



土の構成式入門

5. 弾塑性体理論と適用 (その 2)

まつ 井

たもつ 保*

あ べ

のぶ 信

はる 晴**

5.4.2 土の単調負荷モデル

1) 単一の降伏曲面を有するモデル

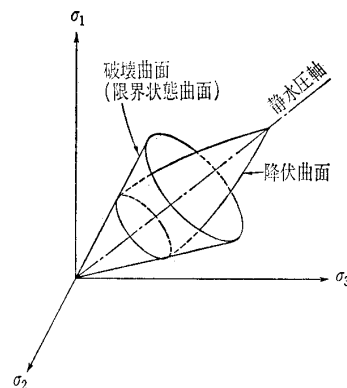
i) 関連流れ則を適用しているモデル(I-1型モデル)

このタイプのモデルでは、図—5.11に示すように、応力空間で錐面形をなす破壊曲面あるいは限界状態曲面の開放端にキャップ型の降伏曲面が仮定される。この降伏曲面は体積降伏曲面 (volumetric yield surface) と呼ばれ、塑性体積ひずみの増加に伴って静水圧軸に沿って相似的に拡大する。したがって、このモデルは塑性体積ひずみをひずみ硬化パラメーターとする等方硬化モデルである。I-1型モデルの基本的概念は Druckerら⁴⁰⁾によって示され(定性的に球形のキャップ型降伏曲面が示されていた), Drucker流の弾塑性理論が典型的に適用されている。各モデルにおいては、キャップ型の体積降伏曲面の誘導の仕方に特徴がある。

Roscoe ら⁴¹⁾は、消散エネルギー式の仮定から導かれる塑性ひずみ増分比と直交則から、指数関数型の降伏関数を誘導し、Cam-clayモデルを作り上げた。また、Burland⁴³⁾は Cam-clay モデルとは異なる消散エネルギー式から楕円型の降伏曲面を導き、modified Cam-clay モデルを提案した。Palmer⁶²⁾は正六角錐状の状態境界面を提案し、これを降伏曲面として用いている。Schofield・Wroth⁶³⁾は Granta-gravel モデルと呼ばれる砂の剛塑性モデルを提案しているが、これは Cam-clay モデルを砂に適用した形のものである。橋口⁶⁶⁾は、降伏関数が満足すべき条件の考察から、Cam-clay モデルと類似のモデルを提案している。

また、Ohta ら⁴⁷⁾は、上述のモデルとは異なった方法により粘土の弾塑性モデルを誘導した。すなわち、実験により帰納的に決定されたダイレイタンシー特性式を塑性論的に解釈して、Cam-clayモデルと等価なモデルを作り、さらにこれを異方圧密粘土に拡張している⁶⁴⁾。Mitachi・Kitago⁷⁰⁾も太田らと同様な考え方によって粘土のダイレイタンシー特性式の関数形を実験的に決定して構成関係式を導いている。

Matsui・Abe⁷¹⁾は、塑性ひずみ増分比関係を実験結果から直接的に評価するという考え方により、異方圧密粘土にも適用しうるモデルを提案している。



図—5.11 破壊曲面と降伏曲面

一方、消散エネルギー式、ダイレイタンシー特性式、塑性ひずみ増分比関係などによらず、アプリオリに楕円型の降伏曲面を用いるモデルが、Christian⁶¹⁾ (MIT モデル), Dimaggio・Sandler⁶⁵⁾ (Cap モデル), Khosla・Wu⁶⁷⁾によって提案されている。

このほか、上述のモデルと異なるタイプのモデルが、Sekiguchi・Ohta⁶⁸⁾, Wilde⁶⁹⁾によって提案されている。前者は新たに提案された応力パラメーター η^* を用いた異方性や主応力の回転を考慮しうるモデルであり、後者は塑性体積ひずみのほかに塑性偏差ひずみの2次不変量が降伏に与える影響を考慮したモデルである。

Q: I-1型モデルの降伏曲面が満足すべき条件は?

A: ①Druckerの仮説を満足していること。すなわち、降伏曲面は凸面性を有していなければならない。②関連流れ則が仮定されているので、降伏曲面は塑性ポテンシャル曲面と一致している。したがって、図—5.12(p' - q 応力面表示)に示すように、降伏曲面と限界状態曲面や完全塑性状態を仮定する破壊曲面との交線上において、降伏曲面の外向き法線方向(塑性ひずみ増分ベクトルの方向)は q 軸に平行でなければならない。③降伏曲面(等方モデル)は p' 軸と直交していなければならない。

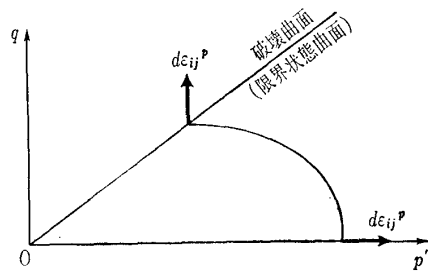
ii) 非関連流れ則を適用しているモデル(I-2型モデル)

