

土の構成式入門 5. 弾塑性体理論と適用(その 3)

5.5 弾粘塑性理論と土の構成式

5.5.1 弾粘塑性理論

一般に、材料の粘塑性挙動を記述する構成関係は古くか ら多くの研究者の興味の対象となり、これまでに多くの考 え方が示されてきた。例えば、Perzyna^{101),102),103)}, Naghdi・Murch¹⁰⁴⁾, Olszak・Perzyna¹⁰⁵⁾, Cristescu¹⁰⁶⁾, Kratochvil・Dillon¹⁰⁷⁾, Rice¹⁰⁸⁾, Perzyna¹⁰⁹⁾, Valanis^{110),} ¹¹¹⁾, Phillips・Wu¹¹²⁾, Kujawski・Mroz¹¹³⁾, Eisenberg・ Yen¹¹⁴⁾が粘塑性理論を展開している。ここでは、土質材料 への適用を考慮して、二つの一般理論についてその概説を 行うことにする。

 超過応力 (overstress) の概念に 基づく弾粘塑性理 論――超過応力モデル (overstress model)

金属の分野では,金属片の単軸引張り状態下での降伏応 力がひずみ速度の影響を受けることは良く知られており, 一次元応力状態における金属材料の粘塑性挙動に関する実 験的,理論的研究が古くから盛んに行われてきた。更に, 金属棒内の塑性波の伝ば問題の解析の必要性から,ますま すこの傾向が促進された。

これら一連の研究のうち Malvern^{115),116)}によって示された構成関係式は特に重要なものであった。すなわち,材料が加工硬化性を有する場合,もしその準静的応力 – ひずみ関係が $\sigma^* = f(\varepsilon)$ で表されるならば,動的応力 σ は次式で表される。

式(5.36)は、塑性ひずみ速度が超過応力($\sigma-f(\epsilon)$)の関数、 すなわちあるひずみ量に対する動的応力と静的降伏応力の 差の関数でなければならないことを意味している。したが って、式(5.36)は弾粘塑性構成関係式の一つの一般的な形 式を提案していることになる。すなわち、

 $E\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + \langle \Phi(\dot{\sigma} - f(\epsilon)) \rangle$ (5.37) ここに, E: ヤング係数

January, 1984

 $<\!\Phi\!\!>=\!\!\begin{cases} \Phi(\sigma\!\!>\!\!f(\varepsilon)\,\sigma\!\!>\!\!e\!\!>)\\ 0\,(\sigma\!\leq\!f(\varepsilon)\,\sigma\!\!>\!\!e\!\!>)\end{cases}$

一方, 金属以外の分野 で は, Bingham¹¹⁷が降伏値の概 念を用いて粘塑性体に関する法則を定式化した。さらに, Hohenemser・Prager¹¹⁸) は Bingham 体の構成式を von Mises の降伏条件を用いて一般応力状態に拡張した。

Malvern や Hohenemser・Prager によって示された構成式の考え方を基礎として,一般的な材料に適用しうる多次元弾/粘塑性構成式を確立したのは Perzyna である。 Perzyna は,応力空間に静的降伏曲面と動的負荷曲面を考えることによって,加工硬化性を有する速度依存性塑性材料の構成関係を一般応力状態で規定した。すなわち,静的降伏関数は次式で与えられる。

ここに, $f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^{vp})$:動的負荷関数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} : ひずみ硬化パラメーター \\ \left(= \boldsymbol{\kappa}(W_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{\kappa}\left(\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}}} \sigma_{ij} d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}} \right) \right) \end{aligned}$$

Wvp:粘塑性仕事

そこで、静的降伏曲面 F=0 は応力空間で凸面性を有し、かつ正則であると仮定すると、構成関係式は次式で表現される。ただし、全ひずみ速度 i_{ij} は弾性ひずみ速度 i'_{ij} と粘塑性ひずみ速度 i''_{ij} の和として表される。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{e} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ji}^{vp}$$

$$= \frac{1}{2G} \dot{\boldsymbol{s}}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{\boldsymbol{s}}_{ij} \delta_{ij} + \gamma^{0} \langle \boldsymbol{\Phi}(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$
.....(5. 39)

ここに、 $\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & (F > 0 \text{ obs}) \\ 0 & (F \leq 0 \text{ obs}) \end{cases}$

sij:偏差応力

G:せん断弾性係数

ν:ポアソン比

γ°:粘性係数

δij:クロネッカーのデルタ

関数 Φ(F)は対象となる材料の実験結果から選択,決定される。式(5.39)の右辺の第3項は粘塑性ひずみ速度を表しているが、これは次式のように表現できる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$
(5.40)

^{*}大阪大学助教授 工学部土木工学科

^{**}大阪大学助手 工部学土木工学科

講 座

ここに、 $\gamma(=\gamma^0/\kappa)$ は材料の粘性係数である。いま、式 (5.40)の両辺の2乗和をとり、 $I_2^{op} = \epsilon_{ij}^{op} \epsilon_{ij}^{op}/2$ とおけば、

$$(I_2^{vp})^{\frac{1}{2}} = \mathcal{I} < \Phi(F) > \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (5.41)$$

