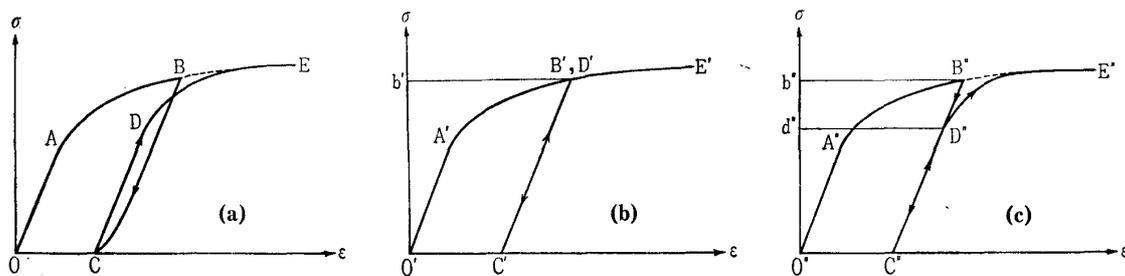
図—5.10(a)は実際の弾塑性応力-ひずみ関係を示している。すなわち、 \overline{OA} 間ではほぼ線形であるが、A点で塑性変形が著しくなる。B点まで負荷された後、荷重を完全に取除くと、応力はB→Cの径路に沿って減少し、OCの塑性ひずみが生じる。Cから再び載荷すると、 \overline{CD} 間ではOAにほぼ平行になるが、Dの近傍で曲がり始めEに至る。 \overline{OABE} は途中で除荷しない場合の応力-ひずみ曲線である。

図—5.10(b)は、図—5.10(a)の応力-ひずみ関係を(I)、(II)のタイプの弾塑性理論によりモデル化したものを示している。すなわち、 $f^* = f$ と仮定すると、B'における降伏曲面はO'b'で表される（一次元の応力空間は直線となるので、降伏曲面は線分で表される）。したがって、

表—5.1 弾塑性理論の分類

グループ	f^*, g
I	$f^* = f, g = f$
II	$f^* = f, g \neq f$
III	$f^* \neq f, g = f$
IV	$f^* \neq f, g \neq f$

講 座



図—5.10 一次元応力-ひずみ関係のモデル化

B' から除荷が始まると直ちに弾性域に入る。再負荷後 D' で塑性域に入るが、弾性変形時に降伏曲面の大きさは変化しないから D' は B' と一致し、応力-ひずみ曲線は D' で急に折れ曲がる。したがって、図—5.10(a)にみられる滑らかな弾塑性遷移過程を表現できない。

一方、図—5.10(c)は、(III)、(IV)のタイプの弾塑性理論による同様なモデル化を示している。図中の B'' における負荷曲面と降伏曲面はそれぞれ O''b'' と O''d'' である。B'' から C'' への除荷時には、図—5.10(b)の場合と同様に弾性的に挙動し、降伏曲面は変化しない。しかし、再負荷後には D'' で塑性域に入り、E'' に至る。この場合、C''D'' が弾性域での挙動である。以上のように、このモデル化では図—5.10(a)にみられる滑らかな弾塑性遷移過程を表現できる。ただし、負荷曲面は B''D'' の除荷領域で O''b'' から O''d'' に縮小することが要請される。また、初期降伏時に負荷曲面と降伏曲面は一致していなければならない。この条件は一次元では問題とならないが、多次元ではこれらの曲面の形状に関する制約となる。

上述の(II)、(III)、(IV)のグループの弾塑性理論、さらには弾性特性が塑性変形履歴によって変化するという概念 (elastoplastic coupling) を考慮した弾塑性理論は Drucker の仮説を満足しない。このような立場から見れば、Drucker 流の弾塑性理論がむしろ特殊なケースであり、Drucker の仮説がむしろ弾塑性理論に過剰な制約を課しているように見える。事実、Ilyushin³⁷⁾、Green・Naghdi³⁸⁾、Justusson・Phillips³⁹⁾らはそのような批判的見解を述べている。しかし、Drucker の仮説の評価をも含めて弾塑性理論を体系的に確立するためには、今後の解明に待つ点が少なくない。

5.3.6 弾塑性応力-ひずみ増分関係のマトリックス表示

構成式を土質工学に利用する上での最終目標は、土の構成式と場の支配方程式を用いて土質工学上の境界値問題を解くことである。しかし、一般に、閉じた形の解析解を求めることはほとんど不可能に近い。したがって、高い精度の近似解析法を用いなければならない。現在、有限要素法は最も有力な解析法であろう。