このタイプのモデルで最も特徴的なものは、錐面形の降伏曲面を採用している砂のモデルである。このモデルの最

*大阪大学助教授 工学部土木工学科

**大阪大学助手 工学部土木工学科

講座



図—5.12 降伏曲面と塑性ひずみ増分ベクトル

初めのは Poorooshasb ら^{45), 46)}によるモデルである。彼らは、降伏曲面と塑性ポテンシャル曲面は存在するが、両者は一致しないことを示すとともに、降伏曲面としては、 p' （平均有効主応力）の増加とともに q （軸差応力）も増加するような形状が妥当であるとし、次式の形の降伏曲面を仮定した。

$$f = \eta \quad \dots\dots\dots (5.30)$$

ここに、 η は応力比 (q/p') である。もしこの降伏曲面に直交則を適用すれば、正のダイレイタンスが過度に強調されるので、砂の体積変化特性を的確に表現できなくなる。そこで、降伏曲面と異なる紡錘形の塑性ポテンシャル曲面が採用されている。このように、非関連流れ則を適用することにより、砂の降伏挙動と塑性変形特性を分離して考慮することができる。

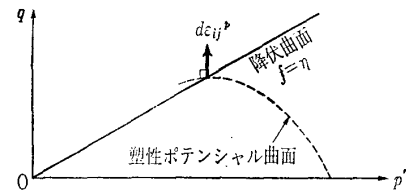
しかし、このモデルでは、図—5.13(a)に示すように、応力比 η 一定の異方圧密において降伏は生じないことになる。そこで、Poorooshasb は、以上の点が実験事実と反するとして、降伏関数を次式のように変更した。

$$f = \eta + m \ln p' \quad \dots\dots\dots (5.31)$$

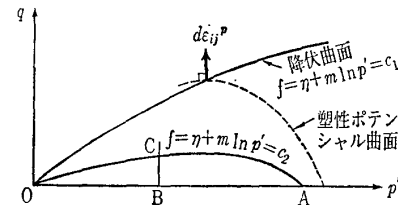
ここに、 m は材料定数である。しかし、この修正によっても、図—5.13(b)に示すように、砂が A 点まで等方圧密され、つぎに B 点まで除荷された後、B 点から p' 一定でせん断される場合、応力点が除荷時の降伏曲面上の C 点に達するまで降伏が生じないことになる。また、等方圧縮による降伏をも考慮するならば、I—2 型モデルは必ずしも適切なモデルとは言いきれないことになる。この点を克服するためには、次項の2)で述べるように二つの降伏曲面を仮定して、せん断降伏と体積降伏を分離して取扱う必要がある。

応力比一定線を降伏関数とする過圧密粘土のモデルが Pender^{73), 34)}によって提案されている。このモデルでは、塑性ポテンシャル関数は偏導関数の形で与えられており、また、硬化関数は、図—5.14に示すように、 p' - q 応力面で放物線と仮定される非排水応力径路を用いて決定される。このモデルの特徴の一つは実質的に弾性域が存在しない点であり、この点は後に 5.4.3 2)で取上げる。

Nova・Wood⁷⁶⁾は、砂に対して図—5.15に示すような降伏曲面と塑性ポテンシャル曲面を仮定している。すなわち、降伏曲面は圧縮、伸張領域でそれぞれ二つの曲面部分から構成され、 $\eta \leq M/2$ では関連流れ則を、 $\eta \geq M/2$ では非関

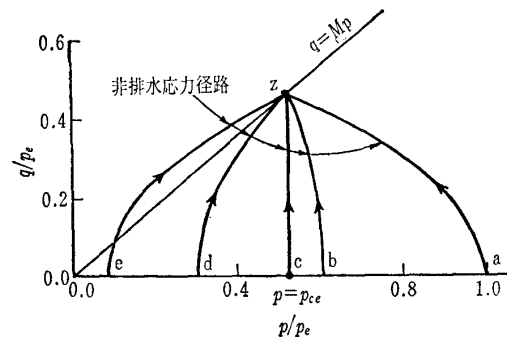


(a) オリジナルモデル

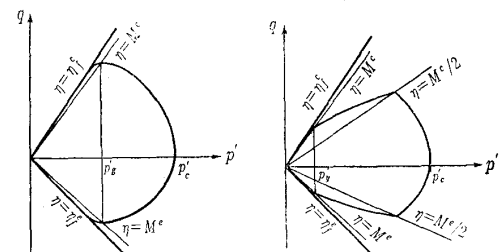


(b) 修正モデル

図—5.13 Poorooshasb らのモデル



図—5.14 非排水応力径路 (Pender の等方モデル)



(a) 塑性ポテンシャル曲面

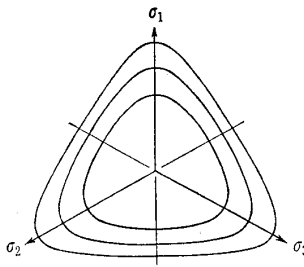
(b) 降伏曲面

図—5.15 Nova・Wood のモデル

連流れ則を適用している。したがって、このモデルは I—1 型、I—2 型の折衷的なものとなっている。

Lade・Duncan⁴⁹⁾は、応力の一次および三次の不変量によって表現される降伏曲面と塑性ポテンシャル曲面によるモデルを提案した。図—5.16に示すように、八面体応力面での降伏曲面の形状は Mohr・Coulomb の破壊曲面に近い形であり、八面体応力面での塑性ポテンシャル曲面の形状は降伏曲面のそれと相似である。また、このモデルでは、塑性仕事による等方硬化が仮定されている。後に、このモデルは球形のキャップ型体積降伏曲面を付加したモデルに修正されている。