したがって、式(5.38)と式(5.41)より、 $f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ki}^{vp}) = \kappa(W_{vp}) \{1+$

$$\Phi^{-1}\left[\frac{(I_2^{vp})^{\frac{1}{2}}}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5.42)$$

上式は動的負荷関数を陰関数として表現したものである。

以上が Perzynaの構成関係式の概要であるが、その意味 について、もう少し詳しく考えてみよう。すでに述べたよ うに、Perzyna の構成関係式は一次元応力状態に 対 する Malvern のモデルを多次元へ拡張したものである。このよ うな一般化に際しては、次の 2 点が重要なポイントとなる。 すなわち、①超過応力の定義、②粘塑性ひずみ速度 ϵ_{II}^{OP} の 方向、である。Perzyna のモデルにおける粘塑性ひずみ速 度は、図—5.25に示すように、動的負荷曲面の応力点にお ける外向き法線方向に生じると仮定している(式(5.40)参 照)。また、静的降伏曲面 F=0は、式(5.38)の定義から次 式と等価である。

 $f = \kappa$ (5.43) いま,静的降伏曲面の外側, すなわち F > 0(または $f > \kappa$) における負荷に対して,動的負荷曲面が $f = c^*$ で与えられ るとき,超過応力Hは次式で定義される。

一方, Phillips・Wuは,上述の基本的な2点の仮定にお いて Perzynaのモデルとは異なる粘塑性モデルを提案して いる。このモデルでは,図一5.26に示すように,動的負荷







図-5.26 Phillips・Wu モデルにおける超過応力と 粘塑性ひずみ速度の方向

曲面上の応力点Aから静的降伏曲面に下した垂線との交点 を A' とすれば,超過応力Hはその垂線の足の長さとして 定義される。すなわち,

ここに, nij は A' 点における静的降伏曲面の単位法線ベクトルであり, 次式で与えられる。

しかるに, 粘塑性ひずみ速度の方向は A' 点における静的 降伏曲面の外向き法線方向と仮定すれば, 粘塑性ひずみ速 度は次式で与えられる。

 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(H) \rangle n_{ij} \cdots (5.48)$

Phillips・Wuのモデルでは,式(5.45)に対応する表現は 次式で与えられる。

また, Eisenberg · Yen は Perzyna, Phillips · Wuのモデ ルを移動硬化を考慮した粘塑性モデルに拡張している。

Perzyna のモデルに代表される上述の超過応力モデルに おいては,粘塑性ひずみ速度は応力速度に依存しない。ま た,超過応力によって規定される降伏条件は存在するが, 負荷・除荷基準は存在しない。これらのことは,超過応力 に基づく弾粘塑性理論からは非粘性(inviscid)の弾塑性理 論を特別な場合として導き出すことができないことを意味 している。したがって,超過応力モデルはむしろクリープ 力学におけるクリープポテンシャル理論に近い理論構成を もっているといえる。

時間依存性を有する内部変数を用いた弾粘塑性理論
 ----流動曲面モデル(flow surface model)

この弾粘塑性理論は,弾塑性理論と同様な理論構成の中 に粘性効果を表現する内部変数や時間依存性の内部変数を 導入することによって,時間とともに変化する降伏曲面 (負荷曲面)という概念に基づいて構成されている。この ような曲面は流動曲面(flow surface)と呼ばれる。した がって,この理論では,その内部変数を0とおけば,直ち に非粘性の弾塑性理論となる。

Naghdi・Murch は、弾粘塑性体の降伏に関して、降伏 関数の凸面性や塑性ひずみ速度の降伏曲面に対する垂直性 を Drucker¹¹⁹⁾の弾粘塑性体に関する 仮説に基づいて考察 し、粘弾/塑性体の構成理論を展開した。

一方, Olzak・Perzyna は弾/粘塑性体理論を提案して いる。この理論による流動曲面は次式で与えられる。

弾性ひずみのみが生じる。さらに,流動曲面は凸面性を有 し,かつ粘塑性ひずみ速度ベクトルの方向は流動曲面の応 力点における外向き法線方向に一致するとしている。すな わち,

ここに, A は正のスカラーパラメーターで, 次式から決 定される。

したがって,

ここで,

とおくと、式(5.51)は次式のように表される。

また、負荷・除荷の判定は次式によって行うことができる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \end{pmatrix} < 0, \ f = 0 \quad \text{"除荷"} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \end{pmatrix} = 0, \ f = 0 \quad \text{"中立負荷"} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \end{pmatrix} > 0, \ f = 0 \quad \text{"負荷"} \end{pmatrix}$$
(5.56)

このように,粘塑性の場合の負荷・除荷の規準はその粘性 特性のために非粘性の場合のものとは異なっていることに 注意すべきである。

この理論の全ひずみ速度は次式で与えられる。

ここに, Hijki は弾性マトリックスである。

Q:粘弾/塑性体,弾/粘塑性体とは?