増分理論に基づく弾塑性構成関係式は応力増分とひずみ増分との関係として表され、通常、応力増分が規定された

ときに対応するひずみ増分が与えられるものである。しかるに、広く用いられる有限要素法は変位場を未知数とする変位法であるので、応力-ひずみ関係の逆関係が必要となることが多い。そこで、使用の便を考慮してマトリックス表示による逆関係の応力-ひずみ関係を以下に示す。

i) 単一の負荷関数 $f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa) = 0$ とこれに対応する塑性ポテンシャル関数 g が与えられている場合

$$d\sigma' = \left[D_e - \frac{D_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\}} \right] d\epsilon \quad \dots(5.24)$$

ここに、

$$A = -\frac{1}{\lambda} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) d\kappa + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right\}^T d\epsilon^p \right\} \dots\dots\dots(5.25)$$

D_e : 弾性マトリックス

ii) 二つの負荷関数 $f_1(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa_1) = 0$, $f_2(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa_2) = 0$ とこれに対応する塑性ポテンシャル関数 g_1, g_2 が与えられている場合、

$$d\sigma' = \left[D_e - \frac{(A_2 + D_{22})\bar{d}_1 d_1^T + (A_1 + D_{11})\bar{d}_2 d_2^T}{(A_1 + D_{11})(A_2 + D_{22}) - D_{12} \cdot D_{21}} \right. \\ \left. - \frac{D_{12}\bar{d}_1 d_2^T - D_{21}\bar{d}_2 d_1^T}{D_{12} \cdot D_{21}} \right] d\epsilon \quad \dots\dots(5.26)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= D_e \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma'} \right\}, & d_2 &= D_e \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma'} \right\} \\ \bar{d}_1 &= D_e \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma'} \right\}, & \bar{d}_2 &= D_e \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma'} \right\} \\ D_{11} &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma'} \right\}, \\ D_{22} &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma'} \right\} \\ D_{12} &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma'} \right\}, \\ D_{21} &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma'} \right\} \\ A_1 &= -\frac{1}{\lambda_1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \kappa_1} \right) d\kappa_1 + \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon^p} \right\}^T d\epsilon^p \right] \\ A_2 &= -\frac{1}{\lambda_2} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \kappa_2} \right) d\kappa_2 + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \epsilon^p} \right\}^T d\epsilon^p \right] \end{aligned} \right\} \dots(5.27)$$

iii) 等方硬化則と Prager の移動硬化則に従う単一の負

荷関数 $f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij}, \kappa)=0$ とこれに対応する 塑性ポテンシャル関数 g が与えられている場合

$$d\sigma' = \left[D_e - \frac{D_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e}{A + c \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\}} \right] d\epsilon \quad \dots\dots\dots(5.28)$$

ここに,

$$A = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) d\kappa \quad \dots\dots\dots(5.29)$$

c : 式(5.18)における定数

5.4 土の弾塑性構成式

5.4.1 土質材料への適用の歩み

表—5.2 は弾塑性理論の歴史的流れの概略を示したものである。本項では、紙数の都合もあるので、土質材料への適用に関する流れを概観することにしよう。

土の弾塑性構成関係式の研究は Drucker ら⁴⁰⁾の報告に始まると考えられる。すなわち、ここに Drucker の弾塑性理論に基づく理論的な指針が示されていた。その後、Roscoe ら⁴¹⁾は自らの実験的研究や Henkel や Parry らの実験的研究成果を基礎として、状態境界曲面 (state boundary surface) や限界状態 (critical state) の概念を確立し、さらに Calladine⁴²⁾の示唆を受けて、関連流れ則に基づく弾塑性モデルすなわち Cam-clay モデルを完成させた。このモデルは、粘土のせん断・圧密現象を統一的に説明しうる画期的なものであり、その後の土の弾塑性モデルの基本となった。その後、Burland⁴³⁾による modified Cam-clay モデルや Roscoe・Burland⁴⁴⁾による revised Cam-clay モデルなどの修正モデルも提案された。特に、後者は複数の降伏関数^{注1)}を用いる弾塑性モデルのはしりであった。

一方、Poorooshasbら^{45),46)}は、砂に対する関連流れ則の適用性を否定し、非関連流れ則に基づく弾塑性モデルを提案した。この考え方は、現在、砂に関してほぼ定説化しており、以後、砂の弾塑性モデルの多くがこの考え方を採用している。