このほか、Wong・Mitchell⁷⁴⁾、Van Eekelen・Potts⁷⁵⁾



図—5.16 Ladeモデルの降伏曲面（八面体応力面）

は非関連流れ則を適用して Cambridge モデルの修正モデルを提案している。

2) 二つの降伏曲面を有するモデル

このタイプのモデルは Koiter流の降伏関数族を用いたモデルである。このような複数の降伏曲面が用いられる理由についてはすでに

簡単に触れた。すなわち、土の降伏挙動をせん断降伏と体積降伏に分けて取り扱う有利さに起因している。したがって、通常、せん断降伏曲面と体積降伏曲面が用いられることが多い。

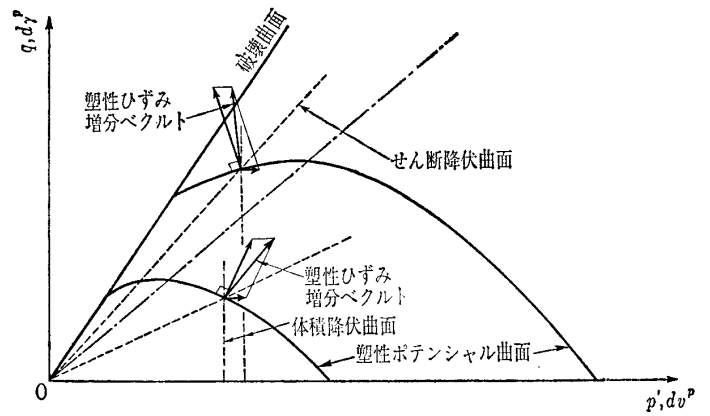
i) 関連流れ則を適用しているモデル(Ⅱ—1型モデル)

Roscoe・Burland⁴⁴⁾は、状態境界曲面内すなわち過圧密領域において塑性せん断ひずみの存在を認め、modified Cam-clay モデルにせん断降伏曲面を付加することによってこれを表現しうるモデル、すなわち revised Cam-clay モデルを提案した。Prevost・Höeg⁷⁷⁾も同様な構成のモデルを提案しているが、このモデルではひずみ硬化挙動のみならずひずみ軟化挙動も取り扱うことができるとしている。

ii) 非関連流れ則を適用しているモデル(Ⅱ—2型モデル)

Lade⁷⁸⁾は、従来のモデルの降伏曲面を比例応力の場合にも塑性ひずみが生じるような形状に変更するとともに、平均主応力による塑性体積ひずみを考慮するために新たな球形の体積降伏曲面を付加してモデルの修正を行った。その際、前者には非関連流れ則、後者には関連流れ則を適用している。このモデルによって、砂のひずみ硬化および軟化挙動を表現できるとしている。Pender⁸⁰⁾も過圧密粘土に関する彼のモデルを正規圧密挙動も含むモデルに拡張した。すなわち、過圧密降伏曲面に加えて正規圧密降伏曲面を仮定し、後者は正規圧密粘土の非排水有効応力径路式によって与えている。したがって、正規圧密降伏曲面は降伏の進行に伴って形状が変化することになる。このモデルでは二つの降伏曲面に対して非関連流れ則が適用されている。

Vermeer⁸¹⁾は、砂の塑性体積ひずみ挙動は錐面形をしたせん断降伏曲面のみでは説明できないとして、体積降伏曲面を導入したモデルを提案した。その際、体積降伏曲面には関連流れ則、せん断降伏曲面には非関連流れ則を適用し、塑性ポテンシャル曲面の決定には Roweの応力-ダイレイタンス式を利用している。八面体応力面でのせん断降伏曲面の形状は、Lade のモデルと同様に、Mohr-Coulomb の破壊曲面に近い形をしており、かつ降伏の進行に伴って大きさのみならず形状も変化する。彼はこのタイプのモデルを double hardening モデルと呼んでいる。

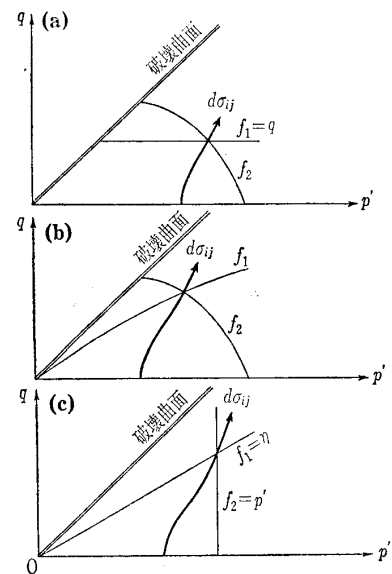


図—5.17 西・江刺のモデル

西・江刺^{79), 50)}は、図—5.17に示す降伏曲面と塑性ポテンシャル曲面を用いて、砂のせん断挙動、特にひずみ硬化時に体積が収縮から膨張に至る過程を表現しうるモデルを提案した。このモデルでは、体積降伏曲面には関連流れ則、せん断降伏曲面には非関連流れ則を適用している。