A:粘弾/塑性体 (viscoelastic / plastic body) とは, 弾性域においても粘性ひずみが発生し,降伏によってさら に塑性ひずみが生じるような物質である。したがって,ひ ずみの構成は次式のように表される。

 $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{ve} + \dot{\epsilon}_{ij}^{p}$ (5.59) 一方, 弾/粘塑性体 (elastic/viscoplastic body)とは弾性 域では粘性ひずみは発生せず,降伏によって粘塑性ひずみ が生じるような物質である。したがって,ひずみの構成は

January, 1984

次式で表される。

 $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ (5.60) 一般に,材料は弾粘塑性体 (elastic-viscoplastic body) であり,弾性域および塑性域の両方において粘性特性を示 す。しかし,弾粘塑性体としての降伏条件を規定すること は非常に困難であるため,粘弾/塑性体,弾/粘塑性体と しての理論展開が行われている。

5.5.2 弾粘塑性応カ-ひずみ増分関係のマトリックス 表示

弾粘塑性構成式を用いる境界値問題に対して,閉じた解 析解を求めることは非常に困難であるので,有限要素法な どの数値解析法によらねばならない。また,弾粘塑性構成 式では,弾塑性構成式と同様に,ひずみ速度が応力または 応力速度の関数として与えられる。通常行われる増分解析 にこれを利用するには,応力 - ひずみ速度関係の逆増分関 係が与えられていなければならない。

超過応力理論に基づく応力 - ひずみ増分関係は,例えば Zienkiewicz ら^{120),121)}によって示されている。一方,流動 曲面理論に基づく応力--ひずみ増分関係は Matsui・Abe^{122),} ^{123),124)},柴田・関口¹²⁵⁾によって示されている。以下では, 流動曲面理論に関するものを示す。

まず、流動曲面fは次式で与えられるものとする。

式(5.58)の逆関係のマトリックス表示は次式で与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\} \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right)}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\}^T \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\}}$$

.....(5.62)

$$A = -\frac{1}{\Lambda} \Big\{ \Big(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \Big) \dot{\kappa} + \Big\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}^{vp}} \Big\}^T \dot{\mathbf{e}}^{vp} \Big\}$$

De:弾性マトリックス

g:粘塑性ポテンシャル関数

式(5.62)を変形すれば,

$$\dot{\sigma}' = \begin{bmatrix} D_e - \frac{D_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\}} \end{bmatrix}$$
$$\times \left\{ \dot{\varepsilon} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\}}{A} \right\} = D_{ev} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^c) \quad \dots (5.63)$$

ここに, **D**_{ev} は弾粘塑性マトリックス, **š**^c はクリープひず み速度ベクトルである。

講 座

式(5.63)はひずみ速度と応力速度の逆関係である。増分 計算を行うためには、微小時間増分 *4t* 間に生じるクリー プひずみ増分ベクトル *4e*°を求め、この増分関係を求めな ければならない。そこで、微小時間 *4t* 間におけるクリー プひずみ増分ベクトルを次式で評価するものとする。

 $\Delta \mathbf{e}^{c} = \Delta t \{ (1-\theta) \dot{\mathbf{e}}_{t}^{c} + \theta \dot{\mathbf{e}}_{t+\Delta t}^{c} \}$ (5.64) ここに、 $\dot{\mathbf{e}}_{t}^{c}, \dot{\mathbf{e}}_{t+\Delta t}^{c}$ はそれぞれ $t=t, t=t+\Delta t$ におけるクリ ープひずみ速度ベクトルであり、 θ は差分近似のための定 数である。さらに、 $\dot{\mathbf{e}}_{t+\Delta t}^{c}$ は次式で与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t+\Delta t}^{c} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t}^{c} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{c}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\right]_{t} \Delta \boldsymbol{\sigma}' + \left\{\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c}}{\partial t}\right\} \Delta t + \boldsymbol{R} \quad \cdots (5.65)$$

ここに, *R*はテーラー展開の剰余 で あ る。式(5.65)を式 (5.64)に代入し, *R*に関する項を高位の微小項として無視 すれば,

$$G = \theta \Delta t \left[\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right]_{t}$$
$$\boldsymbol{H} = \theta \Delta t \left\{ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ}}{\partial t} \right\}_{t}$$

式(5.66)を式(5.63)に代入し、 $\Delta \sigma' = \int_{t}^{t+\Delta t} \dot{\sigma}' dt, \Delta \varepsilon = \int_{t}^{t+\Delta t} \dot{\sigma}' dt$ きdt とすれば、

 $\Delta \boldsymbol{\sigma}' = \widetilde{\boldsymbol{D}} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta t \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^c)$

=(**I**+**D**_{ev}**G**)⁻¹**D**_{ev}{**4e**-**A**t(**e** + **H**)} …(5.67) ここに, **I**は単位マトリックスである。式(5.67)は弾粘塑 **性**増分解析の基礎となる応力 - ひずみ増分関係である。