太田ら⁴⁷⁾は、Roscoe らとは異なった考え方、すなわち柴田⁴⁸⁾が示した粘土のダイレイタンシー特性式に基づいて、Cam-clay モデルと等価な弾塑性モデルを誘導した。その後、1970年代に入ると、新しい弾塑性モデルが数多く提案されるようになった。それらの多くは、Pender³⁴⁾、Lade・Duncan⁴⁹⁾のモデルに代表される非関連流れ則に基づくモ

表—5.2 弾塑性理論の歴史的流れ

弾塑性理論の歩み		土質材料への適用の歩み
降伏曲面の概念 (Westergaard, 1920) (Haigh, 1920)	—1920—	
塑性ポテンシャル理論 (von Mises, 1928)		
加工硬化概念の一般化 (Melan, 1938) (Prager, 1949)	—1930— —1940—	
すべり理論 (Batdorf・Budianski, 1949)		
等方硬化モデル (Hill, 1950)	—1950—	
Drucker の仮説 (Drucker, 1951)		
複数の降伏曲面を有する材料の流れ則 (Koiter, 1953)		
移動硬化モデル (Ishilinskiy, 1954) (Prager, 1955)		
亜弾性理論 (Truesdell, 1955)		
複合(等方+移動)硬化モデル (Hodge, 1956)		加工硬化塑性理論の土への適用 (Drucker・Gibson・Henkel, 1957)
修正移動硬化モデル (Ziegler・Shield, 1958) (Ziegler, 1959)	—1960—	
一般塑性理論 (Ilyushin, 1961)		Cam-clay モデル (Roscoe・Schofield・Thurairajah, 1963)
負荷曲面の概念 (Phillips・Sierakowski, 1964)		modified Cam-clay モデル (Burland, 1965)
一般弾塑性理論 (Green・Naghdi, 1965)		砂の非関連流れ則モデル (Poorooshasb・Holbec・Sherborne, 1966)
overlay モデルの一般化 (Iwan, 1967)		Ohta モデル (Hata・Ohta・Yoshitani, 1969)
加工硬化係数場理論 (Mroz, 1967)		microstructure モデル (Calladine, 1971)
endochronic 理論 (Valanis, 1971)	—1970—	過圧密粘土の弾塑性モデル (Pender, 1973)
降伏曲面と負荷曲面が一致しない塑性理論 (Eisenberg・Phillips, 1971)		Lade モデル (Lade・Duncan, 1975)
降伏曲面が存在しない塑性理論 (Greenstreet・Phillips, 1973)		西・江刺モデル (1977)
境界曲面モデル (Dafalias・Popov, 1975) (Krieg, 1975)		塑性硬化係数場理論の土への適用 { (Prevost, 1977) (Mroz・Norris・Zienkiewicz, 1978)
		境界曲面モデル { (Mroz・Norris・Zienkiewicz, 1979) (Dafalias, 1979)
	—1980—	

デルであり、西・江刺⁵⁰⁾のモデルに代表される複数の降伏曲面を有するモデルであった。これらのモデルによって、単調に増加する負荷に対する土の変形挙動はかなりの精度で予測することができるようになった。

一方、砂の液状化解析に代表される土の繰返し負荷応答解析の必要性から、土の繰返しモデルが強く要請されるようになったが、負荷曲面内での弾性挙動を仮定する古典的弾塑性理論の枠内で土の繰返し挙動をモデル化することはかなり困難なことであった。このため、1970年代後半から新しい弾塑性理論 (cyclic plasticity) の考え方を導入した繰返しモデルが提案されるようになった。すなわち、