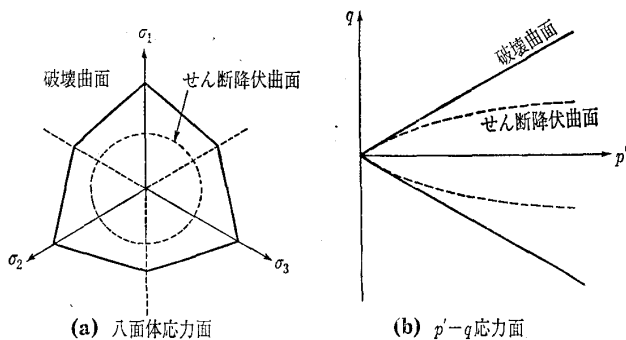
Ohmaki⁸²⁾は、正規圧密粘土の塑性ひずみ増分方向は応力増分の方に依存し、これを一つの塑性ポテンシャル曲面によっては表現できないとして、2組の降伏曲面と塑性ポテンシャル曲面をもつモデルを提案した。

図—5.18は、上記したモデルを二つの降伏曲面の形状によって三つに分類したものである。図—5.18(a)は q 一定のせん断降伏曲面と紡錘形や楕円形などのキャップ型体積降伏曲面が仮定されるモデルである。これには、Roscoe・Burland, Prevost・Höegのモデルが属する。図—5.18(b)は錐面形のせん断降伏曲面とキャップ型体積降伏曲面が仮定されるモデルである。Lade, Pender, Vermeerのモデルがこれに属する。図—5.18(c)は図—5.18(b)の特別な場合であり、 η 一定の円錐形のせん断降伏曲面と p' 一定のキャップが平面状となった体積降伏曲面が仮定されるモデル



図—5.18 降伏曲面の組合わせによる分類

講 座



図—5.19 せん断降伏曲面と破壊曲面の形状

である。このタイプのモデルには、塑性ポテンシャル曲面に工夫を凝らしたものが多いが、西・江刺, Ohmaki のモデルがこれに属する。

Q: せん断降伏曲面と破壊曲面は交わるか?

A: 破壊はせん断降伏の極限的な状態と考えられるから、一般に、せん断降伏曲面と破壊曲面とは交わらない。しかし、図—5.19(a), (b)に例示するような場合には、降伏の進行とともに両者は交わってしまうことになる。したがって、せん断降伏曲面と破壊曲面とは同じ関数形で表現されることが多い。

3) その他の理論に基づくモデル

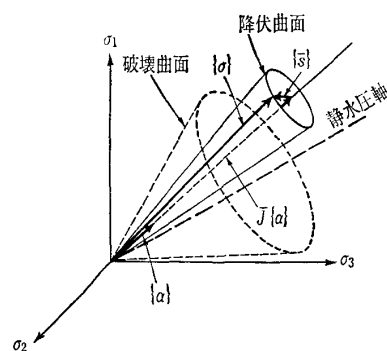
Caladine⁵⁷⁾は、Batdorf・Budiansky⁵⁸⁾による「すべり理論」を適用して、microstructure モデルを提案した。「すべり理論」では潜在硬化を認めず、したがって、すべりを生じない面にもすべりを生じた面と同じ硬化が生じるとするほかの理論とはきわだった相違点を有する。このモデルでは無数の面に対応して無数の降伏面が仮定されるが、負荷方向の降伏面のみが硬化して拡大していく。このため、降伏曲面には負荷方向に角 (corner) が生じることになり、全体的に異方性を示し、また塑性ひずみ増分方向は応力増分方向に依存するようになる。このように、microstructure モデルによれば、粘土の塑性変形における異方性と応力増分方向依存性が表現できる。

Hashiguchi⁵⁶⁾は滑らかな弾塑性遷移を表現するモデルを提案している。このモデルは基本的には Eisenberg・Phillips³²⁾と同様な発想に基づくものと思われる。さらに、Hashiguchi⁸³⁾は、Sekiguchi・Ohta⁶⁸⁾が提案した応力パラメーター η^* と Ziegler の移動硬化則を組合せて、負荷に伴う降伏曲面の回転を考慮したモデルを提案している。彼はこれを「回転硬化」(rotational hardening) と呼んでいる。

5.4.3 土の繰返し負荷モデル

1) 複合硬化則に基づくモデル

Ghaboussi・Momen⁸⁴⁾は等方硬化と移動硬化の複合硬化則に基づく砂の繰返しモデルを提案している。このモデル



図—5.20 Ghaboussi・Momen のモデル

では、図—5.20に示すように、主応力空間において円錐形をなす降伏曲面が仮定されている。降伏曲面の軸は異方性によって静水圧軸に一致しない。いま、降伏曲面の軸の方向を規定する単位テンソルを α_{ij} とすると、応力テンソル σ_{ij} は軸方向成分 \bar{J} とそれに直角な成分 \bar{s}_{ij} とに分けることができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{J} &= \alpha_{ij} \sigma_{ij} \\ \bar{s}_{ij} &= \sigma_{ij} - \alpha_{ij} \bar{J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.32)$$