以上のマトリックス表示は*f*+gである非関連流れ 則に 基づく関係式であるが,これらの表示式で*f*=gとおけば そのまま関連流れ則に基づく関係式となる。

5.5.3 土の弾粘塑性構成式

土の弾粘塑性構成式は, Adachi · Okano¹²⁶⁾, Zienkiewicz · Humpheson · Lewis¹²⁷⁾, Akai · Adachi · Okano¹²⁸⁾, Dafalias^{129),130)}および Sekiguchi¹³¹⁾, Dragon · Mroz¹³²⁾, Nova¹³³⁾, Matsui · Abe^{124),134),135)}によって提案されてい る。前の四つの弾粘塑性構成式は Perzyna の理論に基づき, 後の四つのそれは流動曲面理論に基づくものである。以下 ではそれぞれのモデルについて簡単に説明する。

Zienkiewicz らの構成式は土質材料に対する Perzyna 理 論の形式的な適用である。

Adachi・Okano は、Perzyna 理論を適用するに当たっ て、まず静的降伏関数 f_s として Roscoe らの Cam-clay モ デルの降伏関数を仮定した。つぎに、動的負荷関数を決定 するために、三軸試験機による種々の実験的研究を行い、 図—5.27に示すような動的負荷関数 f_a を定義した。 す な わち、動的負荷関数 $f_a = \kappa_a$ は 静 的 降 伏 曲 面 $f_s = \kappa_s$ を点 (σ'_{m0} , 0)を中心として 相似変換(相似比 1: (1+ Δk)) す ることにより決定される。また、関数 $\Phi(F)$ は、実験結果



図-5.27 Adachi・Okanoモデルにおける 動的負荷関数の定義

に基づいて次式で与えられるとしている。

上記の Adachi らのモデルでは、ひずみ硬化状態が最大 非弾性主ひずみ状態によって規定されているが、一方、 Akai・Adachi・Oka のモデルでは、この点に関して異な った仮定を行っている。すなわち、このモデルのひずみ硬 化状態は非弾性体積ひずみによって規定されると仮定して いる。図—5.28はこれらのモデルのひずみ硬化に関する仮 定の相違を示している。図中の I、IIは一定の軸ひずみ速 度試験($\epsilon_1^{(I)}=0$, $\epsilon_1^{(II)}=c(\pm 0)$)における応力径路を表して いる。図—5.28(a)では、AI、AI点で最大非弾性主ひず みが等しく、ひずみ硬化が等しくなる。これに対して図— 5.28(b)では、BI、BI、EI点で非弾性体積ひずみが等しく、 ひずみ硬化が等しくなる。

Akai らのモデルの構成関係式は次式で与えられる。 $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{e} + \dot{\epsilon}_{ij}^{pp}$

ここに,



図-5.28 ひずみ硬化に関する仮定の比較

$$\Phi(F) = c \exp\left[m'\left\{\frac{\sqrt{2J_2}}{M^*\sigma'_m} + \ln\left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_{me}}\right) - \left(\frac{1+e}{\lambda-\kappa}\right)v^p\right\}\right]$$
$$c = c_0 \exp\left[-m'\ln\left(\frac{\sigma'_m^{(s)}}{\sigma'_{me}}\right)\right]$$

更に、このモデルの提案者らは、式(5.70)の $\sqrt{2J_2}/\sigma'_m$ の 代りに Sekiguchi・Ohta⁶⁸⁾による応力パラメーター η^* を 用いることによって、異方圧密粘土に対する構成関係式と している。

また, Dafalias は, 弾塑性境界曲面モデルに Perzyna 理 論に基づく粘塑性ひずみ速度を付加して, 弾/粘塑性境界 曲面モデルとしている。

一方, Sekiguchi は次式で示される流動曲面 を 定 義 し て, 流動曲面理論による弾/粘塑性構成関係式を提案して いる。

ここに、 α は2次圧密係数、 ioは基準体積ひずみ速度、 tは経過時間である。 また、 v^p は塑性体積ひずみで、 太田 モデルなどによって 評価できるとしている。 また、 Sekiguchi・Ohta⁶⁸⁾は応力パラメーター η^* を用いて異方圧密粘 土に対する弾粘塑性構成式を提案している。

Matsui・Abe は, 流動曲面(降伏関数)とそれとは異 なる粘塑性ポテンシャル関数を仮定して,非関連流れ則に 基づく構成関係式を示している。さらに,最近,粘性 (viscid)状態を基準状態とする弾/粘塑性構成関係式を提 案している¹³⁶⁾。以下に簡単に説明する。

まず、その考え方を簡単な例について示す。時間依存性 の内部変数として 粘性体積ひずみ v^{o} を考え、その移行方 程式 (evolutional equation) として、例えば次式を仮定 する (仮定1)。

$$\frac{v^v}{v_f^v} = 1 - \frac{\dot{v}^v}{\dot{v}_r^v} \quad \dots \qquad (5.72)$$