注 1) 以下の記述において、負荷関数と降伏関数が一致している場合、誤解の生じない限り従来の呼称に従って負荷(降伏)関数を単に降伏関数と呼ぶことにする。

講 座

表—5.3 単調負荷モデル

モデルタイプ	提 案 者
(I) 単一降伏曲面を有するモデル	(I-1) 関連流れ則を適用しているモデル Roscoe・Schofield・Thurairajah (1963) ⁴¹⁾ Burlard (1965) ⁴²⁾ , (1968) ⁴⁴⁾ Christian (1966) ⁶¹⁾ Palmer (1967) ⁶²⁾ Schofield・Wroth (1968) ⁶³⁾ Hata・Ohta・Yoshitani (1969) ⁴⁷⁾ , (1971) ⁶⁴⁾ Dimagio・Sandler (1971) ⁶⁵⁾ 橋口 (1972) ⁶⁶⁾ Khosla・Wu (1976) ⁶⁷⁾ Sekiguchi・Ohta (1977) ⁶⁸⁾ Wilde (1977) ⁶⁹⁾ Mitachi・Kitago (1979) ⁷⁰⁾ Matsui・Abe (1981) ⁷¹⁾
	(I-2) 非関連流れ則を適用しているモデル Poorooshasb・Holbec・Sherbourne (1966) ⁴⁵⁾ , (1967) ⁴⁶⁾ Poorooshasb (1971) ⁷²⁾ Pender (1973) ⁷³⁾ , (1978) ³⁴⁾ Lade・Duncan (1975) ⁴⁹⁾ Wong・Mitchell (1975) ⁷⁴⁾ Eekelen・Potts (1978) ⁷⁵⁾ Nova・Wood (1979) ⁷⁶⁾
(II) 二つの降伏曲面を有するモデル	(II-1) 関連流れ則を適用しているモデル Roscoe・Burland (1968) ⁴⁴⁾ Prevost・Höeg (1975) ⁷⁷⁾
	(II-2) 非関連流れ則を適用しているモデル Lade (1977) ⁷⁸⁾ 西・江刺 (1977) ⁷⁹⁾ , (1978) ⁸⁰⁾ Pender (1977) ⁸⁰⁾ Vermeer (1978) ⁸¹⁾ Ohmaki (1979) ⁸²⁾
(III) その他の理論によるモデル	Calladine (1971) ⁵⁷⁾ Hashiguchi (1977) ⁸³⁾ Hashiguchi (1980) ⁸⁶⁾

表—5.4 繰返し負荷モデル

弾塑性理論の種類	提 案 者
複合硬化則	Ghaboussi・Momen (1979) ⁸⁴⁾ , (1982) ⁸⁵⁾ Sato・Shibata・Ito (1981) ⁸⁶⁾ 柴田・佐藤・プラダンテージ (1982) ⁸⁷⁾ , (1983) ⁸⁸⁾
Phillipsらの理論	Pender (1977) ⁸¹⁾ Ishihara・Okada (1978) ⁸⁹⁾ 西・江刺 (1979) ⁹⁰⁾ Sato・Shibata・Kosaka (1980) ⁹¹⁾ Oka・Washizu (1981) ⁹²⁾ 西 (1981) ⁹³⁾ , (1982) ⁹⁴⁾
塑性硬化係数場理論	Prevost (1977) ⁵²⁾ Mroz・Norris・Zienkiewicz (1978) ⁵³⁾ Mroz・Norris・Zienkiewicz (1981) ⁹⁵⁾
境界曲面理論	Mroz・Norris・Zienkiewicz (1979) ⁵⁵⁾ Dafalias (1979) ³⁶⁾ Carter・Booker・Wroth (1979) ⁹⁶⁾ Mroz・Norris・Zienkiewicz (1981) ⁹⁵⁾ Pande・Pietruszczuk (1982) ⁹⁷⁾ Aboim・Roth (1982) ⁹⁸⁾

Pender⁵¹⁾はPhillipsらの理論³³⁾を、Prevost⁵²⁾やMroz⁵³⁾は塑性硬化係数場理論⁵⁴⁾を、Mrozら³⁵⁾やDafalias³⁶⁾は境界曲面理論⁵⁵⁾をそれぞれ土に適用して繰返しモデルを提案した。

以上のほかに、単調負荷モデルとして、橋口⁵⁶⁾はEisen-

berg・Phillips⁸²⁾と同様な考え方を粒状体に適用したモデルを、Calladine⁵⁷⁾は「すべり理論」⁵⁸⁾を粘土に適用したモデルを提案した。後者はMicrostructureモデルと呼ばれている。また、Palmer⁵⁹⁾やWood⁶⁰⁾はIlyushin³⁷⁾の一般塑性理論の土への適用性を検討した。

以上、大雑把な流れを説明したが、現在まで、土を対象とした弾塑性構成式は数多く提案されている。これらを単調負荷に関するものと繰返し負荷に関するものとに分けて整理したものがそれぞれ表—5.3と表—5.4である。単調負荷モデルのほとんどは、いわゆる古典的弾塑性理論を適用したものであり、表—5.3に示すように降伏曲面の数と適用されている流れ則によって分類している。一方、繰返し負荷モデルは、適用されている弾塑性理論の種類によって分類されている。以下の各項では、これらの表を参照しながらそれぞれについて簡単に触れることにする。

[以下次号]