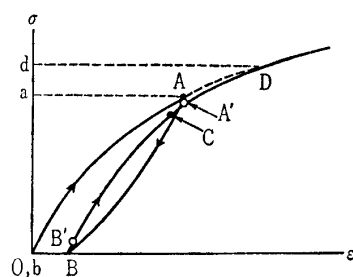
したがって、円錐形の降伏曲面は次式で与えられる。

$$f(\sigma) = \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} - \kappa^2 \bar{J}^2 = 0 \dots\dots\dots (5.33)$$

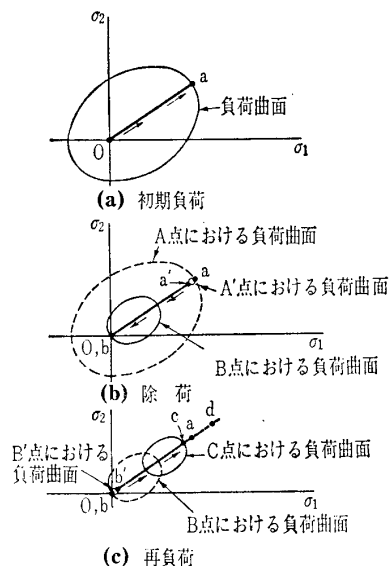
降伏曲面 f の大きさおよび軸の方向はそれぞれパラメーター κ およびテンソル α_{ij} によって規定される。また、これらは等方硬化および移動硬化のパラメーターとして用いられている。これらの変化は、塑性偏差ひずみ (e_{ij}^p) トラジェクトリの長さの関数と仮定されている。塑性ひずみ増分は式(5.33)に関連流れ則を適用することによって求められる。また、破壊に関しては等方性を仮定しており、したがって破壊曲面としては、Drucker-Prager タイプの曲面が用いられている。しかしその後、Mohr-Coulomb タイプの破壊曲面を用いたモデル⁸⁵⁾に修正されている。また、柴田ら^{87), 88)}も Ghaboussi・Momen と同様な構成の繰返しモデルを提案している。

2) Phillips らの理論に基づくモデル

Greenstreet・Phillips³³⁾は、図—5.21に示すような比例負荷過程における負荷の反転 (loading reversal) において、 \overline{AB} のような反転負荷の始めから塑性ひずみが発生するとして、非線形な応答を表現するモデルを考えた。このモデルでは弾性域は存在せず、したがって降伏曲面は存在しない。図—5.22は二次元応力状態におけるこのモデルの負荷曲面の変化する様子を示している。図—5.22のO, a, bは図—5.21のO, A, Bに対応している。いま、図—5.21のO点からA点まで負荷されたときの負荷曲面が図—5.23(a)に示されている。つぎに、A点で負荷の反転が生じると、それまでの負荷曲面は意味を持たなくなり、反転負荷開始時の新しい負荷曲面は大きさが0となり点で表される。そして、反転負荷が進むとともに負荷曲面は応力点とともに移動し拡大する(図—5.22(b))。さらに、B点で負



図—5.21 応力-ひずみ曲線



図—5.22 Phillips らの理論

荷の反転が生じると、負荷曲面の大きさは0となり、負荷とともに再び移動、拡大する(図—5.22(c))。

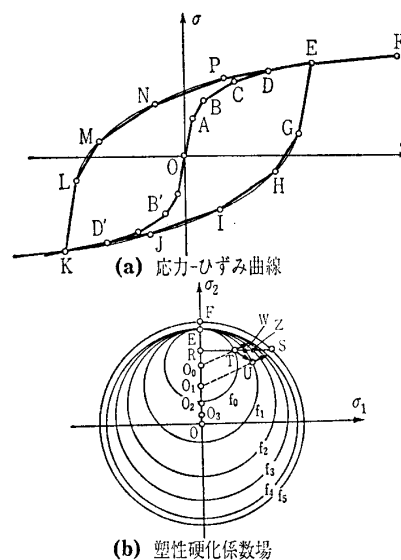
一方、Pender³⁴⁾の示した考え方は、負荷曲面として次式を仮定し、

$$f = q - \eta_i p' = 0 \quad (5.34)$$

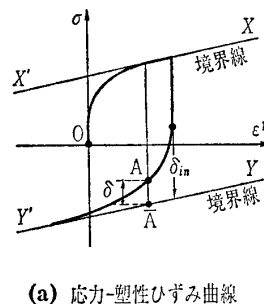
この有効応力比一定線が常に応力点とともに移動するとしている。負荷の反転が生じたとき、そのときの応力比の値を η_i として置き直せば、反転負荷時の負荷曲面の大きさは0となる。したがって、反転負荷の始めから塑性ひずみが発生し、弾性域は存在しないことになる。このように、Pender の考え方は上述の Phillips らの理論と同じものと言える。