ここに、 v_{j}^{p} および v_{j}^{p} はそれぞれ最終粘性体積ひずみおよ び基準粘性体積ひずみ速度である。t=0において、 $v^{p}=-v^{p}$ と仮定して(仮定2)、式(5.72)を解けば、次式を得る。

粘塑性体積ひずみ v^{vp} は塑性体積 ひずみ v^p と粘性体積ひ ずみ v^v の和で表されるとすれば,

 $v^{vp} = v^p + v^v$

したがって、粘塑性体積ひずみ v^{vp} をひずみ硬化パラメー ターとする等方モデルの流動曲面は次式で表される。

$$f = v_f^v \left(1 + \frac{v_f^v}{v_f^v} \right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\dot{v}_f^v}{v_f^v} t\right) \right\} - v^{vp} \cdots (5.75)$$

January, 1984

この例に基づいて,一般的にこの流動曲面モデルの基本 仮定を示せば,次のようになる。

① 式(5.72)から明らかなように、このモデルでは、 \dot{v}^{o} < \dot{v}_{r}^{o} の場合は正、 \dot{v}^{o} > \dot{v}_{r}^{o} の場合は負の粘性体積ひずみが 生じ、 $v^{v}=0$ となる境界の \dot{v}_{r}^{o} が存在する。 すなわち、 前 述の仮定1はこのような基準粘性体積ひずみ速度の存在を 仮定しているのである。 正の v^{o} はクリープ体積ひずみで あり、 $v^{v}<0$ の場合には、粘塑性体積ひずみ v^{op} は塑性体 積ひずみ v^{p} より小さくなる。これは、ひずみ速度効果に よる粘塑性剛性の増加挙動の表現と考える。

② 負荷の瞬間においては,前述の仮定2から粘塑性体 積ひずみ v^{vp} は生じないので,粘塑性剛性は無限大とな る。このモデルでは,この条件を塑性変形と粘性変形の coupling 条件と考える。

③ $i^v = v_r^v$ の場合, $v^v = 0$ であるので $v^{vp} = v^p$ となる。 しかし, $v_r^v \neq 0$ であるから, このモデルにおける塑性体積 ひずみ v^p は通常の意味の 時間依存性のない 非弾性体積ひ ずみを意味していない。言い換えれば, このモデルの基準 状態としては非粘性状態ではなく, $v^v = v_r^v$ で規定される粘 性状態を仮定している。

しかるに, 正規圧密粘土の力学的挙動に 適合する v[®]の 移行方程式は,具体的には次のような形で与えるとよい。 すなわち,

あるいは,

上述した誘導方法に従えば、それぞれ次のような流動曲面 か得られる。

$$f = \left(v^p + \frac{\dot{v}_r^v}{\alpha\beta}\right) \left\{1 - \frac{1}{(1+\beta t)^\alpha}\right\} - v^{vp} = 0 \quad \dots \dots \quad (5.78)$$

あるいは,

$$f = \mu \ln\left\{1 + \left(\frac{\dot{v}_r^v}{\mu}t\right) \exp\left(\frac{v^p}{\mu}\right)\right\} - v^{vp} = 0.....(5.79)$$

また,同様の手法によって,次式で表される流動曲面も得 られている。

ここに, α , β , μ , δ は材料定数である。式(5.79)は Sekiguchi がすでに誘導した式(5.71)と同形である。

5.6 弾塑性,弾粘塑性構成式の適用例

土の弾塑性モデル,弾粘塑性モデルは広く境界値問題に 適用されているが,紙数の都合もあるので,ここでは,① 講 座







図-5.31 盛土中央の表面沈下の経時変化



図-5.32 地盤内水平変位の経時変化(弾粘塑性解析)

多次元圧密解析,②動的応答解析について,2,3の適用 例を示すことにする。

5.6.1 多次元圧密解析

柴田・関口^{125),187)}は弾粘塑性モデルを用いた多次元圧密 解析を行い,盛土基礎地盤の変形および破壊予測の方法を 提案している。彼らの行った試験盛土の挙動解析結果の一



図-5.33 応力径路挙動(ESP:有効応力径路,TSP:全応 力径路,要素位置は図-5.31参照)

部を以下に示す。図-5.29および図-5.30はそれぞれ盛土 中心線における沈下および過剰間隙水圧の解析結果と実測 結果を比較したものである。これらの関係および側方変位 の挙動について両者は比較的良好な一致を示している。こ のことはモデルと解析手法の有効性を示唆している。

Matsui・Abe^{71),123),124)}は,粘土の非弾性変形特性が多次 元圧密変形に与える影響を考察するため,弾塑性および弾 粘塑性モデルを用いて基礎的な多次元圧密解析を行ってい る。以下では,帯状荷重を受ける軟弱粘土地盤の多次元圧 密解析結果を示す。図一5.31,5.32,5.33はそれぞれ盛土 中央の表面沈下,地盤内水平変位および応力径路挙動につ いて弾塑性および弾粘塑性解析結果を比較したものである。 地盤の変形挙動に与えるダイレイタンシーや粘性の影響を とくに有効応力径路から良く理解することができる。