参 考 文 献

- 1) Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, 2-6 April, 1979.
- 2) Proc. Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering, Montreal, 28-30 May, 1980.
- 3) Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, 7-11 January, 1980.
- 4) Proc. Symp. on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress Strain Applications in Geotechnical Engineering, Florida, 27-31 October, 1980.
- 5) Proc. Int. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, St. Louis, 26 April-3 May, 1981.
- 6) Proc. Symp. on Implementation of Computer Procedures and Stress-Strain Laws in Geotechnical Engineering, 3-6 August, 1981.
- 7) Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, 31 May-4 June, 1982.
- 8) Proc. IUTAM Symp. on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, 31 August-3 September 1982.
- 9) Proc. Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, 13-17 September, 1982.
- 10) Proc. Int. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Application, Tucson, 10-14 January, 1983.
- 11) 柴田 徹・太田秀樹・関口秀雄：土の応力・変形・強度特性、土と基礎、Vol. 24, No. 8, pp. 11-22, 1976.
- 12) 龍岡文夫：講座 粒状体力学の現状とその応用、2. 粒状体の変形に関する理論的研究についてI(塑性論的研究)、土と基礎、Vol. 26, No. 6, pp. 82-89, 1978.
- 13) 関口秀雄：現況総括 土の構成式に関する現況総括、4. マクロ・レオロジー、土質工学会論文報告集、Vol. 18, No. 3, pp. 85-95, 1978.
- 14) 橋口公一：現況総括 土の構成式に関する現況総括、7. 弾塑性論的アプローチ、土質工学会論文報告集、Vol. 18, No. 4, pp. 131-142, 1978.
- 15) Melan, E.: Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, Ingenieur-Archiv, Vol. 9, pp. 116-126, 1938.
- 16) Mises, R. von: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), Vol. 8, pp. 161-185, 1928.
- 17) Prager, W.: Recent developments in the mathematical theory of plasticity, Journal of Applied Physics, Vol. 22, pp. 235-241, 1949.