このような考え方をを用いて、西・江刺⁹⁰⁾は彼らの単調負荷モデルを繰返しモデルに拡張した。Satoら⁹¹⁾も西・江刺と同様な考え方に基づき、塑性ポテンシャル関数に工夫を加えて砂の繰返しモデルを提案している。また、Oka・Washizu⁹²⁾は同様な考え方を Sekiguchi・Ohta の応力比パラメーター η^* を用いて表現し、砂および過圧密粘土の繰返しモデルとしている。

一方、実験結果⁹³⁾によれば、ある限界値以下のせん断振幅で土に繰返し負荷を与えると、やがて間隙水圧、ひずみの累積が停止し、応力-ひずみ関係は閉じたヒステリシスループを描くようになる。すなわち、土は実質的に弾性的



図—5.23 塑性硬化係数場モデル



図—5.24 境界曲面モデル

挙動を示すようになる。しかし、せん断に関して弾性域の存在を仮定しない上述のタイプのモデルによって、このような挙動を予測することはできない。このため、Satoら⁸⁶⁾は、このタイプのモデルとは異なる複合硬化モデルを提案している。また、西^{93), 94)}は平衡状態線概念を導入してモデルの修正を行っている。Ishihara・Okada⁸⁹⁾は早い時期に西と類似のモデルを提案している。

3) 塑性硬化係数場理論に基づくモデル

塑性硬化係数場モデルは、Mroz⁵⁴⁾によって提案された等方硬化と移動硬化による塑性硬化モデルである。塑性硬化係数場は応力空間に一定の塑性硬化係数を定義する多数の曲面の配置によって定義される。材料の塑性挙動は、負荷経路に伴って変化するこれらの曲面の移動、拡大(縮小)によって表現される。このため、このモデルは multi-surface モデルと呼ばれることもある。

講 座

図—5.23は Mroz のモデルの概念を簡単に示したものである。材料は最初には等方的であり、その応力-ひずみ曲線は図—5.23(a)に示すように一定の接線係数 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n$ の線分で近似できると仮定する。この仮定は、応力空間において f_0 と f_1, f_2, \dots, f_n の n 個の閉曲面を規定する。ここに、 f_0 は降伏曲面であり、 f_1, f_2, \dots, f_n は一定の塑性硬化係数の領域を定義する曲面である（図では $n=5$ の場合が示されている）。関連流れ則が降伏曲面 f_0 に適用され、塑性ひずみ増分が評価される。

図—5.23(b)に示すように、応力点が σ_2 軸に沿って動く比例負荷過程では、図—5.23(a)の A 点において、弾性限界を示す f_0 に達する。 f_0 は B 点で f_1 に接するまで動くが、その他の曲面はこの時点では動かない。応力点が C 点で f_2 に達するまで f_0 と f_1 は応力点とともに移動する。このように順次移動して、丁度応力点が f_4 (E 点) に達した状態が図—5.23(b)に示されている。さらに、E 点から逆方向への除荷過程とそれに引続く負荷過程を考えると、応力点は G 点で f_0 上に達し、逆方向の塑性ひずみが生じる。 f_0 は H 点で f_1 に接するまで応力点とともに下方に移動する。反転負荷による EG, GH, ……間の応力差は初期負荷による OA, AB, ……間の応力差の 2 倍になっている。

一方、比例負荷でない場合、それぞれの曲面は互いに一点で接するが決して交わることがないという新たな仮説が必要である。いま、図—5.23(b)に示すように、E 点まで負荷され、さらに f_0 内の R 点まで除荷された後、RS に沿って応力点が動き T 点で f_0 に達した場合を考える。 f_0 は T 点における f_0 の外向き法線方向には動くことができない。理由は、 f_0 が f_1 と交わってしまうからである。しかし、 f_0 は f_1 と接することは可能である。もし T 点が f_1 上の U 点へ移動すれば、2 点の外向き法線方向は同一であるから、 f_0 と f_1 は一点で接することができる。したがって、 f_0 の移動は TU 方向に沿って生じなければならない。応力点は TS 方向に動くので、 f_0 と f_1 は W 点で接することになる。同様に、 f_0 と f_1 は一緒に Z 点で f_2 と接することになる。このような仮説は、実は Ziegler の移動硬化則の拡張である。

以上が塑性硬化係数場モデルの概説である。これを土の繰返しモデルに適用したものとしては、Prevost⁵²⁾、Mroz^{ら^{53), 95)}}のモデルが挙げられる。Prevost のモデルでは、Mroz のオリジナル理論がほぼ忠実に適用されているので、土の非排水繰返し負荷挙動のみが対象となっている。これに対して、Mroz^らは排水負荷にも適用しうより一般的なモデル化を行っている。さらに、繰返し負荷による土の劣化効果をも考慮したモデルに拡張修正している。

4) 境界曲面理論に基づくモデル

境界曲面モデルは Dafalias・Popov⁵⁵⁾と Krieg¹⁰⁰⁾によって独立に提案された。このモデルでは、降伏曲面のほかに常に降伏曲面を取り囲むもう一つの曲面（境界曲面）を考