小林^{130),130)}は,サンドドレーンを打設された軟弱粘土地 盤の弾粘塑性多次元圧密解析を行っている。すなわち,広 島空港におけるサンドドレーン地盤の解析沈下量は実測沈 下量とよい一致を示し,また,愛甲試験盛土でのサンドド レーン効果に関する解析結果はほかの解析法の結果と比べ てより実測値の傾向に近いものであることを報告している。

多次元圧密解析は,基礎地盤の解析のほかに要素試験の 解析にも用いられている。Sekiguchi・Nishida・Kanai¹⁴⁰ は部分排水三軸試験の弾粘塑性解析を行い,排水境界条件 下における三軸試験結果の軸ひずみ速度依存性を考察して いる。図-5.34は,軸ひずみに対する軸差応力,体積ひず みおよび過剰間隙水圧の関係について,解析結果を示した ものである。これらの解析結果は実験結果を定性的によく 説明しうるものとなっている。

Carter¹⁴¹⁾もまた, 軸ひずみ速度が 排水三軸試験に与え る影響を modified Cam-clay モデルを用いた弾塑性多次元



図-5.35 三軸供試体内部の局所的な試験径路の解析結果

圧密解析法によって解析している。図一5.35は,三軸供試 体内部の3箇所(図示)における局所的な試験径路の解析 結果を示している。これらの径路はかなり異なったものと なっており,通常要素試験とみなされている排水三軸試験 の供試体内部に非一様な挙動が存在する可能性を指摘して いる。

一方,松井・阿部¹⁴²⁾は,三軸試験のせん断過程に先だつ 圧密過程における三軸供試体の非一様性について,弾塑性 多次元圧密解析を行いその解明を試みている。以下では, 三軸供試体の中央高さでの側方変位を0とするよう側圧で 制御する Ko 圧密過程のシミュレーションを行った結果を 示す。図一5.36は三軸供試体の4箇所における応力径路を 示したものである。図中の矢印は圧密終了時の応力点を示 している。図より,供試体各点における Ko 圧密中の有効 応力径路は一致しないことは明らかである。このことは, Ko 圧密三軸供試体には,すでに圧密過程において,土の 塑性変形特性のために非一様性が生じている可能性を示す ものである。

6.6.2 動的応答解析

January, 1984

Prevost · Hughes¹⁴³⁾は、Prevostのモデルを用いて、繰

 1.0
 A
 C
 C

 1.0
 A
 C
 C

 1.0
 C
 C
 C

 0.9
 0.9
 1.0
 1.1
 1.2

 0.9
 1.0
 1.1
 1.2
 1.3
 1.4

 P
 P
 P
 P
 P
 P
 P

 1.0
 C
 C
 C
 C
 C
 C

 1.1
 1.2
 1.3
 1.4
 C
 C
 C
 C

図-5.36 K₀ 圧密過程における三軸供試体内部の局所的応力 径路(矢印は圧密終了時)

返し波力を受ける海洋構造物基礎地盤の応答解析を行って いる。解析は二次元平面ひずみ問題として行われ,構造物 基礎に作用する外力として,構造物荷重と波力による繰返 し傾斜偏心荷重を考慮し,非排水状態で載荷されるものと している。一方,支持地盤としては,一様な過圧密粘土地 盤が仮定されている。解析結果より,波力による繰返し載 荷によって基礎の沈下は累積し,その速度は繰返し回数の 増加に伴って減少するが,基礎の水平変位や回転は直ちに 安定化する。また,基礎中央部と基礎端部の応力比-ひず み-時間履歴を比較し,基礎端部付近で地盤のせん断応力 レベルが高いことが示された。以上の結果は,同様な条件 のもとで行われた遠心載荷モデルによる実験結果とも一致 するものであった。

Sato・Shibata・Kosaka⁹¹⁾は提案しているモデルを用い て砂地盤の液状化解析を行っている。モデル地盤は水平に 推積した深さ48mの飽和砂地盤であり,この地盤を一次元 要素に分割して解析している。地盤の初期応力状態は K_0 圧密状態 ($K_0=0.5$)で,入射波としては Taft 波形 (NS 成分)を最大加速度 100 gal として用いている。解析結果 より,塑性変形の発生によって地表面水平変位の中立軸の 位置がかなりの時間の間移動していることが示された。ま た,図-5.37,5.38 はそれぞれ深さ9 m における $\sigma_{12}-\epsilon_{12}$