- 18) Koiter, W.T.: Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 350-354, 1953.
- 19) Sander Jr., J.L.: Plastic stress-strain relations based on linear loading functions, *Proc. 2nd U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pp. 455-460, 1955.
- 20) Poorooshasb, H.B. and E.T. Selig: Group 2 Report on workshop on plasticity theories and generalized stress-strain modelling of soils, *Proc. Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-strain in Geotechnical Engineering*, Montreal, pp. 102-131, 1980.
- 21) Poorooshasb, H.B. and R.N. Yong: On the intersecting yield surfaces, *Proc. Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics*, Zurich, pp. 157-162, 1982.
- 22) Prager, W.: The theory of plasticity—A survey of recent achievement, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineer*, Vol. 169, pp. 41-47, 1955.
- 23) Ishilinskiy, A. Yu.: General theory of plasticity with linear hardening (in Russian), *Ukrainskiy Matematicheskii Zhurnal*, Vol. 6, pp. 314-324, 1954.
- 24) Kadashevitch, Iu. I. and V.V. Novozhilov: The theory of plasticity which takes into account residual microstresses, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 22, pp. 104-118, 1959.
- 25) Eisenberg, M.A. and A. Phillips: On nonlinear kinematic hardening, *Acta Mechanica*, Vol. 5, pp. 1-13, 1968.
- 26) Mroz, Z., H.P. Shrivastava and R.N. Dubey: A nonlinear hardening model and its application to cyclic loading, *Acta Mechanica*, Vol. 25, pp. 51-61, 1976.
- 27) Backhaus, G.: Fließspannungen und Fließbedingung bei zyklischen Verformungen, *ZAMM*, Vol. 56, pp. 337-348, 1976.
- 28) Ziegler, H.: A modification of Prager's hardening rule, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 55-65, 1959.
- 29) Drucker, D.C.: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, *Proc. 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pp. 487-491, 1951.
- 30) Hill, R.: The mathematical theory of plasticity, Oxford University Press, 1950.
- 31) Phillips, A. and R.L. Sierakowski: On the concept of the yield surface, *Acta Mechanica*, Vol. 1, pp. 29-35, 1965.
- 32) Eisenberg, M.A. and A. Phillips: A theory of plasticity with non-coincident yield and loading surfaces, *Acta Mechanica*, Vol. 11, pp. 247-260, 1971.
- 33) Greenstreet, W.L. and A. Phillips: A theory of an elastic-plastic continuum with special emphasis to artificial graphite, *Acta Mechanica*, Vol. 16, pp. 143-156, 1973.
- 34) Pender, M.J.: A model of the behaviour of over-consolidated soil, *Géotechnique*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-25, 1978.
- 35) Mroz, Z., V.A. Norris and O.C. Zienkiewicz: Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, *Géotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 1-34, 1979.
- 36) Dafalias, Y.F.: A model for soil behavior under monotonic and cyclic loading conditions, *Trans. 5th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Paper No. K1/8, 1979.
- 37) Ilyushin, A.A.: On the foundations of the general mathematical theory of plasticity (in Russian), *Voprosy Teorii Plastichnosti* (ed. A.A. Ilyushin), Acad. Sci. USSR, 1961.
- 38) Green, A.E. and P.M. Naghdi: A comment on Drucker's postulate in the theory of plasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 1, pp. 334-338, 1965.
- 39) Justusson, J.W. and A. Phillips: Stability and convexity in plasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 2, pp. 251-267, 1966.
- 40) Drucker, D.C., R.E. Gibson and D.J. Henkel: Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity, *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs*, Vol. 122, pp. 338-346, 1957.
- 41) Roscoe, K.H., A.N. Schofield and A. Thurairajah: Yielding of clay in state wetter than critical, *Géotechnique*, Vol. 13, No. 3, pp. 211-240, 1963.
- 42) Calladine, C.R.: The yielding of clay, *Correspondence, Géotechnique*, Vol. 13, No. 3, pp. 250-255, 1963.
- 43) Burland, J.B.: The yielding and dilation of clay, *Correspondence, Géotechnique*, Vol. 15, No. 2, pp. 211-214, 1965.
- 44) Roscoe, K.H. and J.B. Burland: On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Engineering Plasticity* (ed. J. Heyman and F.A. Leckie), Cambridge University Press, pp. 535-609, 1968.
- 45) Poorooshasb, H.B., I. Holubec and A.N. Sherbourne: Yielding and flow of sand in triaxial compression: Part I, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 3, No. 4, pp. 179-190, 1966.
- 46) Poorooshasb, H.B., I. Holubec and A.N. Sherbourne: Yielding and flow of sand in triaxial compression: Part II and III, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 4, No. 4, pp. 376-397, 1967.
- 47) Hata, S., H. Ohta and S. Yoshitani: On the state surface of soils, *Proc. of JSCE*, No. 172, pp. 97-117, 1969.
- 48) 柴田 徹: 粘土のダイレイタンシーについて, *京都大学防災研究所年報*, 第6号, pp. 128-134, 1963.
- 49) Lade, P.V. and J.M. Duncan: Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil, *J. Geotech. Engng Div., ASCE*, Vol. 101, No. GT10, pp. 1037-1053, 1975.
- 50) Nishi, K. and Y. Esashi: Stress-strain relationships of sand based on elasto-plasticity theory, *Proc. of JSCE*, No. 280, pp. 111-122, 1978.
- 51) Pender, M.J.: Modelling soil behaviour under cyclic loading, *Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mech. Fdn Engng*, Tokyo, pp. 325-331, 1977.
- 52) Prevost, J.H.: Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geotech.*, Vol. 1, pp. 195-216, 1977.
- 53) Mroz, Z., V.A. Norris and O.C. Zienkiewicz: An anisotropic hardening model for soil and its application to cyclic loading, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geotech.*, Vol. 2, pp. 203-221, 1978.
- 54) Mroz, Z.: On the description of anisotropic work hardening, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 15, pp. 163-175, 1967.
- 55) Dafalias, Y.F. and E.P. Popov: A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mechanica*, Vol. 21, pp. 173-192, 1975.
- 56) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elasto-plastic materials with elasto-plastic transition, *Journal of Applied Mechanics*, *Trans. ASME*, Vol. 47, pp. 266-272, 1980.
- 57) Calladine, C.R.: A microstructural view of the mechanical properties of saturated clay, *Géotechnique*, Vol. 21, No. 4, pp. 391-415, 1971.
- 58) Batdorf, S.B. and B. Budiansky: A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, *NA CA*, Technical Note 1871, 1949.
- 59) Palmer, A.C. and J.A. Pearce: Plasticity theory without yield surfaces, *Proc. Symp. on Plasticity and Soil Mechanics* (ed. A.C. Palmer), Cambridge, pp. 188-200, 1973.
- 60) Wood, D.M.: Truly triaxial stress-strain behaviour of kaolin, *Proc. Symp. on Plasticity and Soil Mechanics* (ed. A.C. Palmer), Cambridge, pp. 67-95, 1973.