え、塑性負荷過程におけるこれらの二つの曲面の応力空間における移動と拡大（縮小）による隣接関係によって、材料の非線形硬化挙動を表現するものである。このような特徴によって、このモデルは two-surface モデルと呼ばれることもある。

Dafalias^らは、まず図—5.24(a)に示す一次元の典型的な応力-塑性ひずみ曲線に注目した。この曲線は塑性負荷の増大に伴って図中の境界線 (bounds) XX', YY' に近づき、やがてその線上に至る。応力状態が塑性域に入った後の塑性接線係数 E^p は、例えば、図中の応力点 A とそれに対応する境界線上の点 \bar{A} との距離 δ の関数 $E^p(\delta)$ として表されたとした。そこで、初期降伏時に $E^p(\delta_{in}) = \infty$ 、境界線上で $E^p(0) = E_b^p$ とし、 $E^p(\delta)$ を単調に増加する δ の内挿関数とすれば、弾性域から塑性域への滑らかな遷移を表現することができる。

図—5.24(b)は多次元の場合の降伏曲面と境界曲面（簡単のため、二次元の円で示される）を表している。多次元問題において、両曲面が決まれば、次に降伏曲面上の応力点 a に対応する境界曲面上の点 b を決める必要がある。この決定法にはいくつかの考え方があがあるが、図—5.24(b)では $\bar{k}a$ と境界曲面の交点を b としている。ここに、 k は降伏曲面の中心である。したがって、 $\delta = \overline{ab}$ となり、塑性硬化係数 K^p は δ の内挿関数を実験的に求めることによって決定される。塑性変形中、両曲面はともにその大きさを変えながら応力空間を移動するが、両者は互いに接することはあっても交わることはない。したがって、両曲面が接する場合、接点での両者の外向き法線ベクトルの方向は一致していなければならない。すなわち、降伏曲面は図—5.24(b)の μ の方向に動き、a 点は c 点と一致することになる。この点は塑性硬化係数場モデルの場合と同様である。

境界曲面モデルに基づく土の繰返しモデルが Mroz^{ら⁵⁵⁾}、Dafalias³⁶⁾、Mroz^{ら⁹⁵⁾}、Aboim・Roth⁹⁸⁾らによって提案されている。また、Pande・Pietruszczuk⁹⁷⁾は、負荷関数に工夫を加えて反転負荷の始めから塑性応答する境界曲面モデルを提案している。彼らはこのモデルを reflecting surface モデルと呼んでいる。Carter^{ら⁹⁶⁾}も境界曲面モデルの範ちゅうに入る繰返しモデルを提案している。

〔以下次号〕

参 考 文 献

- 61) Christian, J.T.: Plane-strain deformation analysis of soil, MIT, Dep. Civil Engng, Research Report R66-33, 1966.
- 62) Palmer, A.C.: Stress-strain relations for clays: an energy theory, Géotechnique, Vol. 17, No. 4, pp. 348-358, 1967.
- 63) Schofield, A.N. and C.P. Wroth: Critical state soil mechanics, McGraw-Hill, London, 1968.
- 64) Ohta, H. and S. Hata: On the state surface of anisotropically consolidated clays, Proc. JSCE, No. 196, pp. 117-124, 1971.
- 65) Dimaggio, F.L. and I.S. Sandler: Material model for