図---5.37 せん断応力 - ひずみ関係

講



図-5.38 有効応力径路

関係および有効応力径路を示しているが、負の塑性せん断 ひずみの累積および平均有効応力の減少に伴うせん断応力 振幅の減少など液状化に至る過程がよく表現されている。

西・江刺⁹³⁾は,飽和砂の三軸供試体に Taft 波形 (NS 成 分)を与えた実験結果と提案モデルによる計算結果を比較 している。その結果,計算軸ひずみ量はほぼ実験結果と符 合しており,また,間隙水圧が初期有効拘束圧と等しくな る時刻が計算結果ではやや遅れぎみであるが,その後の大 きな応力変動による間隙水圧の瞬間的な減少(せん断抵抗 力の増大)が表現しえているなど,不規則載荷条件下の挙 動を提案モデルによって予測しうるとしている。

以上3回にわたってポテンシャル理論に基づく弾塑性理 論(弾粘塑性理論)とその土への適用について述べてきた。 しかし,個々の土のモデルについては概説的な記述に終始 し,その詳細については触れることができなかった。これ は,限られた紙面の都合にもよるのであるけれども,むし ろ「広く浅く」が弾塑性理論の全貌を理解するのに役立つ のではないかと考えたからでもある。しかしながら,ここ で取り上げたものは必ずしもすべてではない。例えば,粒 状体理論の結果を塑性論的に解釈したものには全く言及し ていないし,数値解析への利用という点を考慮して取り上 げなかった基礎的で重要なものも少なくない。また,異な ったタイプの理論(亜弾性理論, endochronic 理論など) に基づくものは取り上げていない。これらについては既往 の解説等を参照されたい。

参考文献

- 101) Perzyna, P.: The constitutive equations for workhardening and rate sensitive plastic materials, Proc. of Vibration Problems, Vol. 3, No. 4, pp. 281-290, 1963.
- 102) Perzyna, P.: The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, Quart. Appl. Math. Vol. 20, pp. 321-332, 1963.
- 103) Perzyna, P.: Fundamental problems in viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, pp. 243-377, 1966.
- 104) Naghdi, P.M. and S.A. Murch.: On the mechanical behavior of viscoelastic/plastic solids, J. Appl. Mech.

Vol. 30, pp. 321-328, 1963.

- 105) Olszak, W. and P. Perzyna: The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition, Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., pp. 545-553, 1966.
- 106) Christescu, N.: Dynamic plasticity, North-Holland Publication Company, Amsterdam, 1967.
- 107) Kratochvil, J. and O.W. Dillon, Jr.: Thermodynamics of crystalline elastic-visco-plastic materials, Journal of Applied Physics, Vol. 41, No. 4, pp. 1470-1479, 1970.
- 108) Rice, J.R.: On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic deformation in metals, J. Appl. Mech. Vol. 37, pp. 728-737, 1970.
- 109) Perzyna, P.: Thermodynamic theory of viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol. 11, pp. 313-354, 1971.
- 110) Valanis, K.C.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, part I, general theory, Archives of Mechanics, Vol. 23, No. 4, pp. 517-533, 1971.
- 111) Valanis, K.C.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, part II, application to mechanical behavior of metals, Archives of Mechanics, Vol. 23, No. 4, pp. 535-551, 1971.
- 112) Phillips, A. and H.-C. Wu.: A theory of viscoplasticity, Int. J. Solids Structures, Vol. 9, pp. 15-30, 1973.
- 113) Kujawski and Z. Mroz: A viscoplastic material model and its application to cyclic loading, Acta Mechanica, Vol. 36, pp. 213–230, 1980.
- 114) Eisenberg, M.A. and C.-F. Yen: A theory of multiaxial anisotropic viscoplasticity, J. Appl. Mech. Vol. 48, pp. 276-284, 1981.
- 115) Malvern, L.E.: The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of metal exhibiting a strain-rate effect, J. Appl. Mech. Vol. 18, pp. 203-208, 1951.
- 116) Malvern, L.E.: Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect, Quart. Appl. Math. Vol. 8, pp. 405-411, 1951.
- 117) Bingham, E.C.: Fluidity and plasticity, McGraw-Hill, New York, 1922.
- 118) Hohenemser, K. and Prager, W.: Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, ZAMM, Vol. 12, pp. 216 -226, 1932.
- 119) Drucker, D.C.: A definition of stable in elastic materials, J. Appl. Mech. Vol. 26, pp. 101-106, 1959.
- 120) Zienkiewicz, O.C. and I.C. Cormeau: Visco-plasticity plasticity and creep in elastic solids—a unified numerical solution approach, Int. J. Num. Methods, Engng., Vol. 8, pp. 821-845, 1974.
- 121) Zienkiewicz, O.C. and D.R.J. Owen: Analysis of viscoplastic effects in pressure vessels by the finite element method, Nuc. Engng., Design, Vol. 28, pp. 278–288, 1974.
- 122) 松井 保・阿部信晴:土の弾-粘塑性有限要素解析について, 土木学会第34回年次学術講演会講演概要集,第3部, pp. 303-304, 1979.
- 123) Matsui, T. and N. Abe: Multi-dimensional consolidation analysis of soft clay, Proc. 4th Int. Conf. Num. Methods Geomech. Vol. 1, pp. 337-347, 1982.
- 124) Matsui, T. and N. Abe: Application of elasto-plastic and elasto-viscoplastic models to multi-dimensional consolidation analysis, Proc. Int. Symp. Num. Models Geomech., pp. 711-720, 1982.
- 125) 柴田 徹・関口秀雄:盛土基礎地盤の弾・粘塑性挙動解析と 破壊予測,土木学会論文報告集,第301号,pp.93-104, 1980.
- 126) Adachi, T. and M. Okano: A constitutive equation for normally consolidated clay, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, pp. 55-73, 1974.
- 127) Zienkiewicz, O.C., C.Humpheson and R.W. Lewis: Associated and non-associated visco-plasticity and plas-

- 128) Akai, K., T. Adachi and F. Oka: Constitutive models for clays and sands, Proc. Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geomechanical Engineering, pp. 815–838, 1980.
- 129) Dafalias, Y.: Bounding surface elastoplasticity-viscoplasticity for particulate cohesive media, Proc. IUTAM Symp. on Deformation and Failure of Granular Materials, pp. 97-107, 1982.
- 130) Dafalias, Y.: An elastoplastic-viscoplastic constitutive modeling of cohesive soils, Proc. Int. Symp. Num. Models Geomech., pp. 126–138, 1982.
- 131) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Fdn Engng., Vol. 1, pp. 289-292, 1977.
- 132) Dragon, A. and Z. Mroz: A model for plastic creep of rock-like materials accounting for the kinetics of fracture, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech., Abstr., Vol. 16, pp. 253–259, 1979.
- 133) Nova, R.: A viscoplastic constitutive model for normally consolidated clay, Proc. IUTAM Symp. on Deformation and Failure of Granular Materials, pp. 287-295, 1982.
- 134) 松井 保・阿部信晴:粘土の弾粘塑性構成式について,第18
 回土質工学研究発表会発表講演集,pp. 393-396, 1983.

- 135) 松井 保・阿部信晴:流動曲面理論による粘土の弾粘塑性構成式,土木学会第38回年次学術講演会講演概要集,第3部, pp. 423-424, 1983.
- 136) Matsui, T. and N. Abe: An elasto/viscoplastic constitutive equation for clays based on the flow surface theory and its application to multi-dimensional consolidation analysis, Soils and Foundations (will be submitted).
- 137) 関ロ秀雄・柴田 徹: 盛土基礎地盤の側方流動解析上の問題 点,土と基礎, Vol. 30, No. 5, pp. 47-54, 1980.
- 138) 小林正樹:埋立地盤における圧密沈下解析について、土木学 会第36回年次学術講演会講演概要集,第3部, pp. 150-151, 1981.
- 139) 小林正樹:サンドドレーンの効果について,第17回土質工学 研究発表会発表講演集,pp. 177-180, 1982.
- 140) Sekiguchi, H., Y. Nishida and F. Oka: Analysis of partially-drained triaxial testing of clay, Soils and Foundations, Vol. 21, No. 3, pp. 53-66, 1981.
- 141) Carter, J.P.: Predictions of the non-homogeneous behaviour of clay in the triaxial test, Géotechnique, Vol. 32, No. 1, pp. 55-58, 1982.
- 142) 松井 保・阿部信晴:三軸粘土供試体の圧密過程,第17回土 質工学研究発表会発表講演集, pp. 141-144, 1982.
- 143) Prevost, J.H. and T.J.R. Hughes: Analysis of gravity offshore structure foundations subjected to cyclic wave loading, Proc. Offshore Technology Conference, Vol. 1, pp. 1809–1814, 1978.

書籍紹介

GROUNDWATER in civil engineering Developments in geotechnical engineering 35

by László Rétháti

建設工事の現場において直面する問題の中で,地下水対 策ほど困難なものはない。実際の地盤の地下水の挙動は複 雑多様な要因に支配される現象であるため,地下水に関し て計画・調査・解析等を行う場合,これらの理論や方法に ついて正確な知識が要求されることはいうまでもない。

本書は次の2部から構成され,

第1部 理論と方法論

第2部 実際問題の解決法

第1部では,地下水の分類と特性,表層部の含水状態や 毛管現象,気象現象と水理地質学,地下水位の変動や予測, 理論・方法論・確率論的な数学的手法による地下水解析法 など,地下水に関する基本的事項を解説している。

第2部では,事前調査,地下排水,掘削地の安定問題, 対策工法,凍害問題,実施例,失敗例など,地下水に関す る実際問題の解決法を実例や資料を混じえて紹介している。

たくさんの図表を使用して比較的平易に記述されている ので内容は理解しやすく,また最新の資料も網羅されてい るので,この方面に興味を持っておられる研究者,実務者 ともに一読に値する好技術書であるといえよう。

(青山清道)

| B 5 判 | 478ページ Dfl 245.00 |
|-------|-------------------------------------|
| 発行所 | Elsevier Scientific Publishing Co., |
| | エルゼビア サイエンス パブリッシャーズ東京支社 |
| | 電話 03-836-0810 |