- granular soil, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 97, No. EM 3, pp. 935-950, 1971.
- 66) 橋口公一：摩擦性塑性体の降伏について一硬化塑性法則一土木学会第27回年次学術講演会講演概要集，第3部，pp. 105-108, 1972.
 - 67) Khosla, V.K. and T.H. Wu: Stress-strain behavior of sand, J. Geotech. Engng Div., ASCE, Vol. 102, No. GT 4, pp. 303-321, 1976.
 - 68) Sekiguchi, H. and H. Ohta: Induced anisotropy and time dependency in clay, Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mech. Fdn Engng, Tokyo, Specialty Session No. 9, Constitutive equations of soils, pp. 163-175, 1977.
 - 69) Wilde, P.: Two invariants-dependent models of granular media, Archives of Mechanics, Vol. 26, No. 6, pp. 799-809, 1977.
 - 70) Mitachi, T. and S. Kitago: The influence of stress history and stress system on the stress-strain-strength properties of saturated clay, Soils and Foundations, Vol. 19, No. 2, pp. 45-61, 1979.
 - 71) Matsui, T. and N. Abe: Multi-dimensional elasto-plastic consolidation analysis by finite element method, Soils and Foundations, Vol. 21, No. 1, pp. 79-95, 1981.
 - 72) Poorooshasb, H.B.: Deformation of sand in triaxial compression, Proc. 4th Asian Reg. Conf. on Soil Mech. Fdn Engng, Bangkok, pp. 63-66, 1971.
 - 73) Pender, M.J.: Discussion, Proc. Symp. on Plasticity and Soil Mech. (ed. A.C. Palmer), pp. 140-143, 1973.
 - 74) Wong, P.K.K. and R.J. Mitchell: Yielding and plastic flow of sensitive cemented clay, Géotechnique, Vol. 25, No. 4, pp. 763-782, 1975.
 - 75) Eekelen, H.A.M. van and D.M. Potts: The behaviour of Drammen clay under cyclic loading, Géotechnique, Vol. 28, No. 2, pp. 173-196, 1978.
 - 76) Nova, R. and D.M. Wood: A constitutive model for sand in triaxial compression, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 3, pp. 255-278, 1979.
 - 77) Prevost, J.-H. and K. Höeg: Effective stress-strain-strength model for soils, J. Geotech. Engng Div., ASCE, Vol. 101, No. GT 3, pp. 259-278, 1975.
 - 78) Lade, P.V.: Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces, International Journal of Solids and Structure, Vol. 13, pp. 1019-1035, 1977.
 - 79) 西 好一・江刺靖行：弾 - 塑性論に基づく砂の応力 - ひずみ関係式，電力中央研究所報告，No. 376014, 1977.
 - 80) Pender, M.J.: A unified model for soil stress-strain behaviour, Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mech. Fdn Engng, Tokyo, Specialty Session No. 9, Constitutive equations of soils, pp. 213-222, 1977.
 - 81) Vermeer, P.A.: A double hardening model for sand Géotechnique, Vol. 28, No. 4, pp. 413-433, 1978.
 - 82) Ohmaki, S.: A mechanical model for the stress-strain behaviour of normally consolidated cohesive soil, Soils and Foundations, Vol. 19, No. 3, pp. 29-44, 1979.
 - 83) Hashiguchi, K.: An expression of anisotropy in a plastic constitutive equation of soils, Discussion, Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mech. Fdn Engng, Tokyo, Specialty Session No. 9, Constitutive equations of soils, pp. 302-305, 1977.
 - 84) Ghaboussi, J. and H. Momen: Plasticity model for cyclic behavior of sands, Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, pp. 423-434, 1979.
 - 85) Ghaboussi, J. and H. Momen: Modelling and analysis of cyclic behaviour of sands, Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads (ed. G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz), John Wiley & Sons, Chapter 12, 1982.
 - 86) Sato, T., T. Shibata and R. Ito: Dynamic behaviour of sandy soil and liquefaction, Proc. Int. Conf. on Recent Advances in Geotech. Earthquake Engng and Soil Dynamics, St. Louis, pp. 683-686, 1981.
 - 87) プラダンテージ・佐藤忠信・柴田 徹：等方・移動硬化則を用いた土の応力 - ひずみ関係，土木学会第37回年次学術講演会講演概要集，第3部，pp. 101-102, 1982.
 - 88) 柴田 徹・佐藤忠信・プラダンテージ：移動硬化則を用いた土の応力 - ひずみ関係，第18回土質工学研究発表会発表講演集，pp. 333-334, 1983.
 - 89) Ishihara, K. and S. Okada: Yielding of overconsolidated sand and liquefaction model under cyclic stresses, Soils and Foundations, Vol. 18, No. 1, pp. 57-72, 1978.
 - 90) 西 好一・江刺靖行：繰返し荷重下における砂の弾 - 塑性挙動，土木学会第34回年次学術講演会講演概要集，第3部，pp. 33-34, 1979.
 - 91) Sato, T., T. Shibata and M. Kosaka: Dynamic behaviour and liquefaction of saturated sandy soil, Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, pp. 523-532, 1980.
 - 92) Oka, F. and H. Washizu: Constitutive equations for sand and overconsolidated clays under dynamic loads based on elasto-plasticity, Proc. Int. Conf. on Recent Advances in Geotech. Earthquake Engng and Soil Dynamics, St. Louis, pp. 71-74, 1981.
 - 93) 西 好一・江刺靖行：くり返し荷重下での永久変形に着目した土質材料の動的強度 - 変形特性，電力中央研究所報告，No. 376014, 1981.
 - 94) 西 好一：非排水繰返し荷重下における飽和砂の弾 - 塑性挙動と構成式，土木学会論文報告集，第319号，pp. 115-128, 1982.
 - 95) Mroz, Z., V.A. Norris and O.C. Zienkiewicz: An anisotropic, critical state model for soils subjected to cyclic loading, Géotechnique, Vol. 31, No. 4, pp. 451-469, 1981.
 - 96) Carter, J.P., J.R. Booker and C.P. Wroth: The application of a critical state soil model to cyclic triaxial tests, Proc. 3rd Aust.-N.Z. Conf. on Geomechanics, Wellington, pp. 2-121-2-126, 1980.
 - 97) Pande, G.N. and S.T. Pietruszczuk: "Reflecting surface" model for soils, Proc. Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, pp. 50-64, 1982.
 - 98) Aboim, C.A. and W.H. Roth: Bounding-surface-plasticity theory applied to cyclic loading of sand, Proc. Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, pp. 65-72, 1982.
 - 99) Sangrey, D.A., D.J. Henkel and M.I. Esrig: The effective stress response of a saturated clay soil to repeated loading, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 6, No. 3, pp. 241-252, 1969.
 - 100) Krieg, R.D.: A practical two surface plasticity theory, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 42, pp. 641-646, 1975.